

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. GATESOUBE

Problèmes de complémentation de sous-algèbres dans l'algèbre des séries de Fourier en deux variables absolument convergentes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 5, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A5_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

PROBLEMES DE COMPLEMENTATION DE SOUS-ALGEBRES

DANS L'ALGEBRE DES SERIES DE FOURIER

EN DEUX VARIABLES ABSOLUMENT CONVERGENTES

M. GATESOUBE

(Université de Nantes)

A étant une algèbre de Banach commutative, B une sous-algèbre fermée dans A, on dira que B est bien complémenté dans A s'il existe une projection linéaire continue P de A sur B telle que pour tout a dans A et tout b dans B on ait

$$P(ab) = b P(a) \quad .$$

On dira alors que P est une espérance conditionnelle de A sur B.

En particulier considérons un espace compact Ω , la tribu borélienne $\mathcal{A}$ de Ω , et $\mathcal{B}$ une sous-tribu. Soit A une algèbre de Banach topologiquement contenue dans l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$ de toutes les fonctions continues sur Ω à valeurs complexes. Soit B la sous-algèbre fermée de A constituée par les fonctions de A qui sont $\mathcal{B}$ -mesurables. Soit $d\mu$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ l'espérance conditionnelle au sens des probabilités projection orthogonale de $L^2(\Omega; \mathcal{A}; d\mu)$ sur $L^2(\Omega; \mathcal{B}; d\mu)$.

On peut se demander si la restriction de $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ à A est un endomorphisme continu dans A. Si la réponse est positive, B est bien complémenté par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$.

§ I -

On se place dans le cas particulier suivant : $\mathbb{T}$ désigne le tore à une dimension identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $A(\mathbb{T})$ désigne l'algèbre de Banach des séries de Fourier 2π -périodiques absolument convergentes :

$$f(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{ipx}$$

avec la norme $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_p |a_p| < +\infty$ et le produit ponctuel.

Ω est le tore à deux dimensions $\mathbb{T}^2$ identifié à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $A = A(\mathbb{T}^2)$ est l'algèbre de Banach des séries de Fourier en deux variables, 2π -périodique en chacune d'elles, absolument convergentes :

$$f(x, y) = \sum_{p, q} a_{p, q} e^{i(px+qy)}$$

avec la norme $\|f\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{p, q} |a_{p, q}| < +\infty$ et le produit ponctuel.

Choisissons une application continue φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $e^{i\varphi}$ appartienne à $A(\mathbb{T})$. On associe à φ l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ définie par

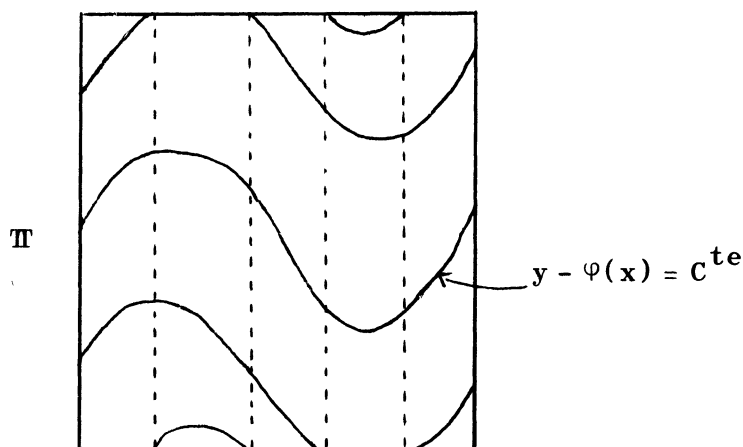
$$\Phi(x, y) = y - \varphi(x) \quad .$$

$\mathcal{B}$ est la sous-tribu des boréliens de $\mathbb{T}^2$ correspondant à l'image réciproque par Φ des boréliens de $\mathbb{R}$.

La sous-algèbre B de $A(\mathbb{T}^2)$ est l'ensemble des fonctions de A constantes sur les lignes de niveaux de $\mathbb{T}^2$ correspondant aux lignes de niveaux de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\Phi(x, y) = c^{te} \quad .$$

B est donc l'ensemble des fonctions de A de la forme $F \circ \Phi$, où F est une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Désignons par $\tilde{B}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions F telles que $F \circ \Phi$ appartienne à A .



Par transport de structure $\tilde{B}$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre de Banach B , avec la norme $\|F\|_{\tilde{B}} = \|F \circ \Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)}$. Pour $x = x_0$

fixé, la fonction $F(\Phi(x_0, y)) = F(y - \varphi(x_0))$ est une fonction de $A(\mathbb{T})$ en la variable y . La fonction F est donc elle-même une fonction de $A(\mathbb{T})$, c'est une série de Fourier

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \sum_n |a_n| < +\infty \quad . \quad (1)$$

$F \circ \Phi$ étant une fonction de $A(\mathbb{T}^2)$, c'est une série de Fourier

$$F(\Phi(x, y)) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}^2} b_{p, q} e^{i(px+qy)}, \quad (2)$$

avec
$$\|F \circ \Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{p, q} |b_{p, q}|. \quad (3)$$

D'après (1) et (2) on a

$$\sum_n a_n e^{in(y - \varphi(x))} = \sum_q e^{iqy} \left(\sum_p b_{p, q} e^{ipx} \right)$$

donc
$$a_n e^{-in\varphi(x)} = \sum_p b_{p, n} e^{ipx} \quad (4)$$

et
$$|a_n| \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_p |b_{p, n}|. \quad (5)$$

Ainsi, d'après (3) et (5) :

$$\|F \circ \Phi\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_{n, p} |b_{p, n}| = \sum_n |a_n| \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}. \quad (6)$$

Posons $\omega(n) = \|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$, on remarque que $\|e^{-in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq 1$, et que ω est un poids sous-multiplicatif sur $\mathbb{Z}$:

$\omega(n_1 + n_2) \leq \omega(n_1) \omega(n_2)$ pour tout couple (n_1, n_2) de $\mathbb{Z}^2$.

On associe à ω l'algèbre de Banach $A(\mathbb{T}; \omega)$ (dite algèbre à poids, ou algèbre de Beurling) des séries de Fourier 2π -périodiques absolument convergentes avec le poids ω :

$$F(t) = \sum_n a_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \|F\|_{A(\mathbb{T}; \omega)} = \sum_n |a_n| \omega(n) < +\infty.$$

Les calculs précédents montrent que $\tilde{B}$ est identique à $A(\mathbb{T}; \omega)$:

Proposition 1 : La sous-algèbre de $A(\mathbb{T}^2)$ des fonctions constantes sur les lignes de niveaux $y - \varphi(x) = C^{te}$, est isométriquement isomorphe à l'algèbre à poids $A(\mathbb{T}; \omega)$ des séries de Fourier 2π -périodiques absolument convergentes avec le poids ω :

$$F(t) = \sum a_n e^{int},$$

avec
$$\|F\|_{A(\mathbb{T}; \omega)} = \|F(y - \varphi(x))\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \sum_n |a_n| \omega(n)$$

où $\omega(n) = \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$.

La sous-algèbre B dépendant de φ sera notée B_φ . Remarquons que si la série de Fourier de la fonction $e^{i\varphi}$ choisie continue et 2π -périodique n'était pas de plus choisie absolument convergente, contrairement à l'hypothèse faite, c'est-à-dire si φ n'était pas choisie assez régulière, alors la sous-algèbre B des fonctions de $A(\mathbb{T}^2)$ constantes sur les lignes de niveaux $y - \varphi(x) = C^{te}$, serait réduite à la sous-algèbre triviale des fonctions constantes sur $\mathbb{T}^2$.

La proposition 1 permet facilement de montrer :

Proposition 2 : Pour toute application φ , B_φ est complété dans $A(\mathbb{T}^2)$.

Démonstration : En dehors du cas trivial où B_φ est réduit aux constantes, on utilise le résultat général suivant : dans un espace $L^1(X; \mu)$ un sous-espace fermé E qui est lui-même isométriquement isomorphe à un espace $L^1(Y; \nu)$, est complété dans $L^1(X; \mu)$. (Le résultat vaut encore si E est isomorphe à $L^1(Y; \nu)$ avec une distance d'isomorphisme assez proche de 1 : Théorème de L. Dor (Ann. of Math. (1975)). Ici $A(\mathbb{T}^2)$ est isométriquement isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ et B_φ , sous-espace fermé de $A(\mathbb{T}^2)$, est isométrique à $\ell^1(\mathbb{Z}; \omega)$ d'après la proposition 1.

On peut, sans utiliser ce résultat général, donner une démonstration directe, suivant une idée de N. Leblanc (communication orale), de la complémentation, démonstration qui a l'avantage d'explicitier une projection : pour tout p de $\mathbb{Z}$, on développe en série de Fourier $e^{-ip\varphi}$:

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n c(n, p) e^{inx} .$$

Posons $\alpha(n, p) = 0$ si $c(n, p) = 0$

et sinon
$$\alpha(n, p) = \frac{1}{\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}} \times \frac{\overline{c(n, p)}}{|c(n, p)|} .$$

On définit une application linéaire continue P de norme 1 de $A(\mathbb{T}^2)$ dans B_φ en posant pour tout couple (n, p) de $\mathbb{Z}^2$:

$$P(e^{i(nx+py)}) = \alpha(n, p) e^{ip(y-\varphi(x))} ,$$

car

$$\|e^{ip(y-\varphi(x))}\|_{A(\mathbb{T}^2)} = \|e^{ipy}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{-ip\varphi(x)}\|_{A(\mathbb{T})} = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \quad .$$

P est une projection sur B_φ car pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} P(e^{ip(y-\varphi(x))}) &= P\left(\sum_n c(n,p) e^{i(nx+py)}\right) \\ &= \frac{1}{\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}} \sum_n c(n,p) \frac{\overline{c(n,p)}}{|c(n,p)|} e^{ip(y-\varphi(x))} \\ &= e^{ip(y-\varphi(x))} \quad . \end{aligned}$$

§ II -

On peut se demander si B_φ est bien complété. Bien que cette propriété ait un caractère algébrique, la réponse dépend de la régularité de φ : nous verrons que si φ est de classe C^2 alors B_φ est bien complété, mais qu'il n'en est pas de même si φ est linéaire par morceaux (et non linéaire). Pour donner une condition nécessaire et suffisante de bonne complémentation, précisons quelques notations : $PM(\mathbb{T})$ désigne l'espace dual de $A(\mathbb{T})$, le produit scalaire de dualité d'une forme linéaire S , dite pseudo-mesure sur $\mathbb{T}$, avec une fonction f de $A(\mathbb{T})$ est

$$\langle S, f \rangle = \sum_n \hat{S}(-n) \hat{f}(n) \quad ,$$

où $\hat{S}(n) = \langle S, e^{-int} \rangle$ et $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt$ sont les n -ièmes coefficients de Fourier respectivement de S et f . La norme de la pseudo-mesure S est

$$\|S\|_{PM(\mathbb{T})} = \sup_n |\hat{S}(n)| \quad .$$

$PM(\mathbb{T})$ est un module sur $A(\mathbb{T})$: S et g appartenant respectivement à $PM(\mathbb{T})$ et à $A(\mathbb{T})$, gS est la pseudo-mesure sur $\mathbb{T}$ définie pour tout f de $A(\mathbb{T})$ par :

$$\langle gS, f \rangle = \langle S, fg \rangle$$

et
$$\|gS\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \|S\|_{PM(\mathbb{T})} .$$

Avec ces notations on a :

Proposition 3 : B_p est bien complété si et seulement si il existe une pseudo-mesure $S \neq 0$ dans $PM(\mathbb{T})$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C .$$

Corollaire de la proposition 3 : A chaque fonction θ de $A(\mathbb{T})$ telle que $\langle S, \theta \rangle \neq 0$, on peut associer une espérance conditionnelle P_θ qui à toute fonction f de $A(\mathbb{T})$ font correspondre la fonction de B_φ :

$$(P_\theta f)(x, y) = \langle \frac{\theta}{\langle S, \theta \rangle} S, f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x)) \rangle_t$$

(le produit scalaire de dualité étant pris, pour (x, y) fixés, en la variable t).

Démonstration : La condition de la proposition 3 est équivalente à l'existence d'une pseudo-mesure U sur $\mathbb{T}$ vérifiant

$$\langle U, 1 \rangle = 1 , \quad (1)$$

et d'une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}U\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C_1 . \quad (2)$$

En effet si S satisfait la condition de la proposition 3, en prenant θ dans $A(\mathbb{T})$ telle que $\langle S, \theta \rangle \neq 0$, la pseudo-mesure $U = \frac{\theta S}{\langle S, \theta \rangle}$ vérifie (1) et (2), car

$$\|e^{ip\varphi}U\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{|\langle S, \theta \rangle|} \|\theta\|_{A(\mathbb{T})} \|e^{ip\varphi}S\|_{PM(\mathbb{T})} .$$

1ère étape : Condition suffisante. Supposons qu'il existe une pseudo-mesure U sur $\mathbb{T}$ ayant les propriétés (1) et (2). Pour tout couple (n, p) de $\mathbb{Z}^2$ définissons

$$P(e^{i(nx+py)}) = \langle S, \exp i[nt + p(\varphi(t) + y - \varphi(x))] \rangle_t ,$$

le produit scalaire de dualité étant pris, pour (x, y) fixés, en la

variable t . On a

$$P(e^{i(nx+py)}) = \langle S, e^{i(nt+p\varphi(t))} \rangle e^{ip(y-\varphi(x))}$$

$$\text{d'où} \quad \|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\pi)} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C_1.$$

Donc P prolongé par linéarité à $A(\mathbb{T}^2)$ est continue de norme $\|P\| \leq C_1$, et c'est une projection car

$$(Pf)(x,y) = \langle S, f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x)) \rangle_t$$

et si $f(x,y) = F(y - \varphi(x))$, on obtient $Pf = f$.

(Remarquons qu'on a nécessairement $C_1 \geq 1$.)

2ème étape : Condition nécessaire. Supposons B_φ bien complété par P , projection linéaire continue de $A(\mathbb{T}^2)$ sur B_φ . Soit $\mathfrak{J}$ l'isométrie de B_φ sur $\tilde{B}_\varphi = A(\mathbb{T}; \omega)$ qui à toute fonction $F(y - \varphi(x))$ de B_φ fait correspondre la fonction F de $A(\mathbb{T}; \omega)$ et soit $\tilde{P} = \mathfrak{J} \circ P$. Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{Z}^2$ notons $\theta_{n,p}$ la fonction $\tilde{P}(e^{i(nx+py)})$ appartenant à $A(\mathbb{T}; \omega)$, dont le développement en série de Fourier est

$$\theta_{n,p}(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a(n,p,\ell) e^{i\ell t} \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad \|\theta_{n,p}\|_{A(\mathbb{T}; \omega)} = \sum_{\ell} |a(n,p,\ell)| \omega(\ell) = \|P(e^{i(nx+py)})\|_{A(\mathbb{T}^2)} \leq \|P\|$$

$$\text{où} \quad \omega(\ell) = \|e^{i\ell\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Posons

$$e^{-ip\varphi(x)} = \sum_n c(n,p) e^{inx},$$

$$\text{d'où} \quad e^{ip(y-\varphi(x))} = \sum_n c(n,p) e^{i(nx+py)},$$

$$\text{donc} \quad e^{ipt} = \sum_n c(n,p) \theta_{n,p}(t). \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a

$$\text{et} \quad \begin{cases} \sum_n c(n,p) a(n,p,\ell) = 0 & \text{si } \ell \neq p \\ \sum_n c(n,p) a(n,p,p) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Pour tout triplet (n,p,ℓ) de $\mathbb{Z}^3$ on a :

$$|a(n, p, \ell)| \leq \|\theta_{n, p}\|_{\infty} \leq \|\theta_{n, p}\|_{A(\mathbb{T}; \omega)} \leq \|P\| \quad ,$$

ce qui permet de définir pour tout couple (p, ℓ) de $\mathbb{Z}^2$, une pseudo-mesure $V(p, \ell)$ sur $\mathbb{T}$ par $\hat{V}_{(p, \ell)}(-n) = a(n, p, \ell)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. On a ainsi

$$\sum_n c(n, p) a(n, p, \ell) = \sum_n \hat{V}_{(p, \ell)}(-n) c(n, p) = \langle V(p, \ell), e^{-ip\varphi} \rangle \quad ;$$

donc (3) équivaut à :

$$\text{et} \quad \begin{cases} \langle V(p, \ell), e^{-ip\varphi} \rangle = 0 & \text{si } \ell \neq p \\ \langle V(p, p), e^{-ip\varphi} \rangle = 1 & . \end{cases} \quad (3')$$

$$\text{De plus} \quad \sum_{\ell} |a(n, p, \ell)| \omega(\ell) \leq \|P\| \quad ,$$

$$\text{donc} \quad \sum_{\ell} |\hat{V}_{(p, \ell)}(-n)| \omega(\ell) \leq \|P\| \quad ,$$

$$\text{et a fortiori} \quad |\hat{V}_{(p, p)}(-n)| \omega(p) \leq \|P\|$$

$$\text{d'où} \quad \|V(p, p)\|_{PM(\mathbb{T})} \omega(p) \leq \|P\| \quad . \quad (4)$$

Puisque P est une espérance conditionnelle on a pour tout triplet (n, p, k) de $\mathbb{Z}^3$:

$$\tilde{P}(e^{ik(y-\varphi(x))} e^{i(nx+py)}) = e^{ikt} \theta_{n, p}(t)$$

$$\text{or} \quad e^{ik(y-\varphi(x))} e^{i(nx+py)} = \sum_j c(j, k) e^{i(j+n)x} e^{i(k+p)y} \quad (5)$$

appliquons $\tilde{P}$ en utilisant l'expression

$$\theta_{n, p}(t) = \sum_{\ell} \langle V(p, \ell), e^{inu} \rangle_u e^{i\ell t} \quad (6)$$

on a d'après (5) et (6)

$$\begin{aligned} e^{ikt} \sum_q \langle V(p, q), e^{inu} \rangle e^{iqt} &= \sum_j c(j, k) \sum_{\ell} \langle V(k+p, \ell), e^{i(j+n)u} \rangle e^{i\ell t} \\ &= \sum_{\ell} \langle V(k+p, \ell), e^{inu} e^{-ik\varphi(u)} \rangle e^{i\ell t} \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Car} \quad \sum_j c(j,k) e^{ij u} = e^{-ik\varphi(u)} .$$

L'égalité (7) entraîne que pour tout 4-uple (p,n,ℓ,k) de $\mathbb{Z}^4$

$$\langle V(p,\ell-k), e^{inu} \rangle = \langle V(k+p,\ell), e^{-ik\varphi(u)} e^{inu} \rangle ,$$

c'est-à-dire pour tout triplet (p,ℓ,k) l'égalité des pseudo-mesures :

$$V(p,\ell-k) = e^{-ik\varphi} V(k+p,\ell) .$$

En particulier prenons $p=0$, $\ell=k$ on a

$$V(0,0) = e^{-ik\varphi} V(k,k) \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{Z} .$$

Notons S cette pseudo-mesure $V(0,0)$, les relations (3') et (4)

$$\langle V(p,p), e^{-ip\varphi} \rangle = 1$$

$$\text{et} \quad \|V(p,p)\|_{PM(\mathbb{T})} \omega(p) \leq \|P\|$$

$$\text{montrent que } \langle S, 1 \rangle = 1 \text{ et } \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|P\|$$

$$\text{car } V(p,p) = e^{ip\varphi} S \text{ et } \omega(p) = \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} .$$

S possède donc les propriétés requises, ce qui achève de démontrer la proposition 3.

Lorsque B_φ est bien complété, on peut se demander s'il existe une espérance conditionnelle au sens des probabilités projetant A sur B_φ .

Voici une réponse partielle :

Proposition 4 : Soit $d\nu$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ et

$d\mu(x,y) = d\nu(x) \otimes dy$ qui est alors une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^2$.

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{Q})$ la sous-tribu des boréliens de $\mathbb{T}^2$ associée à la fonction $\phi(x,y) = y - \varphi(x)$. Soit $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^2; \mathcal{Q}; d\mu)$ sur $L^2(\mathbb{T}^2; \mathcal{B}; d\mu)$. $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ est une projection continue de $A(\mathbb{T}^2)$ sur B_φ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi} d\nu\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C , \quad (1)$$

$$\text{et on a} \quad \mathcal{E}^{\mathcal{B}}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x)) d\nu(t) . \quad (2)$$

Démonstration : Un calcul facile pour une fonction f continue sur $\mathbb{T}^2$ donne $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}(f)$ sous la forme (2). En particulier

$$\mathcal{E}^{\mathcal{B}}(e^{i(nx+py)}) = \left(\int_0^{2\pi} e^{int} e^{ip\varphi(t)} dv(t) \right) e^{ip(y-\varphi(x))} .$$

$\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$ est continue dans $A(\mathbb{T}^2)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout couple (n, p) de $\mathbb{Z}^2$

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{i(nt+p\varphi(t))} dv(t) \right| \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C$$

c'est-à-dire pour tout p de $\mathbb{Z}$:

$$\|e^{ip\varphi} dv\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C .$$

On peut alors démontrer :

[Proposition 5 : Si φ est de classe C^2 , B_φ est bien complété par une espérance conditionnelle au sens des probabilités.

Démonstration : Si φ est linéaire la proposition 4 s'applique avec

$$dv(x) = \frac{dx}{2\pi} \quad \text{car} \quad \|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = 1$$

$$\text{et} \quad \|e^{ip\varphi} dv\|_{PM(\mathbb{T})} = \|dv\|_{PM(\mathbb{T})} = 1 .$$

Si φ est non linéaire de classe C^2 , il existe un intervalle I de $\mathbb{T}$ et un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout t dans I on ait $|\varphi''(t)| \geq \alpha$.

On utilise alors le lemme suivant dû à Van der Corput (voir A. Zygmund, Trigonometric series, vol. 1, Cambridge reed. 1959 p. 197).

[Lemme : Soit f une fonction de classe C^2 à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$ et telle qu'il existe $\rho > 0$ avec $|f''(t)| \geq \rho$ pour tout t dans $[a, b]$. On a

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt \right| \leq \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\rho}} .$$

On applique ce lemme avec $I = [a, b]$, $f(t) = nt + p\varphi(t)$ de sorte que $f''(t) = p\varphi''(t)$, ainsi

$$\left| \int_I e^{i(nt+p\varphi(t))} dt \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|p|}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}} .$$

On prend $dv(t) = \frac{1}{|I|} \chi_I(t) dt$, χ_I fonction indicatrice de I et dt mesure de Lebesgue de $[0, 2\pi]$. On a donc

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{i(nt + p\varphi(t))} dv(t) \right| \leq \frac{C_1}{\sqrt{|p|}},$$

où C_1 ne dépend pas de n et de p , donc

$$\|e^{ip\varphi} dv\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1}{\sqrt{|p|}}. \quad (1)$$

Par ailleurs, si f et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{T})$, on a une inégalité classique (dite de Carlson) -voir par exemple J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer 1970 p. 76)-

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^{1/2} \times \|f'\|_{L^2(\mathbb{T})}^{1/2} + (1 + \sqrt{2}) \|f\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

on applique ceci avec $f(t) = e^{ip\varphi(t)}$ d'où une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq 1 + C_2 \sqrt{|p|}. \quad (2)$$

D'après (1) et (2) la proposition 4 s'applique et B_φ est bien complé-
menté par l'espérance conditionnelle au sens des probabilités :

$$f \rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f(t, \varphi(t) + y - \varphi(x)) dv(t).$$

Proposition 6 : Si φ est linéaire par morceaux et non linéaire B_φ n'est pas bien complé-
menté.

Démonstration : D'après la proposition 3, supposons qu'il existe une pseudo-mesure $S \neq 0$ sur $\mathbb{T}$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout p de $\mathbb{Z}$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \times \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \leq C. \quad (1)$$

Considérons le graphe de l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Choisissons un intervalle $[a, a+2\pi[$ tel que a soit l'abscisse d'un point anguleux du graphe (il en est de même pour $a + 2\pi$), et soit E l'ensemble

$$x_1 = a < x_2 < \dots < x_N$$

des abscisses croissantes des N points anguleux du graphe correspondant à l'intervalle $[a, a + 2\pi[$. $\mathbb{T}$ s'identifie à la réunion de E et des intervalles disjoints I_j , $j = 1, 2, \dots, N$ avec

$$I_j =]x_j, x_{j+1}[\quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N-1$$

et

$$I_N =]x_N, a + 2\pi[\quad .$$

Supposons le support de S non contenu dans E ; il existe alors une fonction f de $A(\mathbb{T})$ dont le support est disjoint de E , c'est-à-dire $\text{supp } f \subset \bigcup_{j=1, 2, \dots, N} I_j$ et telle que $\langle S, f \rangle \neq 0$.

Alors $\text{supp } f \cap I_j = K_j$ est un compact contenu dans I_j . Il est possible de choisir une fonction g_j , C^∞ , égale à 1 sur K_j , à support compact $\tilde{K}_j \subset I_j$. Alors $fg_j = f_j$ appartient à $A(\mathbb{T})$ et $f = f_1 + \dots + f_N$. Il existe au moins un indice j_0 tel que $\langle S, f_{j_0} \rangle \neq 0$. Ecrivons de deux façons le produit scalaire

$$\langle S, f_{j_0} \rangle = \langle e^{ip\varphi} S, e^{-ip\varphi} f_{j_0} \rangle \quad ,$$

$$\text{d'où} \quad |\langle S, f_{j_0} \rangle| \leq \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|e^{-ip\varphi} f_{j_0}\|_{A(\mathbb{T})} \quad . \quad (2)$$

Sur I_{j_0} on a $\varphi(x) = y_0 + \lambda_0 x$, y_0 et λ_0 constantes réelles donc

$$e^{-ip\varphi} f_{j_0} = e^{-ipy_0} e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0} \quad .$$

Or $A(\mathbb{T})$ est localement isomorphe à $A(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0}\|_{A(\mathbb{T})} \leq C_1 \|e^{-ip\lambda_0 x} f_{j_0}\|_{A(\mathbb{R})} = C_1 \|f_{j_0}\|_{A(\mathbb{R})} \quad ,$$

donc d'après (2)

$$|\langle S, f_{j_0} \rangle| \leq C_1 \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \|f_{j_0}\|_{A(\mathbb{R})} \quad ,$$

ce qui avec l'hypothèse (1) entraîne

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq \frac{CC_1}{|\langle S, f_{j_0} \rangle|} \|f_{j_0}\|_{A(\mathbb{R})} \quad .$$

D'après le théorème de Beurling et Helson, Math. Scand. 1, 120-126 (1953),

ceci est impossible si φ n'est pas linéaire. C'est donc que le support de S est contenu dans E . C'est dire que $S = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_N \delta_{x_N}$ est une somme de mesures de Dirac aux points $x_1, \dots, x_N$ (il ne peut y avoir de dérivées de mesure de Dirac car ce ne sont pas des pseudo-mesures). Pour tout $j = 1, \dots, N$, choisissons une fonction g_j appartenant à $A(\mathbb{T})$ dont le support rencontre E au seul point x_j et telle que $g_j(x_j) \neq 0$. On a

$$\langle e^{ip\varphi} S, g_j \rangle = \alpha_j e^{ip\varphi(x_j)} g_j(x_j)$$

donc $|\alpha_j| |g_j(x_j)| = |\langle e^{ip\varphi} S, g_j \rangle| \leq \|e^{ip\varphi} S\|_{PM(\mathbb{T})} \times \|g_j\|_{A(\mathbb{T})}$,

l'hypothèse (1) entraîne si $\alpha_j \neq 0$

$$\|e^{ip\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{C}{|\alpha_j| |g_j(x_j)|} \|g_j\|_{A(\mathbb{T})},$$

ce qui à nouveau est impossible d'après le théorème de Beurling et Helson. Donc $\alpha_j = 0$ pour $j = 1, \dots, N$ et ainsi $S = 0$, ce qui achève la démonstration.

REFERENCES

A. Beurling et Helson : Fourier Stieltjes transforms with bounded powers, Math. Scand. 1 (1953) 120-126.

J.P. Kahane : Séries de Fourier absolument convergentes, Springer 1970, p. 76.

A. Zygmund : Trigonometric series, vol. 1, Cambridge 1959, p. 197.

L. Dor : On projections in L_1 , Annals of Math. 102, 3 (1975) p. 463.
