

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

DANIÈLE DEHEN

Propriété des processus de Hunt en rapport avec la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. n° 18, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A2_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ DES PROCESSUS DE HUNT
 EN RAPPORT AVEC LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Danièle DEHEN

Cet exposé développe, dans le cours de H. BAUER [1], la partie probabiliste, et démontre l'égalité, pour une fonction u hyperharmonique positive, de sa balayée et de $P_A u$, P_A étant la mesure harmonique.

1. Définitions et propriétés générales.

On considère deux espaces mesurables (Ω, \mathfrak{F}) et (E, \mathfrak{B}) .

Définition 1.1. - On dira que $(\Omega, \mathfrak{F}(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (P^x)_{x \in E})$ est un processus de Markov faible si :

- (a) Pour tout x de E , P^x est une probabilité sur \mathfrak{F} vérifiant $P^x\{X_0=x\}=1$;
- (b) L'application $x \mapsto P^x(A)$ est \mathfrak{B} -mesurable pour tout A de \mathfrak{F} ;
- (c) $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathfrak{F} telle que, pour tout t , X_t soit \mathfrak{F}_t - \mathfrak{B} -mesurable, et telle que, si $x \in E$, $B \in \mathfrak{B}$:

$$P^x(X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t) = P^{X_t}(X_s \in B) .$$

[Ce qui signifie, en notant $\varphi_s(x) = P^x(X_s \in B)$, que pour tout $A \in \mathfrak{F}_t$:

$$\int_A \varphi_s \circ X_t(\omega) dP^x = P^x(\{X_{s+t} \in B\} \cap A) .]$$

Le processus de Markov est dit homogène par rapport au temps si, pour tout t de \mathbb{R}^+ , il existe une application θ_t de Ω dans Ω telle que $X_t \circ \theta_h = X_{t+h}$.

On notera $\sigma(u)$ la tribu engendrée par les ensembles $X_t^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{B}$, $t \leq u$.

Processus de Markov avec adjonction d'un point δ . - On adjoint à E un point δ , on note $E_\delta = E \cup \{\delta\}$, \mathfrak{B}_δ la tribu engendrée par \mathfrak{B} et $\{\delta\}$, et on impose les conditions suivantes :

- (α) $(X_t(\omega) = \delta) \Rightarrow (\forall s \geq t, X_s(\omega) = \delta)$;
- (β) $\forall \omega \in \Omega, X_\infty(\omega) = \delta$;
- (γ) $\exists \omega_\delta \in \Omega, X_0(\omega_\delta) = \delta$;
- (a') Propriété (a) pour tout x de E_δ ;

(b') L'application $x \mapsto P^x(X_t \in B)$ de E dans $[0, 1]$ est \mathcal{B} -mesurable pour tout B dans \mathcal{B} , elle sera notée $N_t(\cdot, B)$;

(c') Propriété (c) pour tout x de E_δ et B de \mathcal{B}_δ .

Définition 1.2. - Une application T de Ω dans \mathbb{R}^+ est un temps d'arrêt par rapport à la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, si, pour tout $t \geq 0$,

$$\{\omega : T(\omega) \leq t\} \text{ appartient à } \mathcal{F}_t.$$

Propriétés. - Si la famille de tribus (\mathcal{F}_t) est continue à droite, T est un temps d'arrêt si, et seulement si, $\{\omega : T(\omega) < t\}$ appartient à \mathcal{F}_t pour tout t de \mathbb{R}^+ .

Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt par rapport à la famille (\mathcal{F}_t) , alors $\sup T_n$ est un temps d'arrêt, et si la famille (\mathcal{F}_t) est continue à droite, alors $\inf T_n$, $\limsup T_n$, $\liminf T_n$ sont des temps d'arrêt.

Définition 1.3. - Si T est un temps d'arrêt par rapport à la famille (\mathcal{F}_t) , la tribu \mathcal{F}_T est la tribu engendrée par les ensembles Λ de \mathcal{F} tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$\Lambda \cap \{T \leq t\} \text{ appartient à } \mathcal{F}_t.$$

PROPOSITION 1.4. - Si le processus de Markov est progressivement mesurable (c'est-à-dire, en notant \mathcal{R}_t l'ensemble des boréliens de $[0, t]$, et Φ_t l'application de $[0, t] \times \Omega$ dans E , $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$, l'application Φ_t est $(\mathcal{R}_t \times \mathcal{F}_t)$ - \mathcal{B} -mesurable), si T est un temps d'arrêt relatif aux tribus \mathcal{F}_t , alors X_T est \mathcal{F}_T - \mathcal{B} -mesurable (X_T désignant l'application $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$).

Démonstration. - Soit B appartenant à \mathcal{B} . $\{X_t(\omega) \in B\} \cap \{T \leq t\}$ appartient à \mathcal{F}_t pour tout t . En notant Ψ_t l'application de $\{T \leq t\}$ dans $[0, t] \times \Omega$, $\omega \mapsto (T(\omega), \omega)$, alors la restriction de X_T à l'ensemble $\{T \leq t\}$ est la composée $\Phi_t \circ \Psi_t$. Or Ψ_t est \mathcal{F}_t - $(\mathcal{R}_t \times \mathcal{F}_t)$ -mesurable, et la restriction de X_T à $\{T \leq t\}$ est \mathcal{F}_t - \mathcal{B} -mesurable.

Définition 1.5. - Un processus de Markov est appelé processus de Markov fort, si, pour tout temps d'arrêt T , pour toute fonction f bornée et \mathcal{B}_δ -mesurable, et en notant \mathcal{B}_δ^* la tribu des ensembles universellement mesurables de E_δ , on a les propriétés :

$$X_T \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-}\mathcal{B}_\delta^*\text{-mesurable,}$$

$$E^x\{f \circ X_{t+T} \mid \mathcal{F}_T\} = E^{X_T}\{f(X_t)\}.$$

Définition 1.6. - Un processus de Markov fort est appelé un processus de Hunt (resp. un processus standard) si :

1° E est localement compact, dénombrable à l'infini, δ étant un point isolé si E est compact, et E_δ étant le compactifié si E non compact.

\mathcal{B}_δ est la tribu des boréliens de E_δ .

2° En désignant par $\tilde{\mathcal{F}}_t$ la tribu complétée de \mathcal{F}_t dans la tribu \mathcal{F} , elle-même complétée de \mathcal{F} par rapport à la famille de mesures $\{P^x, x \in E_\delta\}$:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \tilde{\mathcal{F}}_t, \text{ pour tout } t.$$

3° Les fonctions $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues à droite sur $[0, \infty[$, et presque sûrement continues à gauche sur $[0, \infty[$ (resp. ont des limites à gauche presque sûrement sur $[0, \zeta[$, ζ désignant le temps de vie du processus).

4° Le processus est quasi continu à gauche, c'est-à-dire pour toute suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt pour la tribu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, ayant comme limite T, alors

$$X_{T_n} \rightarrow X_T \text{ sur } \{T < \infty\} \text{ p. s.}$$

Définition 1.7. - Si A est un sous-ensemble de E_δ , on définit :

le temps d'entrée dans A : $T_A(\omega) = \inf\{t > 0 ; X_t(\omega) \in A\}$,

le pseudo-temps d'entrée dans A : $D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 ; X_t(\omega) \in A\}$.

2. Topologie fine.

Loi du tout ou rien 2.1. - On considère un processus de Markov homogène, Λ un ensemble de la tribu $\sigma(0)$, alors $P^x(\Lambda) = 0$ ou $P^x(\Lambda) = 1$.

Démonstration. - $\theta_0^{-1} \Lambda = \Lambda$, et par suite :

$$P^x(\Lambda) = P^x(\Lambda \cap \theta_0^{-1} \Lambda) = E^x[P^X(\Lambda) \mid \Lambda] = [P^x(\Lambda)]^2.$$

COROLLAIRE 2.2. - Pour un processus de Hunt ou un processus standard, pour tout x de E, et tout A borélien ou presque borélien de E, on a

$$P^x(T_A = 0) = 0 \text{ ou } P^x(T_A = 0) = 1.$$

Définitions 2.3. - Un point x de E est dit régulier pour un ensemble presque borélien A si $P^x(T_A = 0) = 1$. Il est dit irrégulier pour A si $P^x(T_A = 0) = 0$; dans ce cas, on dit aussi que A est effilé en x. On notera :

$$A^r = \{x \in E, x \text{ régulier pour } A\},$$

$$A^i = \{x \in E, x \text{ irrégulier pour } A\}.$$

D'après 2.2, $A^r \cup A^i = E$. Les ensembles A^r et A^i sont universellement mesurables, lorsqu'on considère un espace de Hunt ou un espace standard.

Définitions 2.4. - Un point x est dit régulier (resp. irrégulier) pour un ensemble A , si A contient un ensemble C presque borélien (resp. si A est contenu dans une partie presque borélienne B) tel que

$$P^x(T_C = 0) = 1 \quad (\text{resp. } P^x(T_B = 0) = 0).$$

Une partie A de E est finement ouverte si $X \setminus A$ est effilée en tout point de A .

La topologie fine est plus fine que la topologie de E puisqu'un ensemble est effilé en tout point qui ne lui est pas adhérent, ceci résultant de la continuité à droite des trajectoires.

On introduit ici des classes d'ensembles qui jouent le rôle d'ensembles exceptionnels.

Définitions 2.5. - Un ensemble A de \mathcal{B}^* est de potentiel nul si

$$U(x, A) = \int_0^\infty N_t^-(x, A) dt = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E.$$

Un ensemble $A \subset E$ est dit polaire s'il existe un ensemble D presque borélien contenant A tel que $P^x(T_D < \infty) = 0$, $\forall x \in E$.

Un ensemble A est dit effilé s'il est contenu dans un ensemble D presque borélien tel que $D^x = \emptyset$ ($\Leftrightarrow P^x(T_D = 0) = 0$, $\forall x$).

$A \subset E$ est dit semi-polaire s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles effilés.

Un ensemble polaire est effilé. Un ensemble effilé est semi-polaire. Une réunion dénombrable d'ensembles polaires (resp. semi-polaires) est polaire (resp. semi-polaire). Sauf cas particulier (mouvement brownien), un ensemble semi-polaire n'est pas polaire.

3. Propriété de temps d'arrêt et approximation des temps d'entrée.

Dans la suite, on se place sur un processus de Hunt à valeur dans (E, \mathcal{B}^*) , où \mathcal{B}^* désigne la tribu des ensembles boréliens.

On montrera que si A est un ensemble analytique de E_δ , alors D_A et T_A sont des temps d'arrêt.

LEMME 3.1. - Si G est ouvert dans E_δ , alors $D_G = T_G$, et ce sont des temps d'arrêt pour la famille $\sigma(t^+)$.

Démonstration. - Les trajectoires sont continues à droite, d'où :

$$\{D_G < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, t)} \{X_r \in G\} \in \sigma_t .$$

Notation. - Si $A \subset E$ et $t > 0$:

$$R_t(A) = \{\omega : X_s(\omega) \in A \text{ pour un } s \text{ vérifiant } 0 < s < t\} .$$

Si G est ouvert, $R_t(G) \in \sigma_t$.

LEMME 3.2. - Soit K compact de E , alors :

(a) $R_t(K) \in \zeta_t$, où ζ_t est la tribu complétée dans ζ , elle-même complétée de $\sigma(\omega)$ pour l'ensemble des mesures $\{P^x\}_{x \in E}$

(b) Si G_n est une suite décroissante d'ouverts de E telle que $G_n \supset \overline{G_{n+1}} \supset K$, et telle que $K = \bigcap G_n = \bigcap \overline{G_n}$, alors presque sûrement

$$D_{G_n} \nearrow D_K \text{ et } P^\mu(R_t(G_n)) \searrow P^\mu(R_t(K)) .$$

Démonstration. - Soit G_n une telle suite d'ouverts. D_{G_n} est une suite croissante de temps d'arrêt pour $\sigma(t^+)$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{G_n} = T$ est un temps d'arrêt pour $\sigma(t^+)$. Or d'après la quasi continuité à gauche

$$X(D_{G_n}) \rightarrow X(T) \text{ p. s.}$$

De plus, $X(D_{G_n}) \in \overline{G_n}$ sur $\{D_{G_n} < \infty\}$. Par suite,

$$X(T) \in \bigcap \overline{G_n} = K \text{ p. s. sur } \{T < \infty\} .$$

Par suite, $D_K < T$ p. s. sur $\{T < \infty\}$ et $D_{G_n} \nearrow D_K$.

Il en résulte que D_K est un (ζ_t) temps d'arrêt.

Il est immédiat, K étant fermé, que $\{D_K < t\} = R_t(K)$. Par suite, $R_t(K) \in \zeta_t$. De plus,

$$\{D_{G_n} \leq t\} \supset R_t(G_n) \supset R_t(K) = \{D_K \leq t\} ,$$

et par suite

$$P^\mu(R_t(G_n)) \searrow P^\mu(R_t(K)) .$$

LEMME 3.3. - Soit μ et t fixés , $\varphi(K) = P^\mu(R_t(K))$ est une capacité de G . CHOQUET sur les compacts de E .

(On rappelle que, par définition, une capacité de G CHOQUET est une application $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$, où \mathcal{K} est l'ensemble des compacts :

(i) Si A et $B \in \mathcal{K}$, $(A \subset B) \Rightarrow (\varphi(A) \leq \varphi(B))$;

(ii) Si $A \in \mathcal{K}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $G \supset A$ tel que, $\forall B \in \mathcal{K}$, $A \subset B \subset G$, $\varphi(B) - \varphi(A) < \varepsilon$.)

Démonstration.

$$R_t(A \cup B) - R_t(B) = \left\{ \omega : \begin{array}{l} X_s(\omega) \in A \cup B \text{ pour un } s \leq t \\ X_s(\omega) \notin B \text{ pour tout } s \leq t \end{array} \right\}$$

$$R_t(A \cup B) - R_t(B) \subset \left\{ \omega : \begin{array}{l} X_s(\omega) \in A \text{ pour un } s \leq t \\ X_s(\omega) \notin A \cap B \text{ pour tout } s \leq t \end{array} \right\} = R_t(A) - R_t(A \cap B)$$

Par suite :

$$\varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B) .$$

LEMME 3.4. - Pour tout borélien B , $R_t(B) \in \zeta_t$.

Démonstration (valable également pour B analytique). - Si G est ouvert

$$\varphi_*(G) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset G} \varphi(K) \leq P^\mu(R_t(G)) .$$

Soit (K_n) une suite croissante de compacts de réunion G , alors

$$R_t(K_n) \nearrow R_t(G) \text{ et } \varphi(K_n) \nearrow P^\mu(R_t(G)) ,$$

par suite, pour tout ouvert, $\varphi_*(G) = P^\mu(R_t(G))$.

Si B est un borélien ou un analytique, on sait, d'après un théorème de Gustave CHOQUET, que $\varphi(B) = \varphi_*(B)$; donc, pour tout n , il existe un compact K_n et un ouvert G_n , $K_n \subset B \subset G_n$, tels que

$$\varphi_*(G_n) - \varphi(K_n) = P^\mu[R_t(G_n)] - P^\mu[R_t(K_n)] < \frac{1}{n} .$$

On note $H_1 = \bigcup_n R_t(K_n)$, $H_2 = \bigcap_n R_t(G_n)$, ce sont deux ensembles de la tribu ζ_t qui vérifient $H_1 \subset R_t(B) \subset H_2$ et

$$P^\mu(H_2 \setminus H_1) \leq P^\mu[R_t(G_n) \setminus R_t(K_n)] < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Par suite $P^\mu(H_2 \setminus H_1) = 0$. Comme la tribu ζ_t est complète, il en résulte que $R_t(B)$ appartient à ζ_t .

THÉORÈME 3.5. - Pour tout ensemble A , borélien ou analytique, de E_δ , les applications D_A et T_A sont des ζ_t -temps d'arrêt.

Démonstration. - Il suffit de montrer que, pour tout t , $\{\omega : D_A(\omega) < t\}$ appartient à ζ_t , or :

$$\{\omega : D_A(\omega) < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R_{t-(1/n)}(A)$$

appartient à ζ_t .

THÉOREME 3.6. - Si B est un borélien de E, alors, pour toute mesure μ , il existe une suite croissante de compacts (K_n) contenus dans B et une suite décroissante $\{G_n\}$ d'ouverts contenant B, telles que $D_{K_n} \searrow D_B$ P^μ -presque-sûrement sur Ω , et $D_{G_n} \nearrow D_B$ P^μ -presque-sûrement sur l'ensemble $\{D_B < \infty\}$.

De même, il existe une suite croissante de compacts de B, $\{K_n\}$ telle que $T_{K_n} \searrow T_B$ P^μ -presque-sûrement. La démonstration n'est pas donnée ici ([3], p. 130 et 132).

Dans le cas général, l'approximation par des ouverts G_n contenant B n'est pas possible pour le temps d'arrêt T. Par exemple, soit $\Omega = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$; on prend $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_t$ égale à la tribu des boréliens de Ω , P^x la masse de Dirac au point x et, pour $t < \infty$, $\omega \in \mathbb{R}$: $X_t(\omega) = \omega + t$. Si $B = \{0\}$, alors $P^0(T_B < \infty) = 0$, et si G est un ouvert contenant $\{0\}$, alors $P^0(T_G = 0) = 1$.

THÉOREME 3.7. - On peut obtenir un résultat analogue pour les temps d'entrée T_A par une approximation à l'aide de presque-boréliens contenant A, à condition que les mesures μ ne chargent pas le sous-ensemble des points réguliers de A.

Ce résultat sera admis dans la suite ([3], p. 141).

4. Lien avec les balayées.

Définitions et notations. - Si A est un ensemble presque-borélien, on désigne par P_A le noyau défini; et si f est une fonction universellement mesurable positive par

$$P_A f(x) = E^x \{f \circ X_{T_A} 1_{T_A < \infty}\}.$$

La mesure $P_A(x dy)$ est la mesure harmonique de A en x. Une fonction f est excessive par rapport aux noyaux $(N_t)_{t \geq 0}$ si $N_t f \leq f$, $\forall t > 0$, et si

$$\lim_{t \rightarrow 0} N_t f = f.$$

LEMME 4.1. - Soit X un processus de Hunt tel que

$$U(x, K) = \int_0^\infty N_t(x, K) dt$$

soit borné en x pour tout compact K de E. Si f est une fonction excessive, alors il existe une suite (g_n) de fonctions bornées positives et universellement mesurables telles que (Ug_n) croisse vers f et telle que Ug_n soit bornée pour tout n.

Démonstration. - Soit K_n une suite croissante de compacts de réunion égale à E . On pose $h_n = n 1_{K_n}$, alors $Uh_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et Uh_n est bornée pour tout n .

Si f est excessive, $f_n = \inf(f, Uh_n)$ est une fonction excessive bornée telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t f_n = 0$. On note alors

$$g_{n,t} = \frac{1}{t}(f_n - N_t f_n).$$

Pour tout n , $Ug_{n,t}$ croît vers f_n quand $t \rightarrow 0$.

THÉOREME 4.2. - Soit f une fonction excessive ; si T est un temps d'arrêt, alors $N_T f \leq f$, et si A est un ensemble presque borélien, $P_A f$ est excessive.

En utilisant le lemme 4.1, on peut ne faire la démonstration que pour une fonction f de la forme Ug , où g est universellement mesurable bornée et positive.

On montre alors que

$$N_t N_T Ug(x) = E^x \int_{t+T \circ \theta_t}^{\infty} g(X_s) ds.$$

Si A est un ensemble presque borélien,

$$t + T_A \circ \theta_t \searrow T_A \text{ quand } t \rightarrow 0$$

et donc

$$P_t P_A Ug \rightarrow P_A Ug.$$

LEMME 4.3. - Si f est une fonction excessive et presque borélienne, partout finie, si T est un temps d'arrêt (on l'admettra), défini par

$$T(\omega) = \inf\{t \mid |f(X(\omega)) - f(X_t(\omega))| > \varepsilon\},$$

alors, sur $T < \infty$,

$$|f(X_0) - f(X_T)| \geq \varepsilon \text{ p. s.}$$

On va montrer d'abord que si A est un ensemble presque borélien, et si $x \in A^r$, alors

$$\inf\{f(y), y \in A\} \leq f(x) \leq \sup\{f(y), y \in A\}.$$

Si K est un compact de A ,

$$f(x) \geq P_K f(x) \geq \inf\{f(y), y \in A\} \times E^x\{1_{T_K} < \infty\},$$

et on peut choisir K tel que $E^x\{T_K < \infty\} = 1$.

Pour l'autre inégalité, on se place à nouveau dans le cas $f = Ug$, où g est

universellement mesurable positive et bornée.

$$Ug(x) \leq E^x \int_0^{T_K} g(X_t) dt + \sup\{Ug(y) , y \in A\} .$$

Or il existe une suite de compacts K_n de A tels que $P^x(T_{K_n} \rightarrow 0) = 1$, et comme $E^x \int_0^\infty g(X_t) dt < \infty$, il en résulte l'inégalité.

Soit alors x un point de B

$$B = \{y : f(y) > f(x) + \varepsilon\} \cup \{y : f(y) < f(x) - \varepsilon\} .$$

On a :

$$P^x(T = T_B) = 1 ,$$

mais x n'appartient pas à B^r .

De plus, $X(T_B)$ appartient à $B \cup B^r$ p. s. sur $\{T_B < \infty\}$, ce qui implique que $B \cup B^r$ est contenu dans

$$\{y : f(y) \geq f(x) + \varepsilon\} \cup \{y : f(y) \leq f(x) - \varepsilon\} .$$

THÉOREME 4.4. - Si f est une fonction excessive et presque borélienne, alors p. s., $t \mapsto f(X_t)$ est continue à droite et a une limite à gauche sur $[0, \infty[$.

La démonstration est faite pour une fonction f excessive presque borélienne et bornée (sinon, on multiplie par $q(x) = 1 - e^{-x}$, $q(\infty) = 1$). On se donne $\varepsilon > 0$, et on définit

$$T_0 = 0 , \quad T_n = T_{n-1} + T \cdot \theta_{T_{n-1}} .$$

Si x appartient à E , et Λ à ζ_{T_n} ,

$$\begin{aligned} E^x(f(X_{T_{n+1}}) : \Lambda) &= E^x\{P_T f(X_{T_n}) : \Lambda\} \\ &\leq E^x\{f(X_{T_n}) : \Lambda\} \end{aligned}$$

Ceci signifie que $f(X_{T_n})$ est une surmartingale qui, de plus, vérifie

$$\sup_n E^x(f(X_{T_n})) < \infty ,$$

il en résulte que $f(X_{T_n})$ admet une limite quand $n \rightarrow \infty$ qui est presque-sûrement finie. D'après le lemme,

$$|f(X_{T_n}) - f(X_{T_{n+1}})| \geq \varepsilon \quad \text{p. s. sur } \{T_{n+1} < \infty\}$$

$$P^x(\lim T_n = \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \lim T_n = \infty \quad \text{p. s.}$$

Il en résulte que $t \mapsto f(X_t(\omega))$ est continue à droite, et admet une limite à gauche.

THÉOREME 4.5. - Toute fonction excessive est presque borélienne.

La démonstration est faite dans [2], p. 76, pour les fonctions α -presque-excessives.

THÉOREME 4.6. - Soient f et g deux fonctions excessives, A un ensemble presque borélien. Si g majore f sur A , g majore $P_A f$ partout.

Démonstration. - On a $g \circ X_{T_A}(\omega) \geq f \circ X_{T_A}(\omega)$ pour $\omega \in \{T_A < \infty\}$, puisque les fonctions excessives f et g^A sont continuées à droite sur les trajectoires. Le processus $e^{-pt} g \circ X_t$ est une surmartingale, et on peut lui appliquer le théorème d'arrêt de Doob :

$$\begin{aligned} g(x) = E^x[g \circ X_0] &\geq E^x[e^{-pT_A} g \circ X_{T_A} \cdot 1_{T_A < \infty}] \geq E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} \cdot 1_{T_A < \infty}] \\ &= P_A^p f(x) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_A^p f = P_A f .$$

THÉOREME 4.7. - Soient f une fonction excessive, et A un ensemble presque borélien. La réduite $P_A f$ est excessive, et majorée par f . De plus, $f(x) = P_A f(x)$ en tout point régulier de A .

Démonstration. - En notant $P_A^p f(x) = E^x\{f \circ X_{T_A} \cdot 1_{T_A < \infty}\}$,

$$N_t(P_A^p f(x)) = N_t[E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} \cdot 1_{T_A < \infty}]] .$$

Or,

$$N_t(P_A^p f(x)) = E^x[e^{-pT_A} f \circ X_{T_A} \circ \theta_t \cdot 1_{T_A \circ \theta_t < \infty}] .$$

On pose $S_t = T_A \circ \theta_t + t$, on montre que

$$f \circ X_{T_A} \circ \theta_t(\omega) = f \circ X_{S_t}(\omega) .$$

De plus, S_t est un temps d'arrêt qui décroît vers T_A quand $t \rightarrow 0$. En utilisant à nouveau le théorème d'arrêt de Doob,

$$N_t(P_A f(x)) \leq E^x[f \circ X_{T_A} \cdot 1_{T_A < \infty}] = P_A f(x) .$$

D'autre part, quand t tend vers 0, d'après le lemme de Fatou et la continuité à droite sur les trajectoires,

$$P_A f(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \inf N_t(P_A f(x)) .$$

Par suite,

$$P_A f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} N_t(P_A f(x)) .$$

Donc $P_A f$ est N_t -excessive. L'inégalité $f(x) \geq P_A f$ est un cas particulier du théorème précédent. Si x est régulier pour A , alors $P^x[T_A = 0] = 1$, donc

$$E^x[f \circ X_{T_A} 1_{T_A < \infty}] = f(x) .$$

THÉOREME 4.8 (HUNT). - Soient A un ensemble presque borélien et f une fonction excessive. L'enveloppe inférieure de l'ensemble des fonctions excessives qui majore f sur A est égale à $P_A f$, sauf éventuellement sur $A \cap A^i$, à condition que E soit réunion d'une suite croissante d'ensembles E_n mesurables, dont les potentiels sont bornés.

Démonstration. - On va montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g excessive, majorant f sur A , et

$$g(x) \leq P_A f(x) + \varepsilon .$$

La démonstration sera faite dans le cas où $A \subset E$, et où f est majoré sur A par un potentiel de fonction $\varphi = U_h$ borné sur E' .

LEMME 4.9 (voir MEYER [3], p. 141). - Si A est un ensemble presque borélien, μ une loi qui ne charge pas $A \setminus (A^*)$, il existe une suite H_n de presque boréliens contenant A tels que :

- 1° Tout point de H_n est régulier pour H_n ;
- 2° $T_{H_n}(\omega) = T_A(\omega)$, sauf pour un nombre fini de n , cette égalité étant vraie P^μ -p.-s. sur $\{T_A < \infty\}$.

On considère ces ensembles H_n relatifs à la mesure ε_x . On pose

$$G_n = H_n \cap \{f < \varphi + \varepsilon\} .$$

$A \subset G_n$, et tout point de A est régulier pour G_n . De plus, $T_{G_n} = T_A$ pour $n \notin \{0, k\}$. Par suite,

$$f \circ X_{T_{G_n}} \leq \varphi \circ X_{T_{G_n}} + \varepsilon \text{ sur } \{T_{G_n} < +\infty\} .$$

On a donc, puisque f est continue à droite sur les trajectoires,

$$\lim_n E^x[f \circ X_{T_{G_n}} 1_{T_A < \infty}] = E^x[f \circ X_{T_A} 1_{T_A < \infty}] .$$

D'autre part, φ étant bornée,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E^x(\varphi \circ X_t) = 0 ,$$

donc $\varphi \circ X_t \rightarrow 0$ p. s. quand $t \rightarrow \infty$ (c'est une propriété d'un potentiel de fonction). Par suite,

$$\limsup E^X(f \circ X_{T_{G_n}} 1_{G_n}^{\sim}) \leq E^X(f \circ X_{T_A} 1_A^{\sim}) + \varepsilon$$

ce qui s'écrit encore

$$\limsup P_{G_n} f(x) \leq P_A f(x) + \varepsilon .$$

THÉORÈME 4.10. - Pour tout ensemble presque borélien $A \subset X$, et toute fonction hyperharmonique $u \geq 0$ sur X ,

$$P_A u = \hat{R}_u^A .$$

Démonstration. - On a démontré, en théorie du potentiel, que les fonctions excessives et les hyperharmoniques positives coïncident. On a montré que $P_A u$ est excessive si u est excessive, et vérifie :

$$P_A u \leq R_u^A, \text{ donc } P_A u \leq \hat{R}_u^A \leq R_u^A .$$

De plus, si $x \in A^r$, $P_A u(x) = u(x) = \hat{R}_u^A(x)$, et on utilise le théorème de théorie du potentiel qui donne l'égalité

$$\hat{R}_u^A(x) = R_u^A(x) \text{ si } x \in C_A .$$

Par suite, $P_A u = \hat{R}_u^A$ sur $A^r \cup C_A = C(A \cap A^i)$, et cet ensemble est finement dense dans E .

Ces deux fonctions (excessives ou hyperharmoniques) sont donc finement continues sur E , et sont donc égales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (Heinz). - Harmonic spaces and associated Markov processes, Centro internazionale matematico estivo, 1° ciclo : Potential theory [1969. Stresa], p. 23-67. - Roma, Cremonese, 1970.
- [2] BLUMENTHAL (R. M.) and GETTOOR (R. K.). - Markov processes and potential theory. - London, Academic Press, 1968 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 29).
- [3] MEYER (Paul-André). - Processus de Markov. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 26).

(Texte reçu le 3 juillet 1973)

Danièle DEHEN
70 rue Monge
75005 PARIS