

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

GABRIEL MOKOBODZKI

Inégalités liées au principe du maximum

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. n° 22, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A3_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INÉGALITÉS LIÉES AU PRINCIPE DU MAXIMUM

par Gabriel MOKOBODZKI

Résumé

Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable, et soit $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ une famille résolvente sous-markovienne de noyaux positifs et bornés sur (X, \mathcal{B}) . Pour toute mesure excessive bornée $\sigma \geq 0$ sur (X, \mathcal{B}) , et tout $\lambda > 0$, l'application

$$V_\lambda^* : f \mapsto (f \cdot \sigma) \cdot V_\lambda$$

définit un opérateur linéaire continu de $L^1(\sigma)$ dans lui-même, de norme $\leq \frac{1}{\lambda}$.

Soit alors K une partie convexe faiblement compacte de $L^1(\sigma)$ telle que l'on ait

$$\lambda V_\lambda^* K \subset K \text{ pour tout } \lambda > 0$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda^* x = x \text{ pour tout } x \in K.$$

Pour un tel ensemble, on peut définir, sur l'espace $A(K)$ des fonctions affines continues sur K , une famille résolvente sous-markovienne $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ d'opérateurs linéaires en posant, pour tout $g \in A(K)$, tout $x \in K$,

$$U_\lambda g(x) = \frac{1}{\lambda} g[\lambda V_\lambda^* x].$$

Sur $A(K)$, la famille $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ vérifie un principe du maximum qu'on peut énoncer comme suit :

Pour tout $\lambda > 0$, tout $g \in A(K)$, tout $x \in K$ tel que $U_\lambda g(x) = \sup_K U_\lambda g$, on a $g(x) \geq 0$.

Plaçons-nous dans le cas où $V_\lambda(L^1(\sigma))$ est dense dans $L^1(\sigma)$, et prenons

$$K_1 = \{f \in L_+^1(\sigma) \mid 0 \leq f \leq 1\},$$

$$K_2 = \{f \in L_+^1(\sigma) \mid \int f^2 d\sigma \leq 1\}.$$

Le principe du maximum énoncé ci-dessous donne alors, respectivement

$$\int_{\{V_\lambda g > 0\}} g d\sigma \geq 0 \text{ pour tout } \lambda \geq 0, \text{ toute } g \in L^1(\sigma)$$

et

$$\int g \cdot (V_\lambda g)^+ d\sigma \geq 0 \text{ pour tout } \lambda > 0, g \in L^2(\sigma),$$

inégalité qui s'apparente à celle de l'énergie.

On obtiendrait d'autres inégalités du même type en prenant les boules unités (ou leurs parties positives) des espaces $L^p(\sigma)$ pour $1 < p \leq +\infty$.

Supposons maintenant que la tribu \mathcal{B} soit la moins fine rendant mesurables les fonctions de la forme $V_\lambda f$, où f est une fonction numérique \mathcal{B} -mesurable bornée sur X .

On peut prendre pour mesure excessive σ toutes les mesures de la forme $\varepsilon_x V_0$, pour $x \in X$.

On obtiendrait aussi, pour f \mathcal{B} -mesurable bornée sur X ,

$$\int f \cdot V_\lambda f \, d(\varepsilon_x V) \geq 0, \text{ pour tout } \lambda \geq 0,$$

en utilisant l'exemple K_2 et, en faisant varier x dans X , on obtient l'inégalité fonctionnelle

$$V_\lambda[f \cdot V_\lambda f] \geq 0 \text{ pour tout } \lambda \geq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HIRSCH (F.). - Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 22, 1972, fasc. 1, p. 89-210 (Thèse Sc. math. Orsay, 1971).
- [2] MEYER (P. A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966, (Act. scient. et ind. 1318 ; Publ. Inst. Math. Strasbourg, 14).

(Texte reçu le 8 septembre 1973)

Gabriel MOKOBODZKI
12 rue de la Chaise
75007 PARIS
