Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

JACQUES DENY

Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. n° 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A7_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 6

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Jacques DENY

1. Noyaux ; potentiels de fonctions et potentiels de mesures.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact E à base dénombrable.

NOTATIONS. - On appellera :

$\mathcal{B}$ la tribu borélienne (topologique) sur E ;

B_{loc} l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur tout compact de E ;

B_K l'ensemble des fonctions borélienne bornées à support compact ;

C l'ensemble des fonctions numériques continues sur E ;

C_0 l'ensemble des fonctions numériques continues tendant vers 0 à l'infini ;

C_K l'ensemble des fonctions numériques continues à support compact ;

M l'ensemble des mesures de Radon sur E ;

M_K l'ensemble des mesures de Radon à support compact.

On désignera par B^+_{loc} , ... les sous-ensembles des ensembles précédents constitués par des fonctions ou des mesures $\geqslant 0$.

DÉFINITIONS. - On appelle noyau sur E toute application V de $E \times \mathcal{B}$ dans $\underset{\sim}{R}^+$ telle que :

$\forall\ x \in E$, la fonction d'ensemble $e \to V(x , e)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$, notée V_x .

$\forall\ e \in \mathcal{B}$, relativement compact, la fonction, $x \to V(x , e)$ est dans B^+_{loc} .

On appelle potentiel de la fonction borélienne f la fonction Vf définie par

$$Vf(x) = \int f(y)\ V(x , dy) = \int f(y)\ dV_x(y)$$

pourvu que cette intégrale ait un sens pour tout x ; il en est ainsi dans deux cas importants :

1° $f \in B_K$, et alors $Vf \in B_{loc}$;

2° $f \geq 0$; alors $Vf(x)$ peut être égal à $+\infty$ pour certains points x .

Soit μ une mesure de Radon telle que l'intégrale

$$\mu V(e) = \int V(x , e)\, d\mu(x)$$

soit absolument convergente pour tout $e \in \mathcal{B}$ relativement compact (il en est ainsi pour toute $\mu \in M_K$) ; la fonction d'ensemble $e \to \mu V(e)$ définit une mesure de Radon μV , qu'on appelle <u>potentiel de la mesure</u> μ .

Quelle que soit $f \in B_K$ et $\mu \in M_K$, on a la relation

$$\langle \mu V , f \rangle = \langle \mu , Vf \rangle \tag{1}$$

où $\langle \nu , g \rangle$ désigne l'intégrale $\int g(x)\, d\nu(x)$; cette relation montre que l'application linéaire $f \to Vf$ est continue de B_K mis en dualité avec M , dans B_{loc} mis en dualité avec M_K ; les applications $f \to Vf$ et $\mu \to \mu V$ sont transposées l'une de l'autre. Noter que (1) s'étend au cas où μ est une mesure de Radon ≥ 0 telle que μV soit défini, et f une fonction borélienne ≥ 0 quelconque ; les deux membres peuvent alors être tous deux égaux à $+\infty$.

On dira que le noyau V est <u>strictement positif</u> si toutes les mesures V_x sont différentes de 0 .

On dira que le noyau V est <u>continu</u> s'il applique C_K dans C . Inversement soit T une application linéaire <u>positive</u> de C_K dans C (observer qu'une telle application est nécessairement continue pour les topologies faibles définies par les dualités entre C_K et M d'une part, C et M_K d'autre part) ; on peut lui associer le noyau V défini par $V(x , e) = T_x(e)$, où T_x est la mesure de Radon $f \to Tf(x)$.

On dira que le noyau continu V <u>tend vers</u> 0 <u>à l'infini</u> s'il applique C_K dans C_0 .

On dira que le noyau V est <u>uniforme</u> si la fonction $V1$ est bornée ou, ce qui revient au même, si les mesures V_x sont de masse totale uniformément bornées.

On dira que le noyau V est <u>sous-markovien</u> (resp. <u>markovien</u>) si $V1(x) \leq 1$ quelque soit x (resp. $V1(x) = 1$ quelque soit x), où si les V_x sont de masse totale ≤ 1 (resp. $= 1$).

EXEMPLES.

1° Soit G la fonction de Green d'un ouvert connexe D de R^3 ; on pose

$$V(x , e) = \int_e G(x , y)\, d\xi(y)$$

où ξ est la mesure de Lebesgue sur D ; alors si $f \in B_K$,

$$Vf(x) = \int G(x , y)\, f(y)\, d\xi(y) \quad ,$$

valeur en x du potentiel de Green (au sens usuel) engendré par f ; si $\mu \in M_K$, μV est la mesure dont la densité en y (définie presque partout et même quasi partout) est $\int G(x , y)\, d\mu(x)$, valeur en y du potentiel de Green engendré par μ . Ce noyau V est continu ; il tend vers 0 à l'infini si et seulement si D n'a pas de point-frontière irrégulier.

2° Soit N une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur un groupe abélien localement compact ; on pose $V(x , e) = \tau_x N(e)$ (τ_x = translation par x) ; alors si $f \in B_K$, $Vf(x) = \int f(t - x)\, dN(t)$; si $\mu \in M_K$, $\mu V = \mu * N$. On dit que N est un noyau de convolution ; un tel noyau est toujours continu ; il est uniforme si et seulement si N est de masse totale finie.

2. Principe de domination.

DÉFINITION. - On dit que le noyau V satisfait au principe de domination si, pour tout couple de fonctions f et g de C_K^+ la relation $Vf(x) \leqslant Vg(x)$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$ entraîne $Vf(x) \leqslant Vg(x)$ pour tout $x \in E$.

On peut montrer que si V satisfait au principe de domination, il en est de même de $V + I$ (I = noyau identique), et $V + I$ applique biunivoquement C_K dans B_{loc} . On aura besoin d'un résultat plus élaboré, mais concernant des noyaux plus particuliers :

LEMME. - Soit V un noyau continu strictement positif, satisfaisant au principe de domination ; soient f et g deux fonctions de C^+ telles que

$$Vf(x) + f(x) = Vg(x) + g(x) \quad , \quad \forall \ x \in E \quad ;$$

on a $f(x) = g(x)$ en tout point x tel que $Vf(x)$ et $Vg(x) \neq +\infty$.

DÉMONSTRATION. - On peut évidemment supposer $\inf(f(x) , g(x)) = 0$ pour tout $x \in E$. L'hypothèse entraîne alors $Vf(x) \leqslant Vg(x)$ pour tout x tel que $f(x) > 0$.

Tout revient à montrer que cette relation a lieu pour tout $x \in E$ (car on aura, par raison de symétrie, $Vf(x) = Vg(x)$ pour tout x, d'où le résultat).

Si f et $g \in C_K^+$, il s'agit de l'énoncé du principe de domination.

Supposons $f \in C_K^+$, $g \in C^+$; soit g_n une suite croissante de fonctions de C_K^+ convergeant partout vers g (il en existe, grâce à l'hypothèse de dénombrabilité à l'infini) ; la suite Vg_n converge partout vers la fonction semi-continue inférieurement Vg. Soit $h \in C_K^+$ telle que $Vh(x) \geqslant 1$ en tout point du support compact de f (une telle h existe, d'après l'hypothèse que V est strictement positif, qui entraîne que, pour tout $x \in E$, il existe $\varphi_x \in C_K^+$ avec $V\varphi_x(x) \neq 0$). Soit enfin $\varepsilon > 0$. D'après le lemme de Dini il existe n tel que $Vf(x) \leqslant \varepsilon\, Vh(x) + Vg_n(x)$ sur le support de f, donc partout (principe de domination), d'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$, puis ε vers 0.

Si enfin f n'est pas à support compact, il suffit de considérer une suite croissante de fonctions de C_K^+ convergeant partout vers f.

3. Principe du balayage.

DÉFINITION. - On dit qu'un noyau V satisfait au principe du balayage si, quel que soit l'ouvert relativement compact ω et quelle que soit la mesure $\mu \in M_K^+$, il existe une mesure $\mu' \geqslant 0$ portée par l'adhérence de ω, telle que $\mu' V \leqslant \mu V$ et que les restrictions à ω de μV et $\mu' V$ soient identiques.

Une telle mesure μ' sera dite balayée de μ sur V.

On notera U l'ensemble des potentiels de mesures positives à support compact, i. e. l'image de M_K^+ par V ; $M^+(F)$ l'ensemble des mesures positives portées par l'ensemble fermé $F \subset E$; enfin $U(A)$ l'ensemble des potentiels des mesures de $M^+(A)$, où A est un compact de E. Avec ces notations, le principe du balayage peut s'écrire sous une forme très simple :

(2) $U \subset U(\overline{\omega}) + M^+(C\omega)$ quel que soit l'ouvert relativement compact ω.

THÉORÈME. - Soit V un noyau continu strictement positif ; pour que V satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe de domination ([1]).

([1]) Voir [2], où l'hypothèse " V est strictement positif" a été omise.

DÉMONSTRATION. - Supposons d'abord que V satisfasse au principe du balayage ; soient f et $g \in C_K^+$ telles que $Vf(x) \leqslant Vg(x)$ pour tout x du support de f ; soit $x \in E$ quelconque, soit ε'_x une mesure "balayée" de ε_x sur l'ouvert relativement compact $\{f > 0\}$; d'après (1) on a :

$$Vf(x) = \langle \varepsilon_x , Vf \rangle = \langle \varepsilon_x V , f \rangle = \langle \varepsilon'_x , V, f \rangle = \langle \varepsilon'_x , Vf \rangle \leqslant \langle \varepsilon'_x , Vg \rangle = \langle \varepsilon'_x V , g \rangle$$

$$\leqslant \langle \varepsilon_x V , g \rangle = Vg(x)$$

donc V satisfait au principe de domination.

Supposons inversement que V satisfasse au principe de domination. Observons d'abord que l'hypothèse " V continu strictement positif" entraîne que le cône $U(\overline{\omega})$ est fermé dans l'espace M muni de la topologie vague (définie par la dualité avec C_K), car il est engendré par l'image par V de l'ensemble des mesures $\geqslant 0$ de masse totale 1 portée par $\overline{\omega}$: cette image est un compact convexe de M ne contenant pas l'origine, donc le cône $U(\overline{\omega})$ est à base compacte, et est fermé. Observons que, dans l'espace vectoriel topologique M , l'ensemble somme de deux ensembles fermés d'éléments positifs est fermé.

Il résulte du principe de domination que les relations $h \in C_K$, $h(x) \geqslant 0$ hors de ω , $Vh(x) \geqslant 0$ sur ω , entraînent $Vh(x) \geqslant 0$ partout. Donc, d'après (1), les relations

$$\langle \mu , h \rangle \geqslant 0 , \quad \forall \ \mu \in M^+(C\omega) \qquad \text{et} \qquad \langle \nu , h \rangle \geqslant 0 , \quad \forall \ \nu \in U(\overline{\omega})$$

entraînent $\langle \lambda , h \rangle \geqslant 0$, $\forall \ \lambda \in U$. Autrement dit, tout demi-espace fermé de M contenant $U(\overline{\omega})$ et $M^+(C\omega)$ contient U . Comme l'ensemble convexe fermé $U(\overline{\omega}) + M^+(C\omega)$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, on a bien prouvé l'inclusion (2), qui exprime que V satisfait au principe du balayage.

REMARQUES. - L'hypothèse " V est strictement positif" n'intervient pas dans la première partie de la démonstration (balayage $\Longrightarrow$ domination) ; par contre elle est indispensable pour la seconde partie (contre-exemples faciles à construire).

Cette hypothèse est évidemment vérifiée par tout noyau de convolution $\neq 0$.

4. Principe complet du maximum.

DÉFINITION. - On dit que le noyau V satisfait au principe complet du maximum si, pour tout couple de fonctions f et $g \in C_K^+$ et tout nombre réel $a \geqslant 0$, la relation $Vf(x) \leqslant Vg(x) + a$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$ entraîne $Vf(x) \leqslant Vg(x) + a$ pour tout $x \in E$ (2).

Pour $a = 0$, cet énoncé se réduit à celui du principe de domination ; pour $g = 0$, on obtient le principe du maximum classique.

DÉFINITION (HUNT). - On dit que le noyau V satisfait au principe du maximum positif si, pour toute $f \in C_K$, on a $f(x) \geqslant 0$ en tout point x en lequel Vf atteint un maximum $\geqslant 0$.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la théorie de HUNT :

LEMME (HUNT - HERZ). - Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini ; si l'image $V(C_K)$ est partout dense dans C_0 et si V satisfait au principe complet du maximum, il satisfait au principe du maximum positif.

DÉMONSTRATION. - Soit f une fonction de C_K, telle que Vf atteigne son maximum.

1° $f(x) \geqslant 0$ en au moins un point x où le maximum de Vf est atteint, pourvu que ce maximum soit strictement > 0.

Soit en effet a le maximum de Vf sur le compact $S(f^+)$ (support de la partie positive f^+ de f). Par hypothèse $Vf^+(x) \leqslant a^+ + Vf^-(x)$ en tout x de $S(f^+)$, donc partout (principe complet du maximum) ; on a donc $Vf(x) \leqslant a^+$ partout, ce qui entraîne $a > 0$, d'où le résultat, qui est indépendant de l'hypothèse concernant l'image $V(C_K)$.

2° $f(x) \geqslant 0$ en tout point x où le maximum de Vf est atteint.

Soit en effet x un tel point ; nécessairement $Vf(x) \geqslant 0$, car V tend vers 0 à l'infini. Soit e un voisinage compact de x. Soit $g \in C_K$, telle que $Vg(x) > \sup_{y \in e} Vg(y)$ (l'existence d'une telle g résulte de l'hypothèse concernant l'image $V(C_K)$).

Soit enfin $\varepsilon > 0$. Par hypothèse le maximum de $V(f + \varepsilon g)$ est strictement > 0 ; il est atteint sur e et non atteint sur $\complement e$. Donc (première partie de la démonstration) $f(y) + \varepsilon g(y) \geqslant 0$ en au moins un point y de e, d'où le résultat

---

(2) Énoncé, dans [1], dans le cas d'un noyau de composition symétrique sur $\underset{\sim}{R}^n$.

en faisant tendre ε vers 0 , puis e vers x .

COROLLAIRE. - Si le noyau V satisfait aux hypothèses du lemme précédent, il définit une application injective de C_K dans C_0 .

En effet, si $f \in C_K$, et si $Vf = 0$, on a $f = 0$, d'après le lemme.

REMARQUE. - Si le noyau V satisfaisant aux hypothèses précédentes est uniforme (voir n° 1) il définit une application injective de C_0 dans C_0 dans l'énoncé du principe complet du maximum (resp . du maximum positif) on peut remplacer C_K^+ par C_0^+ (resp. C_K par C_0).

Il suffit de prouver que le principe complet du maximum est encore valable si les fonctions f et g de l'énoncé sont dans C_0^+ , ce qui est facile par passage à la limite croissante (voir démonstration du lemme du n° 2).

5. Énoncé du théorème de Hunt. Unicité de la représentation.

Le théorème suivant, dû à G. HUNT [3], est l'un des plus importants de toute la théorie du potentiel :

Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini. Pour que l'image $V(C_K)$ soit partout dense dans C_0 , et que V satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur C_0 , tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt \ , \quad \forall \ f \in C_K \ , \quad \forall \ x \in E \quad ;$$

le semi-groupe P_t associé à V est unique.

La démonstration de ce théorème fera l'objet des prochains exposés ; on va se borner ici à établir l'unicité du semi-groupe associé, ce qu'on va faire dans un cadre un peu plus général.

DÉFINITIONS. - On dit que le produit des deux noyaux P et Q a un sens si l'application $(x , e) \to \int P(x , dy)\, Q(y , e)$ est un noyau. Lorsqu'il en est ainsi, on a

$$(PQ)\, f(x) = P(Qf)(x) \ , \quad \forall \ x \in E$$

au moins dans les deux cas suivants : 1° $f \in B_K$; 2° f est borélienne $\geqslant 0$.

Un semi-groupe de noyaux est une famille $\{P_t\}_{t\geq 0}$ de noyaux tels que

$$P_{s+t} = P_s\, P_t \quad \text{quels que soient} \quad s \quad \text{et} \quad t \geq 0 \quad .$$

On dit que le semi-groupe de noyaux continus est continu si la fonction $(t\ ,\ x) \to P_t(x)$ est continue sur $\underset{\sim}{R}^+ \times E$ quel que soit $f \in C_K$.

THÉORÈME. - Soit V un noyau continu strictement positif, satisfaisant au principe de domination. Il existe au plus un semi-groupe continu de noyaux continus P_t tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt \ , \quad \forall \ f \in C_K \ , \quad \forall \ x \in E \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\lambda \in \underset{\sim}{R}^+$, et soit V^λ le noyau défini par

$$V^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P_t\, f(x)\, dt$$

pour f borélienne ≥ 0 . On va voir que V^λ est continu pour tout $\lambda > 0$ (pour $\lambda = 0$, c'est l'hypothèse) mais, a priori, si $f \in C_K^+$, on peut seulement affirmer que $V^\lambda f$ est semi-continue inférieurement, et on a d'ailleurs $0 \leq V^\lambda f(x) \leq Vf(x) < +\infty$, $\forall \ x \in E$.

En appliquant plusieurs fois Fubini, il vient facilement

$$\lambda V^\lambda(Vf) = \lambda V(V^\lambda f) = Vf - V^\lambda f \tag{3}$$

(relation entre fonctions boréliennes partout finies). Il en résulte que la fonction continue Vf étant somme des deux fonctions semi-continues inférieurement $V^\lambda f$ et $\lambda V^\lambda(Vf)$, chacune d'elles est continue, et le noyau V^λ est bien continu.

Supposons maintenant qu'il existe un second semi-groupe continu de noyaux continus Q_t tel que $\tilde{V}f(x) = \int_0^\infty Q_t\, f(x)\, dt$, $\forall \ f \in C_K$, $\forall \ x \in E$. Posant

$$W^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Q_t\, f(x)\, dt$$

il vient, d'après (3) :

$$Vf = (\lambda V + I)(V^\lambda f) = (\lambda V + I)(W^\lambda f) \ , \quad \forall \ f \in C_K^+ \quad .$$

Comme les fonctions $V^\lambda f$ et $W^\lambda f$ sont continues ≥ 0 et ont un V-potentiel partout fini, comme d'autre part V est strictement positif, il résulte du lemme du n° 2 qu'on a $V^\lambda f = W^\lambda f$. L'unicité de la transformation de Laplace prouve alors que les fonctions continues $t \to P_t f(x)$ et $t \to Q_t f(x)$ ($x \in E$, $f \in C_K^+$) sont égales, autrement dit les opérateurs P_t et Q_t sont identiques quel que soit t .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et DENY (J.). - Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta scient. Math., Szeged, t. 12, 1950, p. 81-100.

[2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Aspects linéaires de la théorie du potentiel, théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 764-767.

[3] HUNT (G. A.). - Markov processes and potentials, I., II., III., Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93, p. 316-369 et t. 2, 1958, p. 151-213.