GEORGES LION

Théorème de représentation d'un noyau par l'intégrale d'un semi-groupe

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 1 (1961-1962), exp. nº 3, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_1_A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 3
1er mars 1962

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION D'UN NOYAU PAR L'INTÉGRALE D'UN SEMI-GROUPE

par Georges LION

Le théorème de Hunt (voir [4]) permet d'associer à un noyau positif, satisfaisant au principe complet du maximum et d'image partout dense, un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens.

Nous allons démontrer un résultat analogue avec des hypothèses un peu plus générales.

Dans une première étape nous construirons des résolvantes d'une manière un peu différente de celle de HUNT en utilisant systématiquement l'équation résolvante.

La deuxième étape nous verra donner une forme du théorème de Hille-Yosida adaptée au cadre de cet exposé.

Nous suivrons ensuite RAY (voir [6]) pour déterminer le semi-groupe.

La représentation du noyau nous permettra de déduire, a posteriori, quelques propriétés analogues à celles qui sont exposées dans [1] et [2].

1. Résolvante associée à un noyau.

Soient

X un espace localement compact dénombrable à l'infini,

C_K l'espace vectoriel des fonctions numériques continues nulles hors d'un compact,

C_0 l'espace vectoriel des fonctions numériques continues tendant vers 0 à l'infini et normé par $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

V désignera une application linéaire de C_K dans C_0 telle que

1. V satisfait au principe du maximum positif faible, c'est-à-dire : si $a = \sup Vg$ est strictement positif, il existe au moins un point x de X tel que $Vg(x) = a$ et $g(x) \geqslant 0$.

2. V est positif, c'est-à-dire si f est positif, Vf l'est aussi.

Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit V un noyau vérifiant les conditions 1 et 2. Alors il existe une famille $(V^\lambda)_{\lambda>0}$ d'opérateurs linéaires positifs de C_0 dans C_0 tels que

1. $\|\lambda V^\lambda\| \leq 1$
2. quels que soient λ et $\mu > 0$, $(\mu - \lambda) V^\lambda V^\mu = V^\lambda - V^\mu$ (équation résolvante)
3. $Vf = V^\lambda(Vf + f)$, $f \in C_K$.

Démonstration.

a. Si V est prolongeable à C_0 tout entier avec la norme $\|V\|$, on pose

$$V^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k V^{k+1} \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|} \quad .$$

On vérifie immédiatement, à l'aide du principe du maximum positif faible, les quatre conséquences.

1. $V^\lambda = V(I - \lambda V^\lambda) = (I - \lambda V^\lambda) V$,
2. $\|\lambda V^\lambda\| \leq 1$,
3. V^λ vérifie l'équation résolvante,
4. V^λ satisfait au principe du maximum positif faible.

On vérifie ensuite que les opérateurs $W^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k V^{k+1}$ prolongent les opérateurs V^λ à l'intervalle $]0 , 2\mu[$ et vérifient 1, 2, 3, 4.

On arrive ainsi de proche en proche à $\lambda > 0$.

b. Si V n'est pas prolongeable à C_0 , on approche V par des noyaux V_n prolongeables. A chacun est associée une famille d'opérateurs V_n^λ vérifiant les conclusions du théorème 1. Lorsque n augmente indéfiniment, V_n^λ tend vers un opérateur V^λ dont on peut montrer qu'il détermine une famille associée à V par les conclusions 1, 2, 3. (Pour plus de détails voir [5] en adaptant la démonstration à l'hypothèse plus large du principe du maximum positif faible.)

Remarque. - La méthode exposée ici ne nécessite aucune hypothèse sur l'image de V ; c'est là un léger progrès sur la méthode de HUNT. De plus elle n'utilise pas le principe du maximum positif (HUNT-HERZ [4]).

2. Résolvantes et semi-groupes.

THÉORÈME 2 (HILLE-YOSIDA). - Soient B un espace de Banach réel, $(V^{\lambda})_{\lambda>0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de B dans B tels que

1. $\|\lambda V^{\lambda}\| \leq 1$

2. quels que soient λ et $\mu > 0$, $(\mu - \lambda) V^{\lambda} V^{\mu} = V^{\lambda} - V^{\mu}$,

alors il existe sur $\overline{V(B)}$ (adhérence de l'image de B par un V^{λ} quelconque) un semi-groupe $(K_t)_{t\geq 0}$ fortement continu d'opérateurs sous-markoviens tels que

$$\text{pour tout } x \text{ de } \overline{V(B)}, \quad V^{\lambda} x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} K_t\, x\, dt \quad .$$

Démonstration résumée. - Posant $B_{\nu} = \nu(\nu V^{\nu} - I)$, on peut définir

$$K_t V^{\lambda} V^{\mu}(x) = \lim_{\nu\to\infty} e^{tB_{\nu}} V^{\lambda} V^{\mu} x$$

l'existence de cette limite tient aux conditions 1 et 2 du théorème. On prolonge K_t à $\overline{V(B)}$. Le semi-groupe étant ainsi construit, il reste à vérifier la formule intégrale.

Si $y = V^{\nu} V^{\nu'} x$ et $z = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} K_t\, y\, dt$, on a

$$V^{\lambda} y = \lambda V^{\lambda} z - \left[\frac{d}{dt} K_t V^{\lambda} z\right]_{t=0}$$

mais la définition de K_t donne aussitôt

$$\left[\frac{d}{dt} K_t V^{\lambda} z\right]_{t=0} = \lambda V^{\lambda} z - z \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Si B est ordonné par un cône d'éléments positifs et si les V^{λ} sont positifs, les K_t le sont aussi.

3. Semi-groupe associé à un noyau.

Nous allons étendre, sous certaines hypothèses, le semi-groupe K_t à C_0 tout entier.

THÉORÈME 3. - Soit V un noyau positif, satisfaisant au principe du maximum positif faible, et tel que son image sépare les points de X.

Alors il existe un semi-groupe sous-markovien P_t, défini sur l'espace des fonctions boréliennes bornées sur X, et tel que

$$\text{pour toute } f \text{ de } C_K \text{ et tout } x \text{ de } X, \quad Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt \quad .$$

De plus un tel semi-groupe est continu hors de l'origine.

Définissons d'abord les fonctions excessives par rapport à la résolvante (V^λ).

On dit qu'une fonction f de C_0 appartient à E_λ si elle est positive et si l'inégalité $kV^{k+\lambda} f \leq f$ est vérifiée pour tout $k \geq 0$.

Si $\mu \geq \lambda$, $E_\mu \supset E_\lambda$, si f et g appartiennent à E_λ, $\inf(f, g)$ appartient à E_λ.

Posons $E = \bigcup_{\lambda > 0} E_\lambda$. De même si f et g appartiennent à E, $\inf(f, g)$ aussi. Soit D le sous-espace de C_0 formé des différences de fonctions de E ; alors D contient $V^\lambda(C_0)$ (utiliser l'équation résolvante), et D est réticulé (si $f = f_1 - f_2 \in D$, alors $f^+ = f_1 - \inf(f_1, f_2) \in D$ et $\sup(f, g) = (f - g)^+ + g \in D$).

Si $V(C_K)$ sépare les points, D fait de même ; en effet la relation $Vf = V^\lambda(Vf + f)$ entraîne les inclusions $V(C_K) \subset V^\lambda(C_0) \subset D$.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass D est dense dans C_0.

La méthode de RAY [6] va nous permettre de prolonger le semi-K_t.

Soit f dans E_λ et $k' \geq k$

$$k' V^{k'+\lambda} f - kV^{k+\lambda} f = (k' - k)\, V^{k+\lambda}[f - kV^{k+\lambda} f] \geq 0$$

donc $kV^{k+\lambda} f$ tend en croissant vers une fonction $\hat{f}$ (non nécessairement continue) si k tend vers l'infini.

D'après l'équation résolvante, $kV^k f$ tend aussi vers $\hat{f}$.

D est partout dense dans C_0, $\|kV^k\|$ n'excède pas 1, donc pour toute f de C_0, $kV^k f$ tend (simplement) vers une limite $\acute{f}$.

Dans le cas où f appartient à $\overline{V(C_K)}$, on sait que $kV^k f$ tend vers f (uniformément), donc $K_t f = \lim_k K_t kV^k f$.

Pour prolonger K_t à C_0 tout entier nous allons montrer que, pour toute f de C_0, $K_t kV^k f$ a une limite lorsque k tend vers l'infini.

L'application $f \to K_t f(x)$ est une forme linéaire positive définie sur $\overline{V(C_K)}$ et de norme inférieure à 1. Elle se prolonge donc en une mesure positive sur C_0, d'après le théorème de Hahn-Banach. Soit $\mu_{t,x}$ cette mesure alors $K_t kV^k f(x) = \mu_{tx}(kV^k f)$ tend vers $\mu_{tx}(\hat{f})$ lorsque k tend vers l'infini.
Posons

$$P_t f(x) = \lim_{k\uparrow\infty} K_t(kV^k f)(x) \quad .$$

La forme linéaire $f \to P_t f(x)$ est une mesure positive sur X de masse ≤ 1. Elle se prolonge donc aux fonctions boréliennes bornées, et $P_t f$ est borélienne sur X.

$$V^\lambda f(x) = \lim_{k\uparrow\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t kV^k f(x)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt \qquad f \in C_0$$

si f est positive à support compact.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt = V^\lambda f(x) = Vf(x) - \lambda V^\lambda Vf(x)$$

donc

$$\int_0^\infty P_t f(x)\, dt \leq Vf(x)$$

et $\lambda V^\lambda f(x) \leq \lambda Vf(x)$ tend vers 0 si λ tend vers 0. Ce dernier résultat reste vrai dans C_0, donc $\lambda V^\lambda Vf(x)$ tend vers 0, et $V^\lambda f$ tend vers Vf donc

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt \quad .$$

Montrons maintenant que les $(P_t)_{t\geq 0}$ forment un semi-groupe ; prenons $f \in C_0$,

$$P_{t'} P_t f(x) = P_{t'} \lim_k P_t kV^k f(x) = \lim_k P_{t'} P_t kV^k f(x) = \lim_k P_{t+t'} kV^k f(x)$$
$$= P_{t+t'} f(x)$$

cette égalité étant vraie dans C_0 est encore vraie pour toute fonction f borélienne bornée.

On peut alors appliquer un résultat général de la théorie des semi-groupes pour dire que le semi-groupe P_t est continu sauf à l'origine, voir [3], page 616

Le théorème est donc démontré ; nous allons maintenant étudier quelques conséquences.

PROPOSITION 1. - Lorsque t tend vers 0, $P_t f$ tend (simplement) vers $\hat{f}$.

Démonstration. - Si f est λ-excessive,

$$f \geqslant kV^{k+\lambda} f = k(V^{\lambda} f - kV^{k+\lambda} V^{\lambda} f) = V^{\lambda} g$$

avec $g \geqslant 0$ et

$$e^{-\lambda t} P_t V^{\lambda} g = \int_t^{\infty} e^{-\lambda u} P_u \, g du \leqslant V^{\lambda} g$$

donc

$$e^{-\lambda t} P_t f \leqslant f$$

il s'ensuit que $e^{-\lambda t} P_t f(x)$ est décroissante en t, et $P_t f(x)$ a une limite si $t \to 0$. Cette conclusion s'étend à D donc à C_0.

Reprenons f λ-excessive

$$e^{-\lambda t} P_t kV^{k+\lambda} f \leqslant kV^{k+\lambda} f \leqslant \hat{f}$$

$$P_t kV^{k+\lambda} f \leqslant e^{\lambda t} \hat{f}$$

$$P_t f \leqslant e^{\lambda t} \hat{f}$$

et

$$\lim_{t \to 0} P_t f \leqslant \hat{f}$$

et

$$\lim_{t\to 0} P_t\, f \geq \lim_{t\to 0} P_t\, kV^{k+\lambda}\, f = kV^{k+\lambda}\, f \text{ pour tout } k$$

donc

$$\lim_{t\to 0} P_t\, f \geq \hat{f} \quad .$$

Ainsi $P_t\, f$ tend vers $\hat{f}$ pour f excessive et de même pour f quelconque dans C_0 .

PROPOSITION 2. - Supposons que X soit à base dénombrable. Il existe alors un ensemble A , hors duquel, pour toute f de C_0 , $\hat{f} = f$, et tel que, pour tout x et tout t , $P_t(x , A) = 0$.

En effet X qui est métrisable peut être plongé dans le cube compact $[0 , 1]^N$ Toute fonction de C_0 se prolonge alors au cube et peut être approchée uniformément par une suite de polynômes.

Soit (f_n) la famille dénombrable partout dense dans C_0 .

D'autre part, si f est excessive

$$P_t\, f(x) = \lim_k P_t\, kV^{k+\lambda}\, f(x) = P_t\, \hat{f}(x)$$

et $f \geq \hat{f}$, donc

$$0 = \int (f(y) - \hat{f}(y))\, P_t(x , dy) = \int |f(y) - \hat{f}(y)|\, P_t(x , dy)$$

un tel résultat se prolonge à C_0 tout entier.

Soit donc A_n l'ensemble des points y où $f_n(y) \neq \hat{f}_n(y)$ l'égalité

$$\int |f_n(y) - \hat{f}_n(y)|\, P_t(x , dy) = 0$$

entraîne

$$P_t(x , A_n) = 0 \quad .$$

Posons

$$A = \bigcup_n A_n \quad .$$

Hors de A le fait que les f_n soient partout denses dans C_0 entraîne que

$$f = \hat{f} \text{ pour toute } f \text{ de } C_0$$

et enfin

$$P_t(x , A) = 0 \quad .$$

Énonçons enfin un résultat réciproque fort important.

THÉORÈME 4. - Soit V un noyau positif satisfaisant au principe du maximum positif faible et séparant les points, alors

1. il satisfait au principe complet du maximum
2. il est l'intégrale d'un semi-groupe P_t déterminé de manière unique.

On pourra se reporter pour la démonstration de ce théorème au Séminaire de Théorie du Potentiel, 1960/61 [1] et [2], où l'on considère un semi-groupe fortement continu.

En fait nous n'aurons besoin que d'un lemme supplémentaire.

LEMME. - Soient K un compact de X, et V un noyau séparant les points. Il existe alors dans C_K^+ une fonction f telle que Vf soit supérieure à 1 sur K.

Soit x un point de K. V séparant les points, il existe dans C_K une fonction f_x (que l'on pourra supposer positive) telle que $Vf_x(x)$ soit supérieure à 2. Vf_x étant continue, il existe un voisinage W_x de x où $Vf_x(y)$ est ≥ 1. Recouvrons K par les voisinages W_x, et extrayons un recouvrement fini W_{x_i}. Si $f = \sup(f_{x_1} \dots f_{x_n})$, $Vf(y) \geq 1$ en tout point y de K.

Le reste de la démonstration utilise les résolvantes et se trouve dans [1]. (Noyaux élémentaires.)

Le noyau V satisfait donc au principe complet du maximum, donc au principe de domination, et on démontre l'unicité du semi-groupe comme dans [1].

Remarque. - Dans l'espace à trois points (voir CHOQUET-DENY : Modèles finis en théorie du potentiel), on peut construire un noyau V qui satisfait aux hypothèses du théorème 3 et dont l'image n'est pas dense.

Il suffit de considérer le noyau V représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

On a alors

$$V^\lambda = \frac{V}{1 + \lambda} \quad \text{et} \quad P_t = e^{-t} V .$$

Cet exemple montre que les noyaux considérés dans cet article généralisent effectivement les noyaux de Hunt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY (Jacques). - Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 6, 9 pages.

[2] DENY (Jacques). - Éléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 8, 8 pages.

[3] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J.). - Linear operators, Part 1. - New York, London, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 7).

[4] HUNT (G. A.). - Markoff precesses and potentials, II., Illinois J. Math., t. 1, 1957, p. 316-369.

[5] LION (Georges). - Construction du semi-groupe associé à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 7, 9 pages.

[6] RAY (Daniel). - Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Annals of Math., t. 70, 1959, p. 43-72.