Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

GUSTAVE CHOQUET

Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 14, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A12_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

SUR UNE LARGE CLASSE DE NOYAUX DE CONVOLUTION SATISFAISANT AU PRINCIPE DU MAXIMUM

par Gustave CHOQUET

Il est bien connu que dans R^n, tout noyau $\Phi(r) \geq 0$ tendant vers 0 à l'infini et sous-harmonique en dehors de l'origine, satisfait au principe du maximum ; par exemple dans R, si Φ est fonction convexe de r et tend vers 0 à l'infini, Φ satisfait à ce principe (donc est aussi de type positif).

Nous allons ici mettre en évidence une classe aussi vaste que possible de noyaux de convolution sur R^n, qui satisfassent au même principe.

DÉFINITION 1. - Soit T une distribution (au sens de SCHWARTZ) sur R^n.

a) On dit que T est à concavité localisée si pour toute fonction $\varphi \geq 0$ indéfiniment dérivable et à support $S\varphi$ compact, tout point x en lequel $T * \varphi$ est strictement concave (1) appartient à $S\varphi$.

b) On dit que T est à maximum localisé si (avec les mêmes notations), tout point x en lequel $T * \varphi$ a un maximum local strict (2) appartient à $S\varphi$.

On définirait de même T à convexité localisée, ou T à minimum localisé (ce qui revient aussi à changer T en - T).

Quand T et - T sont à concavité localisée (resp. à maximum localisé) on peut dire que T est "à courbures opposées" (resp. "monotone").

Nous voulons déterminer les distributions T ayant l'une de ces propriétés.

THÉORÈME 1. - Les distributions T sur R^n à concavité localisée sont les distributions qui sont solutions d'au moins une équation du type :

$$\Delta * T \geq 0 \quad \text{hors de l'origine}$$

où Δ est un opérateur non nul de la forme :

---

(1) Cela signifie que la forme quadratique associée à $T * \varphi$ en x est définie négative.

(2) Cela signifie que $T * \varphi$ a une différentielle nulle et est strictement concave en x.

$$\Delta = \sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

où la forme $\sum \alpha_{ij} x_i x_j$ est positive .

THÉORÈME 2. - Conclusions analogues pour les T à maximum localisé en prenant Δ de la forme :

$$\Delta = \sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où la forme $\sum \alpha_{ij} x_i x_j$ est nulle ou positive.

Par une tranformation linéaire de R^n , ces opérateurs Δ sont évidemment réductibles aux formes

$$\sum_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1 \leq p \leq n) \qquad \text{pour le théorème 1} \quad .$$

$$\sum_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{ou} \quad \sum_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \, , \quad \text{ou} \quad \sum_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_n} \, , \quad \text{ou} \quad \sum_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_n} \, ,$$

$$\text{ou enfin} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \text{pour le théorème 2} \quad .$$

DÉMONSTRATION du théorème 1. - Soit T à concavité localisée, et soit φ une fonction ≥ 0 indéfiniment dérivable à support $S\varphi$ compact.

Soit E l'espace vectoriel des formes quadratiques réelles sur R^n ; soit N le cône convexe ouvert de E constitué par les formes quadratiques définies négatives de E ; et soit $E\varphi$ le cône convexe fermé engendré par les formes quadratiques Q_x $(x \notin S)$, où Q_x désigne la forme quadratique associée à $T * \varphi$ au point x .

Comme T est à concavité localisée, $N \cap E\varphi$ est réduite à l'origine de E ; donc il existe un hyperplan de E séparant (au sens large) N et $E\varphi$; autrement dit, il existe une forme linéaire qui est ≤ 0 sur $E\varphi$ et > 0 sur N ; c'est dire que $T * \varphi$ vérifie, hors de $S\varphi$, une équation du type

$$\sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_j} \geq 0 \, , \quad \text{où la forme } \sum \alpha_{ij} x_i x_j \text{ est positive et } \not\equiv 0 \, .$$

Il en résulte (faire tendre $S\varphi$ vers 0 et tenir compte de la compacité des formes positives $\sum \alpha_{ij} x_i x_j$ telles que $\sum \alpha_i^2 = 1$) , que T satisfait, hors

de 0 , à une relation de la forme cherchée.

Inversement, toute solution d'une telle relation est évidemment une distribution à concavité localisée puisque, pour toute $\varphi \geq 0$,

$$(\Delta * T \geq 0 \text{ hors de } 0) \Longrightarrow (\Delta * (T * \varphi)) \geq 0 \text{ hors de } S\varphi) .$$

Pour démontrer le théorème 2, on opère de façon analogue : on désigne par E l'espace des polynômes $(L + Q)$ sur R^n , où L et Q désignent respectivement une forme linéaire et une forme quadratique ; par $E\varphi$ le cône fermé engendré par les polynômes $(L + Q)_x$ associés à $T * \varphi$ aux points $x \notin S\varphi$; par N le sous-cône convexe (ouvert dans le sous-espace vectoriel qu'il engendre) des polynômes $(L + Q)$ où $L = 0$ et où Q est définie négative.

On achève comme pour le théorème 1.

Cas particuliers. -

1° Les solutions T de $(\Delta * T \geq 0$ hors de $0)$, où Δ est le laplacien ordinaire, sont les distributions qui sont, hors de 0 , équivalentes à une fonction sous-harmonique.

2° Soit T symétrique ; si T satisfait, hors de 0 , à une relation

$$\sum_1^p \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \sum_1^n \alpha_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0 ,$$

T satisfait aussi à la relation analogue obtenue en changeant α_i en $-\alpha_i$; d'où par addition :

$$\sum_1^p \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \geq 0 .$$

De même la relation $\frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0$ entraîne $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$.

En résumé, toute distribution symétrique à maximum localisé, ou bien est aussi à concavité localisée, ou bien ne dépend que de $(n - 1)$ variables.

3° Déterminons les distributions T à concavité localisée, et qui sont invariantes par toute rotation autour de l'origine de R^n . Pour une telle T , il existe un opérateur Δ tel que $\Delta * T \geq 0$ hors de 0 ; si Δ_λ désigne le transmué de Δ par une rotation λ autour de 0 , on a aussi $\Delta_\lambda * T \geq 0$, d'où par intégration (par rapport à la mesure de Haar sur les λ) :

Laplacien de $T \geq 0$ hors de l'origine .

Inversement cette relation entraîne bien que T soit à concavité localisée ; donc les distributions T cherchées sont les distributions qui, hors de 0 , sont équivalentes à une fonction convexe f(u) de la fonction u(r) où u(r) vaut r^{2-n} si $n \geq 3$; $\log 1/r$ si $n = 2$; r si $n = 1$.

4° Dans R , les distributions T à concavité localisée sont les distributions qui, à droite de 0 (et à gauche) sont équivalentes à une fonction convexe de x .

Les distributions à maximum localisé sont les distributions qui, à droite de 0 (et à gauche) sont équivalentes à une fonction convexe de e^{ax} , pour au moins un a ; ou encore les distributions qui à droite de 0 (et à gauche) sont équivalentes à une fonction croissante, ou à une fonction décroissante.

REMARQUE. - Les distributions T à "courbures opposées" sont celles qui satisfont à deux relations du type :

$$\sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_j} \geq 0 \qquad \text{et} \quad \sum \alpha'_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_j} \leq 0 \text{ , (hors de l'origine)}$$

où les formes $\sum \alpha_{ij} x_i x_j$ et $\sum \alpha'_{ij} x_i x_j$ sont toutes deux positives.

On a un résultat analogue pour les distributions "monotones".

Extension aux noyaux-fonctions de type plus généraux.

On peut étendre l'étude précédente à certains noyaux-fonctions $N(x , y)$ dans R^n ; par exemple si $N \in \mathcal{C}_2$ hors de la diagonale de $R^n \times R^n$, pour que tout potentiel $N\varphi$ (où $\varphi \geq 0$) [3] ne soit strictement concave en aucun point hors de $S\varphi$, il faut et il suffit que N vérifie une équation de la forme :

$$\sum \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \, \partial x_j} \geq 0 \qquad \text{hors de la diagonale } \Delta \text{ ,}$$

où la forme $\sum \alpha_{i,j}(x) \xi_i \xi_j$ est partout positive.

On a un résultat analogue pour les noyaux à maximum localisé.

---

[3] $N\varphi$ est définie par $N\varphi(x) = \int N(x , y) \, \varphi(y) \, dy$

Application à la théorie du potentiel.

Bornons-nous pour simplifier, aux noyaux de convolution.

DÉFINITION 2.

1° On dit que le noyau-distribution T satisfait au principe du maximum si pour toute $\varphi \geq 0$ indéfiniment dérivable à support compact,

$$(T * \varphi \leq 1 \text{ sur } S\varphi) \Longrightarrow (T * \varphi \leq 1 \text{ partout}) .$$

2° On dit que T tend vers 0 à l'infini si pour toute φ indéfiniment dérivable à support compact, la fonction $T * \varphi$ tend vers 0 à l'infini (lorsque $T \geq 0$, cette condition équivaut à dire qu'il existe une $\varphi \geq 0$ continue à support compact non vide telle que $T * \varphi$ tende vers 0 à l'infini).

LEMME 1. - Soit Δ un opérateur différentiel sur R^n, à coefficients constants non tous nuls :

$$\Delta = \sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{où la forme } \sum \alpha_{ij} x_i x_j \text{ est } \geq 0 .$$

Soient ω un ouvert borné de R^n, et f une fonction continue sur $\overline{\omega}$, à dérivées secondes continues dans ω.

Si $\Delta f \geq 0$ dans ω, f est maximum en au moins un point de la frontière ω^* de ω.

En effet, soient respectivement M et m le maximum de f sur $\overline{\omega}$ et ω^* ; on veut montrer que $M = m$.

Supposons donc que $m < M$. Il existe un polynôme g dans R^n tel que $\Delta g > 0$ dans ω : par exemple, si l'un au moins des $\beta_i x_i$ n'est pas nul, ce sera ce terme ; si tous les β_i sont nuls, ce sera un terme quelconque non nul $\alpha_{ij} x_i x_j$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonction $h = f + \varepsilon g$ atteint, comme f, son maximum en un point a de ω ; en un tel point les $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ sont nuls et

$$\sum \alpha_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \, \partial x_j} \text{ est } \leq 0 ;$$

donc

$$\Delta h(a) \leq 0 .$$

Or $\Delta h = \Delta f + \Delta g$; par hypothèse $\Delta f \geq 0$ et $\Delta g > 0$;
donc

$$\Delta h(a) < 0$$

d'où contradiction.

(Cette méthode étend une méthode utilisée par PRIVALOV pour le cas harmonique).

LEMME 2. - Soit T une distribution à maximum localisé ; pour toute $\varphi \geq 0$ indéfiniment dérivable à support compact, et pour tout ouvert relativement compact ω disjoint de $S\varphi$, le maximum de $T * \varphi$ sur $\overline{\omega}$ est atteint en au moins un point de la frontière ω^* de ω.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme 1.

THÉORÈME 3. - Toute distribution $T \geq 0$ à maximum localisé, et tendant vers 0 à l'infini, satisfait au principe du maximum.

En effet, avec les notations précédentes, la fonction indéfiniment dérivable $T * \varphi$ est ≥ 0, non $\equiv 0$, et tend vers 0 à l'infini ; donc elle est maximum en au moins un point et l'ensemble de ces points est compact ; il suffit alors d'appliquer le lemme 2.

EXEMPLES. - Le théorème 3 permet de construire explicitement de nombreux noyaux $T \geq 0$ tendant vers 0 à l'infini et satisfaisant au principe du maximum.

Déterminons par exemple de tels noyaux sur R.

1° Soit f une fonction définie sur $[0 , \infty]$ telle que

a) f est croissante et convexe sur $[0 , 1[$, et $f(0) = 0$

b) f est décroissante et convexe sur $]1 , \infty]$, et $f(\infty) = 0$

c) f est intégrable autour de 1.

Alors pour tout $a \geq 0$, le noyau-fonction $x \to f(e^{ax})$ répond à la question.

Il est convexe sur $]-\infty , 0[$, mais pas nécessairement sur $]0 , \infty[$.

2° Tout noyau-fonction N sur R tel que $N(x) = 0$ sur $]0 , \infty[$, et dont la restriction à $]-\infty , 0[$ est une fonction croissante qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$ (avec intégrabilité à l'origine).

Ce dernier exemple montre qu'un noyau (dissymétrique) peut satisfaire au principe du maximum et ne pas être continu hors de l'origine.

Nous allons voir qu'un principe de construction différent va fournir des noyaux symétriques inattendus.

Recherche d'autres noyaux sur R satisfaisant au principe du maximum.

Pour diriger la recherche de tels noyaux, on utilisera avec profit la proposition suivante :

PROPOSITION. - Soit N un noyau-fonction ≥ 0 sur R, borné symétrique et satisfaisant au principe du maximum.

Si N est linéaire dans un intervalle $[0, a]$, N est convexe et décroissant sur R^+.

Plus généralement on a, en tout point $x \neq 0$ où $N'(x_-)$ et $N'(x_+)$ existent

$$N'(x_-) \leq N'(x_+) \quad .$$

En tout point où N'' existe, N'' est fini.

Toutes ces propriétés (et d'autres analogues) se démontrent simplement en étudiant les potentiels des mesures positives à densité très régulière ou au contraire à support fini.

Voici maintenant une classe assez vaste de noyaux symétriques et continus sur R, satisfaisant au principe du maximum (donc aussi de type positif) et qui ne sont pas convexes ou monotones sur R^+ :

N a une dérivée seconde continue par morceaux, et en tout point de discontinuité de N', on a $N'(x_-) \leq N'(x_+)$.

Soient a, b, c, trois nombres tels que $0 < a < b < c$; et soit $\varepsilon > 0$. On suppose

$$N'' \geq 1 \quad \text{sur} \quad [0, a] \quad \text{et} \quad [b, c]$$

$$N'' \geq -\varepsilon \quad \text{sur} \quad [a, b] \quad .$$

Enfin $N(0) = 1$, $N \geq 0$ partout, et $N = 0$ pour $x \geq c$. On pose

$$\ell = \sup N \quad \text{sur} \quad [a, b]$$

$$k = \inf N \quad \text{sur} \quad [0, (b - a)] \quad .$$

Si $2(\varepsilon + \ell) < k$, N satisfait au principe du maximum. On le démontre en calculant $(N\mu)''$ en 0, lorsque $0 \notin S\mu$:

$(N\mu)''(0) = \int N''(x)\, d\mu(x)$, (lorsque $N\mu$ n'est pas anguleux en 0)

puis en montrant que si ce nombre est ≤ 0 , le maximum de $N\mu$ ne peut pas avoir lieu en 0 parce que l'essentiel de la masse de μ est portée par $[a , b]$.

Voici un exemple numérique :

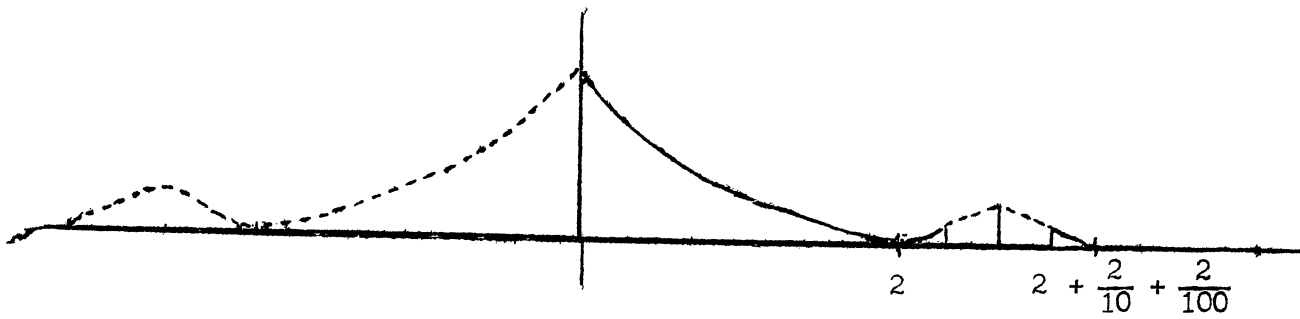
1) N et N' sont continus sur R^+ .

2) $N(x) = (x - 2)^2/2$ sur $[0 , 2 + \frac{1}{100}]$

3) $N''(x) = -1/10$ sur $[2 + \frac{1}{100} , 2 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}]$

4) $N''(x) = 1$ sur $[2 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} , 2 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100}$

5) $N(x) = 0$ pour $x \geq 2 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100}$



Le principe de construction permettrait d'obtenir des noyaux N ayant une infinité de maxima relatifs. Mêmes possibilités dans R^n .

REMARQUE 1. - Cet exemple montre que deux noyaux continus différents satisfaisant au principe du maximum peuvent être identiques au voisinage de 0 et de l'infini : en effet soit Φ , le noyau symétrique égal à $(x - 2)^2/2$ sur $[0 , 2]$, et à 0 pour $x > 2$; le noyau Φ et le noyau N défini ci-dessus en sont un exemple.

Ce fait semble indiquer qu'on ne peut pas espérer une détermination explicite de tous les noyaux satisfaisant au principe du maximum.

REMARQUE 2. - La définition 2 du principe du maximum utilise des mesures positives à densité φ très régulière, alors que la définition donnée ordinairement utilise des mesures μ positives quelconques à support compact. Notre définition est indispensable pour englober les noyaux qui ne sont pas continus (au sens large) à l'origine

et la définition ordinaire ne s'applique bien qu'aux noyaux classiques ou analogues qui, eux, sont continus à l'origine.

On retrouve évidemment la même nécessité de modifier l'énoncé classique lorsqu'on étudie des noyaux-mesures.