

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

Unicité de certaines bases inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 4, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981___A4_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1980-1981

UNICITE DE CERTAINES BASES INCONDITIONNELLES
=====

J. BOURGAIN
(Université Libre de Bruxelles)

Il est bien connu que les espaces c_0 , ℓ^1 et ℓ^2 ont une unique base inconditionnelle. Il est vraisemblable que si on introduit les classes \mathfrak{X}_n en posant $\mathfrak{X}_1 = \{c_0, \ell^1, \ell^2\}$ et \mathfrak{X}_{n+1} les espaces obtenus par sommes directes au sens c_0 , ℓ^1 , ℓ^2 des membres de \mathfrak{X}_n , on a l'unicité de la structure inconditionnelle pour tous ces espaces. Pourtant, même au niveau \mathfrak{X}_2 , la question n'est pas encore complètement résolue. En usant essentiellement d'une technique de décomposition introduite dans [3], J. Lindenstrauss et L. Tzafriri ont résolu le problème affirmativement pour les espaces $\bigoplus_{c_0} \ell^2$ et $\bigoplus_{\ell^1} \ell^2$. Nous nous proposons ici de traiter le cas $\bigoplus_{c_0} \ell^1$. Donc

Théorème 1 : Les espaces $\bigoplus_{c_0} \ell^1$ et $\bigoplus_{\ell^1} c_0$ ont la propriété d'unicité de la structure inconditionnelle.

La démonstration du Th. 1 emploie entre autre la méthode des "produits" utilisée dans [1] afin de montrer que l'espace $\bigoplus_{\infty} L^1$ possède la propriété de Dunford-Pettis.

L'espace $\bigoplus_{c_0} \ell^1$ se comporte différemment de ℓ^1 . Par exemple, il existe dans $\bigoplus_{c_0} \ell^1$ des sous-espaces hilbertiens n -dimensionnels complémentés de norme $\text{const. } \sqrt{\log n}$, ce qui suggère que la démonstration du Th. 1 sera assez délicate. Mentionnons encore qu'une application plus quantitative de la même technique des "produits" permet de montrer qu'en fait $\sqrt{\log n}$ donne la borne inférieure et donc que les sous-espaces $\ell^2(n)$ de $\bigoplus_{c_0} \ell^1$ obtenus dans [2] par un argument probabiliste sont les mieux complémentés \rightarrow (J. Lindenstrauss).

Le résultat étant établi pour $\bigoplus_{c_0} \ell^1$, on l'obtient pour $\bigoplus_{\ell^1} c_0$ par dualité.

Nous allons utiliser le résultat intermédiaire suivant, qui se démontre comme dans le cas $\bigoplus_{c_0} \ell^2$ (voir [3], lemme 2).

Lemme 1 : Soit $(\xi_i)_{i=1,2,\dots}$ une base inconditionnelle de $\bigoplus_{c_0} \ell^1$. Il existe alors $\delta > 0$ et une partition (D_r) des entiers positifs telle que

(i) la partition donne une décomposition au sens c_0 , c-à-d.

$$\|\sum' x_r\| \sim \sup_r \|x_r\| \quad \text{si } x_r \in [\xi_i; i \in D_r] \quad .$$

(ii) Pour tout r , il existe une coordonnée $k = k_r$ telle que

$$\|\xi_i(k)\|_1 \geq \delta \quad \text{pour } i \in D_r \quad .$$

Afin de terminer la démonstration, il nous reste à montrer que les espaces $[\xi_i; i \in D_r]$ sont uniformément isomorphes à $\ell^1(D_r)$. Ceci sera une conséquence du fait suivant

Lemme 2 : Soit $\delta > 0$ et (F_i) une suite inconditionnelle dans $\oplus_{\infty} L^1$ telle que

1. $[F_i, i = 1, 2, \dots]$ est complété dans $\oplus_{\infty} L^1$ par une projection P
2. $\|\sum a_i F_i\| \geq \delta (\sum |a_i|^2)^{1/2}$ pour toute suite scalaire (a_i) .

Alors (F_i) est une suite ℓ^1 .

Remarque : Sous "inconditionnel" nous entendons "K-inconditionnel" pour une constante $K < \infty$. Dans le lemme 2, la constante d'équivalence ne dépend que de δ , K et $\|P\|$. On peut aussi formuler le lemme pour des suites finies.

Soit (G_i) la suite image par P^* de la base duale de (F_i) .

Donc

$$3. \quad \langle F_i, G_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$4. \quad \|F\| \sim \sup_{\|G\| \leq 1} \langle F, G \rangle \quad \text{pour } F \in [F_i] \text{ et } G \in [G_i] \quad .$$

A tout $F = \sum a_i F_i$ de $[F_i]$ nous associons la "fonction carrée"

$$S(F) = (\sum a_i^2 F_i^2)^{1/2}$$

ce qui est à nouveau un élément de $\oplus_{\infty} L^1$.

De même pour les éléments G de $[G_i] \subset \oplus_1 L^{\infty}$.

Lemme 3 : $\|F\|_{1,\infty} \sim \|S(F)\|_{1,\infty}$ et $\|G\|_{\infty,1} \sim \|S(G)\|_{\infty,1}$.

Démonstration : On obtient \gtrsim par inconditionnalité. D'autre part, par Cauchy-Schwarz et dualité

$$\langle F, G \rangle \leq \langle S(F), S(G) \rangle \leq \|S(F)\|_{1,\infty} \|S(G)\|_{1,\infty} \quad .$$

Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ dans $\oplus_{\infty} L^1$, dénotons $[[F]] = \|f^1\|_1, \|f^2\|_1, \dots$. On introduit de manière analogue $[[G]]$ pour G dans $\oplus_1 L^{\infty}$.

Lemme 4 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M = M_{\varepsilon} < \infty$ et $\sigma = \sigma_{\varepsilon}$ dans ℓ_+^1 , tel que $\|\sigma\|_1 \leq M$ et

$$\|[[G]] - [[G]] \wedge \sigma\|_1 < \varepsilon \quad \text{pour tout } G \in [G_i] \text{ tel que } \|G\| \leq 1.$$

Démonstration : Supposons l'énoncé faux. Par un argument standard, on obtient alors des sous-espaces $\ell^1(r)$ de $[G_i]$ complémentés dans $\oplus_1 L^{\infty}$ pour r arbitrairement grand. Donc, en dualisant, $[F_i]$ posséderait des sous-espaces ℓ^{∞} de grande dimension. Nous allons montrer que cela n'est pas possible. Soit donc ϕ_1, \dots, ϕ_r dans $[F_i]$ tel que

$$\|\sum c_s \phi_s\|_{1,\infty} \sim \max |c_s| \quad (*).$$

Soit pour tout $s = 1, \dots, r$

$$\phi_s = \sum_i a(s)_i F_i$$

et considérons aussi un élément

$$\psi_s = \sum_i b(s)_i G_i$$

de $[G_i]$, tel que

$$\|\psi_s\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \phi_s, \psi_s \rangle = \sum_i a(s)_i b(s)_i \sim \|\phi_s\| \sim 1.$$

Choisissons $\rho > 0$ petit, et introduisons pour $s = 1, \dots, r$ l'ensemble

$$A_s = \{k = 1, 2, \dots ; \|S(\phi_s)^k\|_1 > \rho\},$$

où \cdot^k dénote la k -ième composante.

Alors

$$1 \sim \sum_i a(s)_i b(s)_i \sum_{k \in A_s} \langle F_i^k, G_i^k \rangle + \sum_{k \notin A_s} \sum_i a(s)_i b(s)_i \langle F_i^k, G_i^k \rangle$$

et, par Cauchy-Schwarz, le deuxième terme est dominé par

$$\sum_{k \notin A_s} \langle S(\Phi_s)^k, S(\Psi_s)^k \rangle \leq \rho \sum \|S(\Psi_s)^k\|_\infty = \rho \|S(\Psi_s)\|_{\infty,1} \leq \rho .$$

D'autre part, on a aussi $\sum |a(s)_i| |b(s)_i| \lesssim 1$ par inconditionnalité.
Donc, il existe i_s tel que

$$\sum_{k \in A_s} \|G_{i_s}^k\|_\infty \geq \sum_{k \in A_s} \langle F_{i_s}^k, G_{i_s}^k \rangle > \rho' \quad (**)$$

où $\rho' > 0$ est une constante.

Utilisons maintenant le fait que Φ_1, \dots, Φ_r est une base ℓ^∞ . On déduit de (*) que

$$\int \|S(\sum \varepsilon_s(\omega) \Phi_s)\|_{1,\infty} d\omega \lesssim 1 .$$

Puisque

$$\int S(\sum \varepsilon_s(\omega) \Phi_s) d\omega \sim (\sum S(\Phi_s)^2)^{1/2} ,$$

on trouve pour toute composante k

$$\sum_s \|S(\Phi_s)^k\|_1^2 \lesssim 1$$

ce qui montre que

$$\rho^2 \text{card} \{s = 1, \dots, r; k \in A_s\} \lesssim 1 \quad (***)$$

Une dualisation de (2) dans l'énoncé du Lemme 2 donne que

$$\left\| \sum_{s=1}^r G_{i_s} \right\|_{\infty,1} \lesssim \sqrt{r} .$$

Mais, en usant de (**) et (***)

$$\begin{aligned} \|S(\sum_s G_{i_s})\|_{\infty,1} &= \sum_k \|S(\sum_s G_{i_s})^k\|_\infty \\ &\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k \in A_t} \|S(\sum_s G_{i_s})^k\|_\infty \\ &\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k \in A_t} \|G_{i_t}^k\|_\infty \geq r \rho^2 \rho' , \end{aligned}$$

ce qui mène à une contradiction pour $r \rightarrow \infty$.

Lemme 5 : $[F_i]$ se plonge dans L^1 et est donc de cotype 2.

Démonstration : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et soient M et σ comme dans le lemme 4. Fixons $F \in [F_i]$ et $G \in [G_i]$ tel que $\|G\| = 1$ et $\langle F, G \rangle \sim \|F\|$. Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ et $G = (g^1, g^2, \dots)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|F\| &\sim \sum \langle f^k, g^k \rangle \\ &\leq \sum \|f^k\|_1 \|g^k\|_\infty \\ &\leq \sum \sigma_k \|f^k\|_1 + \|\llbracket G \rrbracket - \llbracket G \rrbracket \wedge \sigma\|_1 \|F\| \\ &\leq \sum \sigma_k \|f^k\|_1 + \varepsilon \|F\| \quad . \end{aligned}$$

L'opérateur $T: \oplus_\infty L^1 \rightarrow \oplus_1 L^1$ défini par $T(F) = (\sigma_1 f^1, \sigma_2 f^2, \dots)$ est de norme $\|\sigma\|_1$ et induit un isomorphisme sur $[F_i]$.

Le résultat suivant est un corollaire immédiat du lemme 5.

Lemme 6 : $\|\sum \Phi_s\|_{1,\infty} \gtrsim (\sum \|\Phi_s\|^2)^{1/2}$
 $\|\sum \Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim (\sum \|\Psi_s\|^2)^{1/2}$
 pour toutes bloc-sous-suites (Φ_s) de (F_i) et (Ψ_s) de (G_i) .

Notre but suivant est d'améliorer les inégalités du Lemme 6. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant (basé sur la technique des "produits") et qui est essentiellement démontré dans [1].

Lemme 7 : A tout $B < \infty$ et $\tau > 0$ correspond une fonction $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = \infty$ et la propriété suivante est satisfaite :

Si Φ_1, \dots, Φ_n dans $\oplus_\infty L^1$ et Ψ_1, \dots, Ψ_r dans $\oplus_1 L^\infty$ sont tels que

1. $\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = 1$
2. $\|\Phi_s\| \leq 1$
3. $\|\sum c_s \Psi_s\| \leq B(\sum c_s^2)^{1/2}$ pour tous scalaires (c_s) ,

il existe une partie D de $\{1, 2, \dots, r\}$ tel que $\text{card}(D) > \gamma(r)$ et

$$\|\sum_{s \in D} \Phi_s\| > (\text{card } D)^{1-\tau} .$$

Lemme 8 : Il existe $1 < p < 2$ tel que

$$\|\sum \Phi_s\| \gtrsim (\sum \|\Phi_s\|^p)^{1/p}$$

$$\|\sum \Psi_s\| \lesssim (\sum \|\Psi_s\|^q)^{1/q} \quad (q = p') \quad .$$

Démonstration : Il suffit de montrer la première inégalité puisque la deuxième s'obtient par dualité. Celle-ci résultera des lemmes 6 et 7 par des arguments standard.

Si (Φ_s) est une bloc-sous-suite normalisée de (F_i) , on peut trouver une bloc-sous-suite (Ψ_s) de (G_i) telle que $\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = 1 \sim \|\Psi_s\|$.

La condition (3) du lemme 7 est réalisée par (2) du lemme 6 pour une certaine constante $B < \infty$. Soit $\tau = 1/4$ et $\gamma = \gamma_{B, \tau}$ comme dans le Lemme 7. On obtient donc une sous-famille $(\Phi_s)_{s \in D}$ où

$$\text{card}(D) \geq \gamma(r) \quad \text{et} \quad \left\| \sum_D \Phi_s \right\|_{1, \infty} \geq \text{card}(D)^{3/4} \quad .$$

Choisissons un entier t suffisamment grand et $k > 0$ tel que

$$\gamma(t/2)^{1/4} \gg t^k \quad .$$

Supposons maintenant que $(\Phi_s)_{1 \leq s \leq t}$ est une bloc-suite de (F_i) et $\|\Phi_s\| \geq \lambda$ pour tout $s = 1, \dots, t$. Par exhaustion, on peut introduire des parties disjointes S_π de $\{1, 2, \dots, t\}$ telles que

$$\text{card} \left(\bigcup_\pi S_\pi \right) \geq t/2$$

et pour tout π

$$\text{card } S_\pi \geq \gamma(t/2) \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{S_\pi} \Phi_s \right\| \geq (\text{card } S_\pi)^{3/4} \lambda \quad .$$

On trouve en appliquant le lemme 6

$$\left\| \sum_{s=1}^t \Phi_s \right\| > \left(\sum_\pi \left\| \sum_{S_\pi} \Phi_s \right\|^2 \right)^{1/2} \geq \gamma(t/2)^{1/4} (t/2)^{1/2} \lambda$$

et donc

$$\left\| \sum_{s=1}^t \Phi_s \right\| > t^{1/2+k} \lambda \quad .$$

L'itération de cette minoration donne

$$\left\| \sum_{s=1}^t \Phi_s \right\| > t^{m(1/2+k)} \lambda .$$

On peut alors démontrer l'inégalité pour tout $p > \frac{2}{1+2k}$ en décomposant une suite (Φ_s) abstraite en ces parties

$$S_x = \{s = 1, 2, \dots; 2^{-x-1} (\sum \|\Phi_s\|^p)^{1/p} < \|\Phi_s\| \leq 2^{-x} (\sum \|\Phi_s\|^p)^{1/p}\}$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Remarque : Le raisonnement précédent permet d'obtenir le lemme 8 pour n'importe quel $p > 1$, ce qui ne termine pourtant pas la démonstration du lemme 2.

Fin de la démonstration du lemme 2 : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et M et σ comme dans le lemme 4. Nous remplaçons chaque G_i par un $H_i \in \oplus_1 L^\infty$ tel que

1. $\|G_i - H_i\|_{\infty, 1} < \varepsilon$
2. $|G_i| \geq |H_i|$
3. $\|H_i\| \leq \sigma$

pour tout i ,

($| \cdot |$ dénote la valeur absolue dans le réticulé).

On remarque que $\|\max_i |H_i|\|_{\infty, 1} = \|\max_i \|H_i\|\|_1 \leq \|\sigma\|_1 \leq M$.

Nous introduisons ensuite un réarrangement et une partition S_1, S_2, \dots, S_r de $\{1, 2, \dots, n\}$ (choisissant n arbitrairement grand) de telle manière que

4. Si $s = 1, \dots, r$ et $i \in S_s$, on a $< |F_i|, \max_{j \in S_s, j < i} |H_j| > < \frac{1}{2}$.
5. Si $1 \leq s < t \leq r$ et $i \in S_t$, alors $< |F_i|, \max_{j \in S_s} |H_j| > \geq \frac{1}{2}$.

La construction de cette partition est tout à fait directe.

Montrons que pour s fixé

$$\left\| \sum_{S_s} a_i F_i \right\| > \sum_{S_s} |a_i| . \quad (*)$$

On obtient en effet par (4) et (1)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{S_s} a_i F_i \right\| &\sim \left\| S(\sum a_i F_i) \right\|_{1,\infty} \\
&\geq \langle S(\sum a_i F_i), \max_{S_s} |H_i| \rangle \\
&\geq \sum_{i \in S_s} |a_i| \langle |F_i|, |H_i| - \max_{j \in S_s, j < i} |H_j| \rangle \\
&\geq \sum_{S_s} |a_i| \langle F_i, H_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{S_s} |a_i| \\
&\geq (1 - \frac{1}{2} - \varepsilon) \sum |a_i|.
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à obtenir une borne sur r .

D'abord, en dualisant (*), on trouve pour $s = 1, \dots, r$

$$\left\| \sum_{S_s} b_i G_i \right\|_{\infty,1} \lesssim \max |b_i|,$$

d'où

$$\|\Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim 1 \quad \text{en posant } \Psi_s = \sum_{S_s} G_i.$$

Il découle alors du lemme 8 que

$$\left\| \sum_{i=1}^n G_i \right\|_{\infty,1} = \left\| \sum_{s=1}^n \Psi_s \right\|_{\infty,1} \lesssim r^{\frac{1}{q}}.$$

Choisissons $i^* \in S_r$. Alors, par (5)

$$\begin{aligned}
\frac{r-1}{2} &\leq \langle |F_{i^*}|, \sum_{s=1}^{r-1} \max_{j \in S_s} |H_j| \rangle \\
&\leq \sqrt{r} \langle |F_{i^*}|, (\sum_i |H_i|^2)^{1/2} \rangle \\
&\leq \sqrt{r} \|(\sum |G_i|^2)^{1/2}\|_{\infty,1} \lesssim r^{\frac{1}{2} + \frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $q > 2$, on obtient une majoration de r .

REFERENCES

- [1] J. Bourgain, On the Dunford-Pettis property, Proc. A.M.S., à paraître.
- [2] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977) 53-94.
- [3] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, On the isomorphic classification of injective Banach lattices, Advances in Math. (Supplementary Studies) 1981, à paraître.