Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Gustave Choquet

Théorèmes de convergence

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 12, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A10_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

THÉORÈMES DE CONVERGENCE

par Gustave CHOQUET

Pour éviter des complications d'énoncé nous ferons la théorie dans un espace compact.

NOYAU. - Soit E compact ; le noyau N est une application universellement mesurable de $E \times E$ dans $[0, \infty]$. On appelle $\check{N}$ l'adjoint de N ; on définit la N-capacité et la $\check{N}$-capacité comme dans [2], auquel nous renvoyons pour les notations. Les mesures utilisées seront de Radon et positives.

On montre aisément que l'ensemble des x où $N\mu(x) \geqslant h$ a une $\check{N}$-cap$_*$ $< \|\mu\| / h$; et que la capacité intérieure est dénombrablement sous-additive pour les ensembles universellement mesurables.

Les expressions "à peu près partout" (p. p. p.) et "quasi-partout" (q. p.) associées à une capacité se définissent respectivement avec la capacité intérieure et la capacité extérieure.

DÉFINITION. - On dit que N satisfait au <u>théorème de convergence</u> à p. p. p. (resp. q. p.) si, pour toute suite $\mu_n \to \mu$, on a : $\liminf N\mu_n \leqslant N \leqslant \limsup N\mu_n$ $\check{N}$ - à p. p. p. (resp. q. p.) .

DÉFINITION. - Soit f une fonction de compact (définie sur $\mathcal{K}(E)$). On pose : $V_f(K)$ = variation de f sur K = $\sup \Sigma f(K_i)$ pour toutes les sous-familles finies disjointes de compacts de K .

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> N <u>un noyau sur</u> E <u>tel que</u>

(1) <u>Pour tout</u> K <u>de</u> $\check{N}$<u>-capacité non nulle, il existe</u> μ <u>sur</u> K <u>telle que</u> $\check{N}\mu$ <u>soit finie et continue hors de</u> K, <u>avec</u> $N\mu \leqslant 1$ <u>partout, et</u> $\|\mu\|$ <u>arbitrairement voisine de</u> $\check{N}$-cap K .

(2) <u>Pour tout</u> K <u>de</u> $\check{N}$<u>-capacité non nulle, la variation de</u> $\check{N}$-cap <u>sur</u> K <u>est infinie</u> (ceci a lieu pour tous les noyaux usuels).

Alors N satisfait au théorème de convergence à p. p. p.

Notons que (1) est satisfaite lorsque par exemple $\check{N}$ est régulier ou N continu. La condition (2) est inutile lorsque N est semi-continu inférieurement (s. c. i.), et que μ (limite des μ_n) est somme d'une mesure portée par un ensemble de $\check{N}$-capacité intérieure nulle, et d'une mesure normale.

REMARQUE. - Lorsque N est s. c. i. , dire que (2) n'est pas vraie équivaut à :

$\overline{(2)}$: Il existe un A compact et une μ sur A avec $\check{N}\mu$ continu, et un $h \geqslant 1$ tels que

$$\mu(K) \leqslant \check{N}\text{-cap } K \leqslant h\mu(K) \qquad \text{pour tout } K \subset A .$$

Pour démontrer le théorème 1, on utilisera le lemme 1 :

LEMME 1. - Soit N satisfaisant à (1), et soit $\mu_n \to \mu$; alors :

$\liminf N\mu_n \leqslant N\mu \leqslant \limsup N\mu_n$, $\check{N}$ - à p. p. p. sur K pour tout K tel que $\mu(K) = 0$ (et $\check{N}$ - q. p. si N est s. c. i.) .

DÉMONSTRATION. - Soit $\varepsilon > 0$; μ se décompose en $\mu = \mu' + \pi'$ où $\|\pi'\| < \varepsilon$ et μ' portée par un compact C disjoint de K .

On peut écrire $\mu_n = \mu'_n + \pi'_n$ où $\|\pi'_n\| < \varepsilon$ et les μ'_n sont portés par un voisinage compact V de C disjoint de K , avec $\mu'_n \to \mu'$.

Soit ν sur K avec $\check{N}\nu$ bornée (par a) et $\check{N}\nu$ continue sur V . Supposons qu'on ait sur K : $N\mu + b \leqslant N\mu_n$. Alors :

$$\int (N\mu_n - N\mu)\, d\nu \geqslant b\|\nu\| \quad .$$

Or l'intégrale s'écrit :

$$\int \check{N}\nu\, (d\mu'_n - d\mu + d\pi_n - d\pi) \quad .$$

L'un des morceaux $\to 0$; l'autre est majoré par εa ; or ε est indépendant de a et ν , d'où contradiction.

On se ramène ensuite à ceci :

Soit K de capacité $\neq 0$, avec sur K : $N\mu + b \leqslant N\mu_n$, K portant une mesure $\nu \leqslant \mu$.

D'après (2), pour tout entier k, il existe $K' \subset A$ avec $\operatorname{cap} K' \neq 0$ et $\check{N}\text{-cap } K' > k\nu(K')$; posons $\nu(K') = \varepsilon$.

On peut remplacer μ et μ_n par μ', μ'_n portées par un compact disjoint de K', et $\mu'_n \to \mu'$, avec les compléments π_n et π de norme $\leq 2\varepsilon$. Soit λ la mesure sur K', avec $\check{N}\lambda < 1$ et $\check{N}\lambda$ continue hors de K', et $\|\lambda\|$ voisine de $\check{N}\text{-cap } K'$. On a :

$$\int (N\mu_n - N\mu)\, d\lambda \geq b \,\|\check{N}\text{-cap } K\| \geq kb\varepsilon .$$

Comme plus haut, une partie $\to 0$, l'autre est majorée par 2ε. Il y a contradiction car kb peut être arbitrairement grand, donc dépasser 2.

THÉORÈME 2. - Soit N s. c. i., continu hors de Δ, et vérifiant (2). Alors N satisfait au théorème de convergence q. p.

On utilisera le théorème 1 et le fait (étudié ailleurs) qu'il y a N et $\check{N}$-capacitabilité pour les $K'_{\sigma\delta}$, et qu'un $K_{\sigma\delta\sigma}$ de capacité intérieure 0 est aussi de capacité extérieure 0.

Familles filtrantes décroissantes de potentiels.

LEMME topologique. - Soit E un espace topologique ; il y a équivalence des propriétés A, B suivantes :

(A) Tout sous-espace partout dense de E contient une partie dénombrable partout dense (par exemple E est à base dénombrable d'ouverts, ou bien E contient une partie dénombrable D partout dense et tout point de D a une base dénombrable de voisinages).

(B) Pour toute famille f_i d'applications de E dans $[-\infty, \infty]$, il existe I_0 dénombrable contenu dans I avec $(f_I)_* = (f_{I_0})_*$

(où f_* désigne la plus grande fonction s. c. i. $\leq f$, et où $f_J = \inf_{i \in J} f_i$).

En effet, si (A) est faux, soit $X \subset E$, avec $\overline{X} = E$ et X non séparable. Soit (f_a) $(a \in X)$ la famille suivante :

$$f_a(a) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq a .$$

Evidemment $(f_X)_* = 0$; mais pour tout X_0 dénombrable, $(f_{X_0})_* = 0$ seulement sur $\overline{X} \neq E$.

Si (A) est vrai, soit X_ε l'ensemble des points x de E tels que $|f_I - (f_I)_*| < \varepsilon$; l'ensemble X_ε est partout dense.

Soit Y_ε une partie dénombrable partout dense de X_ε . Pour tout $x \in Y_\varepsilon$, il existe $i \in I$ tel que $|f_i(x) - (f_I)_*| < \varepsilon$; soit I_ε l'ensemble de ces i . L'ensemble cherché est :

$$I_0 = \bigcup_1^\infty I_{1/2^n} \quad .$$

Ce lemme étend un résultat utilisé antérieurement dans [1].

DÉFINITION. - Soit G un noyau et f une application de E dans $\overline{R}$.
On dit que f est $\check{G}$-continu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω tel que $\check{G}$-cap $\omega < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $(E \doteq 0)$ soit finie et continue.

LEMME 2. - Pour tout noyau G s. c. i., et toute μ qui soit G-normale, $G\mu$ est $\check{G}$-continue.

C'est immédiat.

COROLLAIRE. - Soit G régulier et s. c. i. et $G\mu$ fini μ-presque partout. Alors $G\mu$ est $\check{G}$-continu.

Par exemple, si G est régulier et μ d'énergie finie, $G\mu$ est $\check{G}$-continu.

THÉORÈME 3 (conséquence du lemme 2). - Soit G régulier et s. c. i., et $\mu_n \to \mu$ avec les $G\mu_n$ qui soient $\check{G}$-continus. Alors

$$G\mu = \inf G\mu_n \ , \quad \check{G}\text{-quasi partout.}$$

Par exemple G et $\check{G}$ réguliers et chaque $G\mu_n$ est fini μ_n-presque partout.

On utilisera le fait que l'ensemble exceptionnel se ramène ici à l'étude d'un K_σ .

Construction de noyaux singuliers.

1° Il existe des noyaux de composition dans R^n , symétriques, finis continus hors de Δ , et infinis sur Δ , et pour lesquels le théorème de convergence à p. p. p. est faux.

Par exemple, dans R^2 prendre $N(x , y) = F(x - y)$ où F est une fonction dont le support ne rencontre l'axe des x_1 qu'en 0 , avec

$$\int F(x_1 , x_2)\, dx_1 = 1 \qquad \text{pour tout } x_2 \neq 0 .$$

Pour un tel noyau, la capacité d'un ensemble contenu dans une droite x_2 = constante est égale à sa mesure de Lebesgue ; donc N ne vérifie pas la condition (2). On vérifiera que le théorème de convergence n'est pas satisfait.

Dans R^2, $1/r^{1/2}$ + le noyau précédent convient aussi.

2° De même il existe des noyaux de composition dans R^2 ne satisfaisant pas à (1), par exemple en prenant $F = 1/r$ sauf sur $x_2 = 1$, où $F = 0$.

Bons noyaux.

On appellera bon noyau sur E compact $(N \in B)$ si $N \geq 0$, s. c. i., continu hors de Δ , satisfait à (2), vérifie le théorème de convergence, et la capacitabilité des $K'_{\sigma\delta}$.

Par exemple N régulier continu hors de Δ ; (en particulier, dans R^2 les $\Phi(r)$ décroissants).

Notons que pour tout noyau de composition $N \in B$ avec $N(0) = \infty$, $N > 0$ et continu hors de Δ , il y a des $N' < N$ où $N' \notin B$, malgré un comportement assez régulier.

Par exemple, dans R^2 , prendre N' partout nul sauf dans de petits carrés très rares convergeant vers 0 .

Equilibre et capacité.

Soit G un noyau ≥ 0 et s. c. i. sur E localement compact.

DÉFINITION. - On dira que G satisfait au principe de l'équilibre pour le compact K s'il existe une $\mu \geq 0$ sur K telle que

$$G\mu \leq 1 \text{ partout, et } G\mu = 1 , \overset{\vee}{G}\text{-q. p sur } K .$$

Une telle μ s'appelle mesure d'équilibre de K .

Il est immédiat qu'on pourrait remplacer la condition $\check{G}$ - q. p par $\check{G}$ - à p. p. p. parce que l'ensemble exceptionnel est un K_σ et que tout K_σ de capacité intérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle.

Il est évident que la masse totale $\|\mu\|$ est $\leq$ G-cap K .

PROPOSITION 1. - Si G satisfait au principe de l'équilibre pour K , on a $\check{G}$-cap K $\leq$ G-cap K .

En effet soient μ la mesure d'équilibre, et K' l'ensemble des points où $G\mu = 1$; on a alors (voir l'inégalité rappelée en tête de ce travail)

$$\check{G}\text{-cap } K' \leq \|\mu\| \leq G\text{-cap } K .$$

Or K et K' ne diffèrent que par un ensemble de $\check{G}$-capacité 0 , d'où la relation.

COROLLAIRE. - Si G et $\check{G}$ satisfont à l'équilibre pour K , on a

$$G\text{-cap } K = \check{G}\text{-cap } K$$

et pour toute mesure d'équilibre μ sur K on a $\|\mu\| = G\text{-cap } K$.

On a donc aussi pour tout ensemble X égalité des G et $\check{G}$-capacités intérieure et extérieure, lorsqu'il y a équilibre pour tout compact, pour G et $\check{G}$.

THÉORÈME 4. - Si maintenant en outre E est compact, et que tout ouvert de E est un K_σ , et si G et $\check{G}$ sont réguliers et satisfont au principe de l'équilibre pour tout compact, il existe pour tout $X \subset E$ une μ sur $\overline{X}$ telle que $\|\mu\| = \text{cap}^* X$ et $G\mu = 1$, q. p. sur X , et $G\mu \leq 1$ partout.

En outre la capacité satisfait à la propriété de croissance :

$$\text{cap}^*(\cup X_n) = \lim \text{cap}^* X_n \quad \text{si } X_n \nearrow$$

et toute ν sur $\overline{X}$ telle que $G\nu \geq 1$ q. p. sur X vérifie $\|\nu\| \geq \text{cap}^* X$.

DÉMONSTRATION. -

(a) Soient X ouvert et $X = \cup K_n$, K_n compact croissant avec $\text{cap } K_n \to \text{cap } X$. Soit μ_n une mesure d'équilibre de K_n . Par extraction, on se ramène au cas où $\mu_n \to \mu$; et alors $\|\mu\| = \text{cap } X$. Comme $G\mu_n \leq 1$ partout, idem pour $G\mu$. Puis comme $\lim G\mu_n = 1$, q. p. sur X on a (théorème de convergence)

$$G\mu = 1 \text{ , q. p. sur } X$$

(b) Soit ω_n une suite décroissante d'ouverts contenant un ensemble X donné, avec $\text{cap}^* X = \lim \text{cap } \omega_n$, et tels que $\overline{X} = \overline{\cap\ \omega_n}$.

Soit μ_n une mesure d'équilibre de ω_n (portée par $\overline{\omega}_n$) ; par extraction $\mu_n \to \mu$. On a $G\mu \leqslant 1$ et $G\mu = 1$, q. p. sur X , puisque $G\mu_n = 1$ q. p. sur X (théorèmes de convergence).

(c) Soit ν sur X avec $G\nu \geqslant 1$, q. p. sur X . Soit X' l'ensemble des x où $G\nu(x) \geqslant 1$. On sait que $\check{G}\text{-cap } X' \leqslant \|\nu\|$; or $X' \supset X$, à un q. p. près, donc

$$G^*\text{-cap } X = \check{G}^*\text{-cap } X \leqslant \check{G}\text{-cap } X' \leqslant \|\nu\| \quad .$$

(d) Soit (X_n) croissante, et soit μ_n une mesure d'équilibre de X_n . Par extraction $\mu_n \to \mu$; et $G\mu_n = 1$, q. p. sur X_n , d'où grâce au théorème de convergence, la propriété de base de la cap*. Cet énoncé étend un énoncé analogue de Kishi qui supposait en outre G symétrique, partout continu, fini hors de Δ , et E-métrisable.

Application de la notion d'encombrement.

Dans notre travail sur le diamètre transfini (exposé n° 4), nous avons défini une notion générale d'encombrement ; nous allons en étudier ici un cas particulier.

DÉFINITION. - Soit G un noyau sur E compact (cette restriction évitera certaines complications d'énoncé). Pour tout $X \subset E$, on posera $f(X) = \inf \|\mu\|$ pour toutes les $\mu \geqslant 0$ sur E telles que l'on ait $G\mu \geqslant 1$, $\check{G}$ - q. p. sur X .

Propriétés de f (encombrement).

On suppose G fini continu hors de Δ , G et $\check{G}$ réguliers.

1° Croissance et sous-additivité dénombrable.

2° Pour tout X , il existe μ avec $\|\mu\| = f(X)$ et $G\mu \geqslant 1$, $\check{G}$ - q. p. sur X (conséquence du théorème 1).

3° $(\check{G}\text{-cap}^* X = 0) \Longleftrightarrow (f(X) = 0)$. Le $\Longrightarrow$ résulte de la définition, le $\Longleftarrow$ résulte de 3°.

4° Si (X_n) est croissante, $f(\cup X_n) = \lim f(X_n)$

5° (f continue à droite pour tout compact) $\Longleftrightarrow$ (f continue à droite pour tout compact de $\check{G}$-cap nulle) $\Longleftrightarrow$ (Pour tout compact K de $\check{G}$-cap nulle, il existe μ sur E avec $G\mu = \infty$ sur K).

6° Pour tout X et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω tel que $X \subset \omega$ à l'exception d'un ensemble de $\check{G}$-cap* nulle et tel que $\text{cap}^* \omega \leqslant \text{cap}^* X + \varepsilon$. Dire que l'inclusion peut être stricte équivaut à la condition 5°.

7° On a $\check{G}$-cap $\leqslant f$; car soit $\mu \geqslant 0$ avec $\mu(E) = f(X)$ à ε près et $G\mu \geqslant 1$, G - q. p. sur X . L'ensemble Y des x où $G\mu \geqslant 1$ est de $\check{G}$-cap* $\leqslant \mu(E) = f(X)$; or $X \subset Y$, à un ensemble près de $\check{G}$-cap* nulle ; d'où la relation (en fait ceci serait vrai en supposant seulement G semi-continu inférieurement).

COROLLAIRE (de 4° et 5°). - Même hypothèse sur G ; de plus on suppose que pour tout K de $\check{G}$-cap nulle, il existe une μ telle que $G\mu = \infty$ sur K .

Alors tout ensemble K-analytique est f-capacitable.

CONSÉQUENCES. - Sous les hypothèses faites, on sait que

$$(G\text{-cap } K = 0) \Longleftrightarrow (\check{G}\text{-cap } K) = 0 \text{ , donc } (G\text{-cap}_* X = 0) \Longleftrightarrow (\check{G}\text{-cap}_* X = 0) .$$

Soit alors X un ensemble K-analytique.

$$(\check{G}\text{-cap}_* X = 0) \Longrightarrow (f_*(X) = 0) \Longrightarrow (f(X) = 0) \Longrightarrow (\check{G}\text{-cap}^* X = 0) .$$

Donc $(G\text{-cap}_* X = 0) \Longrightarrow (G\text{-cap}^* X = 0)$ si G est très-régulier au sens de [1]. On peut donc énoncer :

COROLLAIRE. - Soit $G \geqslant 0$, s. c. i., symétrique et régulier, fini continu hors de Δ , et $+\infty$ sur Δ (ce qui entraîne d'ailleurs E métrisable. Alors tout K-analytique X est f-capacitable, et en outre

$$(G\text{-cap}_* X = 0) \Longrightarrow (G\text{-cap}^* X = 0) .$$

Si, de plus on a $G\text{-cap } K = f(K)$ pour tout compact (ou même seulement pour une famille de compacts dont les intersections décroissantes constituent tous les compacts de E) , on a

$$G\text{-cap}^* X = f(X) \quad \text{pour tout } X .$$

La théorie se simplifie un peu lorsque dans E , tout ouvert non vide a une G-capacité non nulle ; c'est le cas des noyaux classiques.

BIBLIOGRAPHIE.

Depuis cette conférence, certains des résultats ont été retrouvés indépendamment et publiés par Masanori KISHI [3], [4].

[1] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 1, 1957, n° 1, 10 p.

[2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Le théorème de convergence en théorie du potentiel, J. Madras Univ., t. 27, 1957, p. 277-286.

[3] KISHI (Masanori). - Capacitability of analytic sets, Nagoya math. J., t. 16, 1960, p. 91-109.

[4] KISHI (Masanori). - A continuity theorem in the potentiel theory, Proc. Japan Acad., t. 36, 1960, p. 65-67.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)