Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

GUSTAVE CHOQUET

Diamètre transfini et comparaison de diverses capacités

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 4, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A4_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

DIAMÈTRE TRANSFINI ET COMPARAISON DE DIVERSES CAPACITÉS

par Gustave CHOQUET

Nous allons d'abord rappeler, dans un cadre général, ce qu'est le diamètre transfini associé à un noyau.

DÉFINITION. - Soit A un ensemble quelconque infini, Δ la diagonale de $A \times A$; et Φ un noyau sur A , c'est-à-dire (dans ce travail) une application symétrique de $A \times A$ dans $]-\infty , \infty]$.

Pour tout X fini $\subset A$, on pose :

$$\varphi(X) = \text{ moyenne de } \Phi(x , y) , \quad (x \neq y ; \ x , y \in X) \quad .$$

Puis on pose, pour tout entier n :

$$d_n(A) = \inf \ \varphi(X) , \quad (X \subset A \text{ et nombre cardinal de } X = n) \quad .$$

Enfin on pose : $d(A) = \sup_n \ d_n(A)$.

On appelle $d(A)$ la constante de Fekete de A , relative à Φ . Le diamètre transfini de A est une fonction simple de $d(A)$ qu'il n'est intéressant d'expliciter que dans les cas classiques ; nous préférons utiliser ici la constante de Fekete .

Quelques égalités de base. - Soit X une partie de A , ayant n éléments, et soit $x_0 \in A \doteq X$ (*). Soit μ_X la mesure $\frac{1}{n} \sum \varepsilon_u$ (où $u \in X$) .

On pose

$$p(x_0 , X) = \underset{y \in X}{\text{moyenne}} \ \Phi(x_0 , y) = \Phi\mu_X(x_0) \quad .$$

On vérifie aisément les égalités :

$$(1) \qquad (n + 1) \ \varphi(X \cup x_0) = (n - 1) \ \varphi(X) + 2p(x_0 , X)$$

(*) $(A \doteq B)$ désignera dans ce travail $A \cap \complement B$.

(2) $$n\varphi(X) = \sum_{u \in X} p(u\ ,\ X - u)$$

Conséquences de ces égalités.

1° $d_n(A)$ est fonction croissante de n .

En effet, soit $\varepsilon > 0$; il existe un X ayant n points, tel que

$$\varphi(X) \leqslant d_n(A) + \varepsilon \quad .$$

Soit alors a l'un des points x de X qui maximise $p(x\ ,\ X \doteq x)$; les égalités (1) et (2) montrent que

$$p(a\ ,\ X \doteq a) \geqslant \varphi(X) \quad .$$

On a donc

$$d_n(A) + \varepsilon \geqslant \varphi(X) \geqslant \varphi(X \doteq a) \geqslant d_{n-1}(A)$$

d'où $d_n(A) \geqslant d_{n-1}(A)$ puisque ε est arbitraire.

2° Soit X ayant n points; posons :

$$\varphi(X) - d_n(A) = \varepsilon \quad .$$

Pour tout $a \in A \doteq X$, on a :

$$2p(a\ ,\ X) + (n-1)\,\varphi(X) = (n+1)\,\varphi(X \cup a) \geqslant (n+1)\,d_{n+1}(A) \geqslant (n+1)\,d_n(A)$$
$$= 2p(a\ ,\ X) + (n-1)\varepsilon + (n-1)\,d_n(A) \quad .$$

(3) d'où :
$$p(a\ ,\ X) = \Phi\mu_X(a) \geqslant d_n(A) - \frac{\varepsilon(n-1)}{2} \quad .$$

En particulier, si $\varepsilon = 0$, on a :

$$\Phi\mu_X(a) \geqslant d_n(A) \qquad \text{pour tout } a \in (A - X) \quad .$$

Si $a \in X$ on ne peut rien dire en général de $\Phi\mu_X(a)$; mais si $\Phi \geqslant 0$ et si $\Phi = +\infty$ sur Δ , on a alors

$$\Phi\mu_X(a) \geqslant d_n(A) \qquad \text{pour tout } a \in A \quad .$$

PROPOSITION 1. - Si $\Phi \geqslant 0$ partout, avec $\Phi = +\infty$ sur Δ , et si $d(A) = \infty$, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur A de masse totale 1, et de la forme $\sum_n \lambda_n \varepsilon_{a_n}$ (ε_x masse + 1 au point x), telle que le potentiel $\Phi\mu$ soit partout égal à $+\infty$.

C'est une conséquence facile de la relation (3) .

Cas où A est un espace topologique compact. - Soit A compact et Φ un noyau $\geqslant 0$ et semi-continu inférieurement (s. c. i.) sur A .

LEMME 1. - Supposons en outre Φ continu en tout point de Δ (mais pas nécessairement fini). Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ de masse totale 1 sur A, qui ne charge aucun point x en lequel $\Phi(x , x) < \infty$, on a :

$$d(A) \leqslant \int \Phi\mu \, d\mu \quad ,$$

c'est évident si le second membre est $+\infty$; sinon μ n'a aucune charge ponctuelle, et est donc limite faible de mesures à support fini X , de la forme μ_X précédemment définie.

Supposons d'abord Φ fini et continu. On a

$$\int \Phi\mu \, d\mu = \lim \int \Phi\mu_X \, d\mu_X \qquad \text{et, si } \overline{\overline{X}} = n \ ;$$

$$\int \Phi\mu_X \, d\mu_X = \frac{1}{n^2} \sum_{a,b \in X} \Phi(a , b) = \frac{1}{n^2} \sum_{a} \Phi(a , a) + \frac{n(n-1)}{n^2} \varphi(X) \geqslant \frac{n-1}{n} d_n(A) \quad .$$

Quand $n \to \infty$, on passe à la limite et on obtient l'inégalité. Lorsque Φ est quelconque, on a pour tout noyau Φ' fini et continu tel que $\Phi' \leqslant \Phi$, la relation

$$d'(A) \leqslant \int \Phi' \mu \, d\mu \quad .$$

Or Φ est limite de l'ordonné filtrant croissant des $\Phi' \leqslant \Phi$; et l'on a, suivant le filtre associé,

$$d(A) = \lim d'(A) \quad \text{et} \quad \int \Phi\mu \, d\mu = \lim \int \Phi' \mu \, d\mu \quad .$$

C'est évident pour la seconde relation ; pour la première, il suffit de montrer que pour tout n

$$d_n(A) = \lim d'_n(A) \quad .$$

On le démontre en utilisant la continuité de Φ sur Δ . On déduit de cette inégalité la relation cherchée par passage à la limite.

LEMME 2. - Si à nouveau Φ est $\geqslant 0$ et s. c. i., et si, de plus Φ est infini sur Δ , il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ de masse totale 1 sur A , et telle que

$$d(A) \geqslant \int \Phi\mu \, d\mu \quad .$$

C'est évident si $d(A) = \infty$ puisqu'il suffit de prendre μ de la forme ε_a . Sinon pour tout n , il existe un ensemble fini X_n de n points tel que :

$$\left| d_n(A) - \varphi(X_n) \right| < \frac{1}{2^n} \quad .$$

Soit μ une valeur d'adhérence de la suite des μ_{X_n} ; comme Φ est s. c. i. et vaut ∞ sur Δ, la restriction ν_n de $(\mu_{X_n} \otimes \mu_{X_n})$ à $(A^2 \cdot \Delta)$ converge vers $\mu \times \mu$.

En vertu de la semi-continuité de Φ, on a

$$d(A) = \lim \int \Phi \, d\nu_n \geq \int N d(\mu \otimes \mu) = \int N\mu \, d\mu \quad .$$

NOTATION. - Pour tout A compact et pour tout noyau $\Phi \geq 0$ et s. c. i. sur A, on notera

$$e(A) = \inf \int \Phi\mu \, d\mu \qquad (\mu \geq 0 \text{ sur } A, \text{ de masse totale } 1) \quad .$$

THÉORÈME. - Soit Φ un noyau symétrique ≥ 0 et s. c. i. sur A compact, qui vaut $+\infty$ sur Δ.

Alors

$$d(A) = e(A) \quad .$$

C'est une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2.

Nous conviendrons désormais, si Φ est un noyau sur un espace E, de désigner par e(A) et d(A) (où A est un compact de E) les constantes définies plus haut et associées à la restriction de Φ à A.

Comparaison de la constante de Fekete et de la capacité. - Soit Φ un noyau ≥ 0 sur un espace E localement compact ; rappelons que la capacité d'un compact K de E (appelée Φ-capacité si on veut préciser) est le sup des masses totales des mesures $\mu \geq 0$ portées par K, et dont le Φ-potentiel est partout sur E ≤ 1.

PROPOSITION 2. - Soit Φ symétrique, s. c. i. et ≥ 0 sur E localement compact. Pour tout K compact de E, la capacité de K est $\leq 1/d(K)$ et $1/e(K)$. En particulier si $e(K) = \infty$, K est de capacité 0 ; inversement, lorsque Φ est irrégulier et borné à l'infini ou si Φ satisfait au principe du maximum k-dilaté), (cap K = 0) $\Longrightarrow e(K) = \infty$.

En effet, soit c la capacité de K ; il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur K, avec $\|\mu\| = c$ et $\Phi\mu \leq 1$ partout.

On a :

$$e \leq \int \frac{\Phi\mu}{c} \frac{d\mu}{c} \leq \int \frac{d\mu}{c^2} = \frac{1}{c} \qquad \text{d'où} \quad c \leq 1/e \quad .$$

On procède de façon analogue pour d .

La dernière partie résulte de ce que, s'il existe une mesure $\mu > 0$ sur K , d'énergie finie, il existe une mesure $\mu' \lesssim \mu$ de potentiel fini et continu sur le support de μ' ; il résulte des hypothèses envisagées qu'alors la capacité de K n'est pas nulle.

COROLLAIRE. - Si Φ est symétrique, s. c. i. et ≥ 0 , régulier et borné à l'infini et ∞ sur Δ ,

$$(\text{cap } K = 0) \iff (e(K) = \infty) \iff (d(K) = \infty) \quad .$$

En outre, tout K de capacité nulle porte une mesure ≥ 0 de potentiel infini en tout point de K (c'est donc un noyau d'Evans).

Rappelons en outre que nous avons montré ailleurs, pour un tel noyau, que tout ensemble analytique X de capacité intérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle.

Quelques résultats fragmentaires.

1° On supposera toujours par la suite $\Phi \geq 0$, symétrique, s. c. i. sur E localement compact.

Pour tout K compact tel que $e(K) \neq \infty$, il existe $\mu_0 \in \mathfrak{M}^1(K)$ qui minimise l'énergie $[\mu , \mu]$; pour tout $\nu \in \mathfrak{M}^1(K)$, d'énergie finie, on a

$$N\mu_0 \geq [\mu_0 , \mu_0] \text{ , } \nu\text{-presque partout} \quad .$$

En particulier $N\mu_0 = [\mu_0 , \mu_0]$, μ_0-presque partout.

Donc si Φ satisfait au principe du maximum k-dilaté, on a

$$N\mu_0 \leq k[\mu_0 , \mu_0] \quad \text{partout dans E} \ .$$

Il en résulte que $c(K)$ et $1/e(K)$ ont un rapport majoré par k .

2° Signalons l'intérêt de quelques constantes :

$C(K)$ = inf des masses totales des mesures $\mu \geq 0$ sur E , telles que $\Phi\mu \geq 1$ sur K .

$E(K)$ = inf $[\mu , \mu]$ pour toutes les mesures $\mu \geq 0$ portées par K , et de potentiel quasi-partout ≥ 1 sur K .

On a pour les noyaux étudiés :

$$c(K) \leq C(K) \leq E(K) \leq 1/e(K) \leq 1/d(K) \quad .$$

3° En particulier, voici quelques résultats pour l'étude de $E(K)$:

LEMME 3. - Si Φ est de type-positif, on a $E(K) = 1/c(K)$. En outre, si de plus Φ est régulier, $E(K)$ est une vraie capacité en ce sens que pour toute suite croissante A_n , on a :

$$E^*(UA_n) = \lim E^*(A_n) \quad .$$

La première partie du lemme s'établit aisément par la remarque suivante : si μ et ν sont portées par K , avec $\Phi\nu \geq 1$ quasi-partout sur K et si $\Phi\mu = 1$, μ-presque partout, ceci entraîne $[\nu - \mu , \mu] \geq 0$ ou $[\nu , \mu] \geq [\mu , \mu]$. Or, Φ est de type positif, donc $[\nu , \mu]^2 \leq [\nu , \nu] \times [\mu , \mu]$ d'où

$$[\nu , \mu]^2 \leq [\nu , \nu] \times [\nu , \mu] \quad \text{ou} \quad [\nu , \mu] \leq [\nu , \nu] ,$$

$$\text{donc enfin} \quad [\mu , \mu] \leq [\nu , \nu] \quad .$$

Ceci, rapproché des propriétés de 1° ci-dessus permet d'établir que $E(K) = 1/c(K)$.

On note ensuite que si Φ est de type positif, on a aussi :

$E(K) = \inf [\mu , \mu]$ pour toutes les mesures $\mu \geq 0$ sur E , ayant pour potentiel quasi-partout ≤ 1 sur K .

On n'a donc pas besoin de la restriction toujours gênante que les μ doivent être portées par K .

4° Ces considérations suggèrent, pour éviter les difficultés rencontrées dans l'étude des diverses capacités associées à un noyau lorsqu'on impose aux mesures d'être portées par le compact ou l'ensemble étudié, de se libérer de cette sujétion en introduisant une autre famille de constantes :

Soit toujours $\Phi \geq 0$, s. c. i. sur E supposé compact pour simplifier. On commence par définir une notion de quasi-partout lié à Φ ; ce sera là un outil transitoire.

Soit h une fonction numérique ≥ 0 et s. c. i. sur $\mathfrak{M}^+(E)$. Pour tout ensemble $X \subset E$, on pose :

$$H(X) = \inf h(\nu) \qquad (\text{où } \Phi\nu \geq 1 \text{ quasi-partout sur } X) \quad .$$

Cette relation définit en quelque sorte l'"encombrement" de la fonction caractéristique de X .

Plus généralement, on peut définir l'encombrement de toute fonction $\varphi \geq 0$ sur E :

$$H(\phi) = \inf h(\nu) \qquad (\text{où } \Phi\nu \geqslant \varphi \text{ quasi-partout sur } E) \quad .$$

On montrera alors que, pour toute suite croissante φ_n on a :

$$H(\lim \varphi_n) = \lim H(\varphi_n) \quad ,$$

d'où des théorèmes de capacitabilité faciles à obtenir sans hypothèses supplémentaires sur Φ .

Exemples de fonction $h(\nu)$: $\|\nu\|$, $[\nu , \nu]$, etc. - Ces "encombrements" ont l'avantage de permettre une étude facile des passages à la limite.

D'autre part, lorsque le noyau Φ a des propriétés supplémentaires (type positif, principe du maximum, équilibre, balayage, etc.), on démontre que ces constantes sont égales aux constantes classiques : c , 1/e , etc.

Donc, par l'intermédiaire temporaire de la notion d'encombrement, on a pu faire dans ces cas-là une étude commode des notions de convergence et de capacité. C'est par exemple ce qui se produit avec le noyau newtonien, ou plus généralement les noyaux $1/r^{\alpha}$ dans R^n (cf. la méthode utilisée par ARONSZAJN).

5° Signalons un résultat que nous démontrerons ailleurs :

Pour tout noyau Φ s. c. i. symétrique, $\geqslant 0$, égal à ∞ sur Δ , et continu hors de Δ , sur E compact dans lequel tout ouvert est un K_σ , tout ensemble G_δ de E est capacitable pour la Φ-capacité ordinaire.

Ce résultat ne suppose aucune condition de régularité de Φ . Si en plus Φ est régulier, alors tout X qui est un K-analytique de E , et de Φ capacité intérieure nulle, a aussi sa capacité extérieure nulle.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)