

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

Unicité de certaines bases inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 4, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A4_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

UNICITE DE CERTAINES BASES INCONDITIONNELLES

J. BOURGAIN

(Université Libre de Bruxelles)

Il est bien connu que les espaces c_0 , ℓ^1 et ℓ^2 ont une unique base inconditionnelle. Il est vraisemblable que si on introduit les classes \mathfrak{X}_n en posant $\mathfrak{X}_1 = \{c_0, \ell^1, \ell^2\}$ et \mathfrak{X}_{n+1} les espaces obtenus par sommes directes au sens c_0, ℓ^1, ℓ^2 des membres de \mathfrak{X}_n , on a l'unicité de la structure inconditionnelle pour tous ces espaces. Pourtant, même au niveau \mathfrak{X}_2 , la question n'est pas encore complètement résolue. En usant essentiellement d'une technique de décomposition introduite dans [3], J. Lindenstrauss et L. Tzafriri ont résolu le problème affirmativement pour les espaces $\oplus_{c_0} \ell^2$ et $\oplus_{\ell^1} \ell^2$. Nous nous proposons ici de traiter le cas $\oplus_{c_0} \ell^1$. Donc

Théorème 1 : Les espaces $\oplus_{c_0} \ell^1$ et $\oplus_{\ell^1} c_0$ ont la propriété d'unicité de la structure inconditionnelle.

La démonstration du Th. 1 emploie entre autre la méthode des "produits" utilisée dans [1] afin de montrer que l'espace $\oplus_{\infty} L^1$ possède la propriété de Dunford-Pettis.

L'espace $\oplus_{c_0} \ell^1$ se comporte différemment de ℓ^1 . Par exemple, il existe dans $\oplus_{c_0} \ell^1$ des sous-espaces hilbertiens n-dimensionnels complémentés de norme const. $\sqrt{\log n}$, ce qui suggère que la démonstration du Th. 1 sera assez délicate. Mentionnons encore qu'une application plus quantitative de la même technique des "produits" permet de montrer qu'en fait $\sqrt{\log n}$ donne la borne inférieure et donc que les sous-espaces $\ell^2(n)$ de $\oplus_{c_0} \ell^1$ obtenus dans [2] par un argument probabiliste sont les mieux complémentés \rightarrow (J. Lindenstrauss).

Le résultat étant établi pour $\oplus_{c_0} \ell^1$, on l'obtient pour $\oplus_{\ell^1} c_0$ par dualité.

Nous allons utiliser le résultat intermédiaire suivant, qui se démontre comme dans le cas $\oplus_{c_0} \ell^2$ (voir [3], lemme 2).

Lemme 1 : Soit $(\xi_i)_{i=1,2,\dots}$ une base inconditionnelle de $\oplus_{c_0} \ell^1$. Il existe alors $\delta > 0$ et une partition (D_r) des entiers positifs telle que

(i) la partition donne une décomposition au sens c_0 , c-à-d.

$$\|\Sigma' x_r\| \sim \sup_r \|x_r\| \quad \text{si } x_r \in [\xi_i ; i \in D_r] .$$

(ii) Pour tout r , il existe une coordonnée $k = k_r$ telle que

$$\|\xi_i(k)\|_1 \geq \delta \quad \text{pour } i \in D_r .$$

Afin de terminer la démonstration, il nous reste à montrer que les espaces $[\xi_i ; i \in D_r]$ sont uniformément isomorphes à $\ell^1(D_r)$. Ceci sera une conséquence du fait suivant

Lemme 2 : Soit $\delta > 0$ et (F_i) une suite inconditionnelle dans $\bigoplus_\infty L^1$ telle que

1. $[F_i, i = 1, 2, \dots]$ est complémenté dans $\bigoplus_\infty L^1$ par une projection P
2. $\|\Sigma a_i F_i\| \geq \delta (\sum |a_i|^2)^{1/2}$ pour toute suite scalaire (a_i) .

Alors (F_i) est une suite ℓ^1 .

Remarque : Sous "inconditionnel" nous entendons "K-inconditionnel" pour une constante $K < \infty$. Dans le lemme 2, la constante d'équivalence ne dépend que de δ , K et $\|P\|$. On peut aussi formuler le lemme pour des suites finies.

Soit (G_i) la suite image par P^* de la base duale de (F_i) .

Donc

3. $\langle F_i, G_j \rangle = \delta_{ij}$
4. $\|F\| \sim \sup_{\|G\| \leq 1} \langle F, G \rangle \quad \text{pour } F \in [F_i] \text{ et } G \in [G_i] .$

A tout $F = \sum a_i F_i$ de $[F_i]$ nous associons la "fonction carrée"

$$S(F) = (\sum a_i^2 F_i^2)^{1/2}$$

ce qui est à nouveau un élément de $\bigoplus_\infty L^1$.

De même pour les éléments G de $[G_i] \subset \bigoplus_1 L^\infty$.

Lemme 3 : $\|F\|_{1,\infty} \sim \|S(F)\|_{1,\infty}$ et $\|G\|_{\infty,1} \sim \|S(G)\|_{\infty,1} .$

Démonstration : On obtient \geq par inconditionnalité. D'autre part, par Cauchy-Schwarz et dualité

$$\langle F, G \rangle \leq \langle S(F), S(G) \rangle \leq \|S(F)\|_{1,\infty} \|S(G)\|_{1,\infty} .$$

IV.3

Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ dans $\bigoplus_{\infty} L^1$, dénotons $[F] = \|f^1\|_1, \|f^2\|_1, \dots$. On introduit de manière analogue $[G]$ pour G dans $\bigoplus_1 L^{\infty}$.

Lemme 4 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M = M_{\varepsilon} < \infty$ et $\sigma = \sigma_{\varepsilon}$ dans ℓ_+^1 , tel que $\|\sigma\|_1 \leq M$ et

$$\|[G] - [G] \wedge \sigma\|_1 < \varepsilon \quad \text{pour tout } G \in [G_i] \text{ tel que } \|G\| \leq 1 .$$

Démonstration : Supposons l'énoncé faux. Par un argument standard, on obtient alors des sous-espaces $\ell^1(r)$ de $[G_i]$ complémentés dans $\bigoplus_1 L^{\infty}$ pour r arbitrairement grand. Donc, en dualisant, $[F_i]$ possèderait des sous-espaces ℓ^{∞} de grande dimension. Nous allons montrer que cela n'est pas possible. Soit donc Φ_1, \dots, Φ_r dans $[F_i]$ tel que

$$\left\| \sum c_s \Phi_s \right\|_{1,\infty} \sim \max |c_s| . \quad (*)$$

Soit pour tout $s = 1, \dots, r$

$$\Phi_s = \sum_i a(s)_i F_i$$

et considérons aussi un élément

$$\Psi_s = \sum_i b(s)_i G_i$$

de $[G_i]$, tel que

$$\|\Psi_s\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = \sum_i a(s)_i b(s)_i \sim \|\Phi_s\| \sim 1 .$$

Choisissons $\rho > 0$ petit, et introduisons pour $s = 1, \dots, r$ l'ensemble

$$A_s = \{k = 1, 2, \dots ; \|s(\Phi_s)^k\|_1 > \rho\} ,$$

où \cdot^k dénote la k -ième composante.

Alors

$$1 \sim \sum_i a(s)_i b(s)_i \sum_{k \in A_s} \langle F_i^k, G_i^k \rangle + \sum_{k \notin A_s} \sum_i a(s)_i b(s)_i \langle F_i^k, G_i^k \rangle$$

et, par Cauchy-Schwarz, le deuxième terme est dominé par

$$\sum_{k \notin A_s} \langle S(\Phi_s)^k, S(\Psi_s)^k \rangle \leq \rho \sum_k \|S(\Psi_s)^k\|_\infty = \rho \|S(\Psi_s)\|_{\infty, 1} \leq \rho .$$

D'autre part, on a aussi $\sum |a(s)_i| |b(s)_i| \lesssim 1$ par inconditionnalité. Donc, il existe i_s tel que

$$\sum_{k \in A_s} \|G_i^k\|_\infty \geq \sum_{k \in A_s} \langle F_i^k, G_i^k \rangle > \rho' , \quad (**)$$

où $\rho' > 0$ est une constante.

Utilisons maintenant le fait que Φ_1, \dots, Φ_r est une base ℓ^∞ . On déduit de (*) que

$$\int \|S(\sum \varepsilon_s(\omega) \Phi_s)\|_{1,\infty} d\omega \lesssim 1 .$$

Puisque

$$\int S(\sum \varepsilon_s(\omega) \Phi_s) d\omega \sim (\sum \|S(\Phi_s)\|^2)^{1/2} ,$$

on trouve pour toute composante k

$$\sum_s \|S(\Phi_s)^k\|_1^2 \lesssim 1$$

ce qui montre que

$$\rho^2 \operatorname{card} \{s = 1, \dots, r ; k \in A_s\} \lesssim 1 . \quad (***)$$

Une dualisation de (2) dans l'énoncé du Lemme 2 donne que

$$\left\| \sum_{s=1}^r G_i^s \right\|_{\infty, 1} \lesssim \sqrt{r} .$$

Mais, en usant de (**) et (***)

$$\begin{aligned} \|S(\sum_s G_i^s)\|_{\infty, 1} &= \sum_k \|S(\sum_s G_i^s)^k\|_\infty \\ &\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k \in A_t} \|S(\sum_s G_i^s)^k\|_\infty \\ &\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k \in A_t} \|G_i^k\|_\infty \geq r \rho^2 \rho' , \end{aligned}$$

ce qui mène à une contradiction pour $r \rightarrow \infty$.

Lemme 5 : $[F_i]$ se plonge dans L^1 et est donc de cotype 2.

Démonstration : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et soient M et σ comme dans le lemme 4. Fixons $F \in [F_i]$ et $G \in [G_i]$ tel que $\|G\| = 1$ et $\langle F, G \rangle \sim \|F\|$. Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ et $G = (g^1, g^2, \dots)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|F\| &\sim \sum \langle f^k, g^k \rangle \\ &\leq \sum \|f^k\|_1 \|g^k\|_\infty \\ &\leq \sum \sigma_k \|f^k\|_1 + \|\llbracket G \rrbracket - \llbracket G \rrbracket \wedge \sigma\|_1 \|F\| \\ &\leq \sum \sigma_k \|f^k\|_1 + \varepsilon \|F\|. \end{aligned}$$

L'opérateur $T : \bigoplus_{\infty} L^1 \rightarrow \bigoplus_1 L^1$ défini par $T(F) = (\sigma_1 f^1, \sigma_2 f^2, \dots)$ est de norme $\|\sigma\|_1$ et induit un isomorphisme sur $[F_i]$.

Le résultat suivant est un corollaire immédiat du lemme 5.

Lemme 6 : $\|\sum \Phi_s\|_{1,\infty} \gtrsim (\sum \|\Phi_s\|^2)^{1/2}$

$$\|\sum \Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim (\sum \|\Psi_s\|^2)^{1/2}$$

pour toutes bloc-sous-suites (Φ_s) de (F_i) et (Ψ_s) de (G_i) .

Notre but suivant est d'améliorer les inégalités du Lemme 6. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant (basé sur la technique des "produits") et qui est essentiellement démontré dans [1].

Lemme 7 : A tout $B < \infty$ et $\tau > 0$ correspond une fonction $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = \infty$ et la propriété suivante est satisfaite :

- Si Φ_1, \dots, Φ_n dans $\bigoplus_{\infty} L^1$ et Ψ_1, \dots, Ψ_r dans $\bigoplus_1 L^\infty$ sont tels que
1. $\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = 1$
 2. $\|\Phi_s\| \leq 1$
 3. $\|\sum c_s \Psi_s\| \leq B(\sum c_s^2)^{1/2}$ pour tous scalaires (c_s) ,

il existe une partie D de $\{1, 2, \dots, r\}$ tel que $\text{card}(D) > \gamma(r)$ et $\|\sum_{s \in D} \Phi_s\| > (\text{card } D)^{1-\tau}$.

Lemme 8 : Il existe $1 < p < 2$ tel que

$$\left[\begin{aligned} \left\| \sum \Phi_s \right\| &\geq (\sum \|\Phi_s\|^p)^{1/p} \\ \left\| \sum \Psi_s \right\| &\leq (\sum \|\Psi_s\|^q)^{1/q} \quad (q = p') . \end{aligned} \right.$$

Démonstration : Il suffit de montrer la première inégalité puisque la deuxième s'obtient par dualité. Celle-ci résultera des lemmes 6 et 7 par des arguments standard.

Si (Φ_s) est une bloc-sous-suite normalisée de (F_i) , on peut trouver une bloc-sous-suite (Ψ_s) de (G_i) telle que $\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = 1 \sim \|\Psi_s\|$. La condition (3) du lemme 7 est réalisée par (2) du lemme 6 pour une certaine constante $B < \infty$. Soit $\tau = 1/4$ et $\gamma = \gamma_{B, \tau}$ comme dans le Lemme 7. On obtient donc une sous-famille $(\Phi_s)_{s \in D}$ où

$$\text{card } (D) \geq \gamma(r) \quad \text{et} \quad \left\| \sum_D \Phi_s \right\|_{1, \infty} \geq \text{card } (D)^{3/4} .$$

Choisissons un entier t suffisamment grand et $k > 0$ tel que

$$\gamma(t/2)^{1/4} > t^k .$$

Supposons maintenant que $(\Phi_s)_{1 \leq s \leq t}$ est une bloc-suite de (F_i) et $\|\Phi_s\| \geq \lambda$ pour tout $s = 1, \dots, t$. Par exhaustion, on peut introduire des parties disjointes S_π de $\{1, 2, \dots, t\}$ telles que

$$\text{card } (\bigcup_\pi S_\pi) \geq t/2$$

et pour tout π

$$\text{card } S_\pi \geq \gamma(t/2) \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{S_\pi} \Phi_s \right\| \geq (\text{card } S_\pi)^{3/4} \lambda .$$

On trouve en appliquant le lemme 6

$$\left\| \sum_{s=1}^t \Phi_s \right\| > (\sum_\pi \left\| \sum_{S_\pi} \Phi_s \right\|^2)^{1/2} \geq \gamma(t/2)^{1/4} (t/2)^{1/2} \lambda$$

et donc

$$\left\| \sum_{s=1}^t \Phi_s \right\| > t^{1/2 + k} \lambda .$$

L'itération de cette minoration donne

$$\left\| \sum_{s=1}^m \Phi_s \right\| > t^{m(1/2 + k)} \lambda .$$

On peut alors démontrer l'inégalité pour tout $p > \frac{2}{1+2k}$ en décomposant une suite (Φ_s) abstraite en ces parties

$$S_x = \{s = 1, 2, \dots ; 2^{-x-1} (\sum \|\Phi\|^p)^{1/p} < \|\Phi_s\| \leq 2^{-x} (\sum \|\Phi_s\|^p)^{1/p}\}$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Remarque : Le raisonnement précédent permet d'obtenir le lemme 8 pour n'importe quel $p > 1$, ce qui ne termine pourtant pas la démonstration du lemme 2.

Fin de la démonstration du lemme 2 : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et M et σ comme dans le lemme 4. Nous remplaçons chaque G_i par un $H_i \in \bigoplus_1 L^\infty$ tel que

1. $\|G_i - H_i\|_{\infty, 1} < \varepsilon$
2. $|G_i| \geq |H_i|$
3. $\|H_i\| \leq \sigma$

pour tout i ,

($| |$ dénote la valeur absolue dans le réticulé).

On remarque que $\|\max_i |H_i|\|_{\infty, 1} = \|\max_i \|H_i\|\|_1 \leq \|\sigma\|_1 \leq M$.

Nous introduisons ensuite un réarrangement et une partition S_1, S_2, \dots, S_r de $\{1, 2, \dots, n\}$ (choisisson arbitrairement grand) de telle manière que

4. Si $s = 1, \dots, r$ et $i \in S_s$, on a $<|F_i|, \max_{j \in S_s, j < i} |H_j|> < \frac{1}{2}$.
5. Si $1 \leq s < t \leq r$ et $i \in S_t$, alors $<|F_i|, \max_{j \in S_s} |H_j|> \geq \frac{1}{2}$.

La construction de cette partition est tout à fait directe.

Montrons que pour s fixé

$$\left\| \sum_{i \in S_s} a_i F_i \right\| > \sum_{i \in S_s} |a_i| . \quad (*)$$

On obtient en effet par (4) et (1)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{S_s} a_i F_i \right\| &\sim \|S(\sum a_i F_i)\|_{1,\infty} \\
&\gtrsim \langle S(\sum a_i F_i), \max_{S_s} |H_i| \rangle \\
&\geq \sum_{i \in S_s} |a_i| \langle |F_i|, |H_i| \rangle - \max_{j \in S_s, j < i} |H_j| \\
&\geq \sum_{S_s} |a_i| \langle F_i, H_i \rangle - \frac{1}{2} \sum_{S_s} |a_i| \\
&\geq (1 - \frac{1}{2} - \varepsilon) \sum |a_i| .
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à obtenir une borne sur r .

D'abord, en dualisant (*), on trouve pour $s = 1, \dots, r$

$$\left\| \sum_{S_s} b_i G_i \right\|_{\infty, 1} \lesssim \max |b_i| ,$$

d'où

$$\|\Psi_s\|_{\infty, 1} \lesssim 1 \text{ en posant } \Psi_s = \sum_{S_s} G_i .$$

Il découle alors du lemme 8 que

$$\left\| \sum_{i=1}^n G_i \right\|_{\infty, 1} = \left\| \sum_{s=1}^r \Psi_s \right\|_{\infty, 1} \lesssim r^{\frac{1}{q}} .$$

Choisissons $i^* \in S_r$. Alors, par (5)

$$\begin{aligned}
\frac{r-1}{2} &\leq \langle |F_{i^*}|, \sum_{s=1}^{r-1} \max_{j \in S_s} |H_j| \rangle \\
&\leq \sqrt{r} \langle |F_{i^*}|, (\sum_i |H_i|^2)^{1/2} \rangle \\
&\leq \sqrt{r} \left\| (\sum_i |G_i|^2)^{1/2} \right\|_{\infty, 1} \lesssim r^{\frac{1}{2} + \frac{1}{q}} .
\end{aligned}$$

Puisque $q > 2$, on obtient une majoration de r .

REFERENCES

- [1] J. Bourgain, On the Dunford-Pettis property, Proc. A.M.S., à paraître.
- [2] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977) 53-94.
- [3] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, On the isomorphic classification of injective Banach lattices, Advances in Math. (Supplementary Studies) 1981, à paraître.