

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

**Un espace  $\mathcal{L}^\infty$  jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon-Nikodym**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 4, p. 1-7*

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1978-1979\\_\\_\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A4_0)

© Séminaire d'analyse fonctionnelle  
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E  
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E  
1978-1979

UN ESPACE  $\mathcal{L}^\infty$  JOUISSANT DE LA PROPRIÉTÉ DE SCHUR  
-----  
ET DE LA PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM  
-----

J. BOURGAIN  
(Université de Bruxelles)



§ 1. PRELIMINAIRES SUR LES ESPACES  $\mathcal{L}^\infty$ .

Rappelons tout d'abord que si  $E$  et  $F$  sont deux espaces normés de même dimension finie, la distance  $d(E,F)$  de Banach-Mazur sera donnée par

$$d(E,F) = \inf\{\|u\| \|u^{-1}\| ; u : E \rightarrow F\} .$$

Pour  $n = 1, 2, \dots$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace  $\mathcal{L}_n^p$  sera l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni de la norme  $\|x\|_p = [ |x_1|^p + \dots + |x_n|^p ]^{1/p}$ .

Définition 1 : Supposons  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\lambda \geq 1$ . On dit que l'espace  $X$  est un espace  $\mathcal{L}_\lambda^p$  si pour tout sous-espace  $E$  de  $X$  de dimension finie, il existe un sous-espace  $F$  de  $X$  de dimension finie, tel que  $E \subset F$  et  $d(\mathcal{L}_n^p, F) \leq \lambda$  où  $n = \dim F$ . Si  $X$  est un  $\mathcal{L}_\lambda^p$ , pour tout  $\lambda' > \lambda$ , on dit que  $X$  est  $\mathcal{L}_{\lambda'}^p$ . Un espace  $\mathcal{L}^p$  est un  $\mathcal{L}_\lambda^p$  pour un certain  $\lambda \geq 1$ .

La théorie des espaces  $\mathcal{L}^p$  a été développée principalement par Lindenstrauss, Pełczyński et Rosenthal. Mentionnons quelques propriétés fondamentales.

Proposition 1 :  $X$  est  $\mathcal{L}^p$  ssi son dual  $X^*$  est  $\mathcal{L}^q$  ( $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ).

Proposition 2 : 1. Tout espace du type  $C(K)$  est un espace  $\mathcal{L}^\infty$ .

2.  $X$  est  $\mathcal{L}^\infty$  ssi son bidual  $X^{**}$  est un sous-espace complété d'un espace  $C(K)$ .

3. Un sous-espace complété d'un espace  $\mathcal{L}^\infty$  est un espace  $\mathcal{L}^\infty$ .

4. Si  $X$  est  $\mathcal{L}^\infty$ , alors  $X^*$  est faiblement séquentiellement complet (une suite de Cauchy dans  $X^*$ ,  $\sigma(X^*, X^{**})$  est faiblement convergente).

5. Tous les duals d'un espace  $\mathcal{L}^\infty$  ont la propriété de Dunford-Pettis.

Définition 2 : Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que  $X$  a la propriété d'extension compacte (resp. faiblement compacte) si la propriété

suivante est vérifiée :

Soit  $Y$  et  $Z$  des espaces de Banach tel que  $Y \subset Z$  et soit  $T: Y \rightarrow X$  un opérateur compact (resp. faiblement compact). Alors  $T$  admet une extension compacte (resp. faiblement compacte)  $\tilde{T}: Z \rightarrow X$  :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{T} & X \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{T} & \\
 Z & & 
 \end{array}$$

Les espaces  $\mathcal{L}^\infty$  se caractérisent également de la manière suivante :

Proposition 3 :  $X$  est  $\mathcal{L}^\infty$  ssi  $X$  a la propriété d'extension compacte.

Passons maintenant à la propriété d'extension pour les opérateurs faiblement compacts. On usera du résultat suivant dû à Davis, Figiel, Johnson et Pełczyński.

Proposition 4 : Soit  $A$  une partie faiblement compacte d'un espace  $X$ . Il existe alors un espace réflexif  $Y$  et un opérateur  $T: Y \rightarrow X$  tel que  $A$  soit contenu dans  $\{Ty ; y \in Y \text{ et } \|y\| \leq 1\}$ .

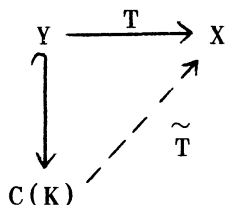
L'espace  $X$  a la propriété de Schur si les parties faiblement compactes de  $X$  sont compactes pour la norme.

Proposition 5 : Soit  $X$  un Banach. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  a la propriété d'extension faiblement compacte.
2.  $X$  est  $\mathcal{L}^\infty$  et a la propriété de Schur.

Démonstration : (2)  $\Rightarrow$  (1) trivialement, puisque un opérateur dans  $X$  est compact ssi il est faiblement compact.

(1)  $\Rightarrow$  (2), il suffit de démontrer que  $X$  a la propriété de Schur (ensuite on applique la prop. 3). Soit donc  $A$  une partie faiblement compacte de  $X$  et considérons  $T: Y \rightarrow X$  comme dans la prop. 4. L'espace  $Y$  est contenu dans un espace  $C(K)$  et puisque  $T$  est faiblement compact, le diagramme



factorise par un faiblement compact  $\tilde{T}: C(K) \rightarrow X$ .

On emploie maintenant la propriété de Dunford-Pettis des espaces  $C(K)$ . Puisque  $\{y \in Y; \|y\| \leq 1\}$  est faiblement compact dans  $C(K)$ , on en déduit que  $A \subset \{\tilde{T}y; y \in Y; \|y\| \leq 1\}$  est relativement compact pour la norme, ce qui achève la démonstration.

M. Zippin a démontré que si  $X$  est un espace  $\mathcal{L}_{1+}^{\infty}$ ,  $\dim X = \infty$ ,  $X$  a un sous-espace  $c_0$  complété. De là la conjecture suivante :  
 Tout espace  $\mathcal{L}^{\infty} X$ ,  $\dim X = \infty$ , contient  $c_0$  isomorphiquement. En somme, on ne connaissait pas d'espaces  $\mathcal{L}^{\infty}$  non isomorphes à un  $\mathcal{L}_{1+}^{\infty}$ .

La conjecture la plus forte est certainement le fait que seulement les espaces de dimension finie ont la propriété d'extension faiblement compacte. Puisque notre espace  $\mathcal{L}^{\infty}$  a la propriété de Schur, elle est fautive.

## § 2. PRELIMINAIRES SUR LA PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM.

**Définition 3** : Un espace de Banach  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym si la condition suivante est satisfaite : soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace probabilisé et  $F: \Sigma \rightarrow X$  une mesure à variation bornée et  $\mu$ -régulière. Il existe alors  $\xi \in L_X^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  tel que  $F(A) = \int_A \xi \, d\mu$  pour tout  $A \in \Sigma$ .

( $F$  a une dérivée).

**Proposition 6** :  $X$  est Radon-Nikodym ssi toute martingale uniformément bornée à valeurs dans  $X$  converge presque partout.

On peut démontrer que si chaque sous-espace séparable de  $X$  est sous-espace d'un dual séparable, alors  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym.

En fait, J.J. Uhl conjectura l'équivalence des deux propriétés. La construction d'espace  $\mathcal{L}^{\infty}$  jouissant de la propriété de Radon-

Nikodym nous fournit les premiers contre-exemples. Ceci est une conséquence du lemme suivant.

**Proposition 7** : Soit  $X \mathcal{L}^\infty$ ,  $\dim X = \infty$  et  $Y$  un Banach tel que  $X \subset Y^*$ . Alors  $Y$  contient un sous-espace  $\ell^1$ .

**Démonstration** : Soit  $i : X \rightarrow Y^*$  l'injection et  $T : Y \rightarrow X^*$  la restriction de  $i^*$  à  $Y \subset Y^{**}$ . On distingue les deux possibilités suivantes :

1.  $T$  est faiblement compacte. Dans ce cas  $T^* : X^{**} \rightarrow Y^*$  l'est également et donc  $T^*|_X = i$ . Mais ceci veut dire que  $X$  est réflexif, ce qui est impossible puisque  $X$  est Dunford-Pettis et  $\dim X = \infty$ .

2.  $T$  n'est pas faiblement compact. Usons du fait que  $X^*$  est faiblement séquentiellement complet pour conclure que  $T$  fixe une copie de  $\ell^1$  (en vertu du théorème de Rosenthal).

### § 3. UN ESPACE $\mathcal{L}^\infty$ ETRANGE.

La construction est directe dans ce sens que l'on n'utilise aucun résultat préalable. Elle ne fait également pas intervenir des techniques probabilistes. Nous nous bornons ici à l'énoncé du lemme principal. Fixons  $\lambda > 1$  et  $\delta > 0$  tel que  $1 + 2\delta\lambda \leq \lambda$ .

**Proposition 8** : Il existe une suite d'entiers strictement croissante  $(d_n)_n$ , une suite croissante  $(X_n)_n$  de sous-espaces de  $\mathcal{L}^\infty$  et des opérateurs  $j_n : E_n = \mathcal{L}_{d_n}^\infty \rightarrow X_n$ , tel que

$$1. \quad \|j_n\| \leq \lambda.$$

$$2. \quad j_n \text{ est un isomorphisme et } \pi_n j_n \text{ est l'identité sur } E_n$$

( $\pi_n : \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}_{d_n}^\infty$  est la restriction aux  $d_n$  premières coordonnées).

$$3. \quad \|x\| = \max(\|\pi_m x\| + \delta \|x - j_m \pi_m x\| ; m \leq n), \text{ si } x \in X_n.$$

Posons maintenant  $X = \overline{\bigcup_n X_n}$ . Il est clair que  $d(X_n, E_n) \leq \|j_n\| \|\pi_n\| \leq \lambda$ . On en déduit que  $X$  est un espace  $\mathcal{L}_{\lambda+}^\infty$ . On déduit aisément de (3) que

$$(*) \quad \|x\| \geq \|\pi_n x\| + \delta \|x - j_n \pi_n x\|$$

et en particulier

$$(**) \quad \|x\| \geq \|\pi_n x\| + \delta \operatorname{dist}(x, X_n)$$

pour tout  $x \in X$  et tout entier  $n > 0$ .

C'est à-partir des inégalités fondamentales (\*) et (\*\*) que les propriétés de Schur et de Radon-Nikodym s'obtiendront.

Proposition 9 :  $X$  est Schur.

Démonstration : Il est suffisant de montrer que pour toute suite  $(x_r)_r$  dans  $X$  tel que  $\|x_r\| = 1$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = 0$  ( $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ ), il existe une sous-suite équivalente à la base de  $\ell^1$ . Soit  $(\rho_s)_s$ ,  $\frac{1}{2} < \rho_s < 1$ , une suite strictement décroissante.

Il est aisé de construire une sous-suite  $(y_s)_s$  de  $(x_r)_r$  ainsi qu'une suite croissante  $(m_s)_s$  d'entiers, satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $y_1, \dots, y_s \in X_{m_s}$  .
2.  $\|\pi_{m_s}(y)\| \geq \frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \|y\|$  si  $y \in \operatorname{span}(y_1, \dots, y_s)$  .
3.  $\|\pi_{m_s}(y_{s+1})\| < \frac{\delta}{4\lambda}$  .

Nous démontrons par récurrence sur  $s$  la propriété suivante

$$\left\| \sum_{t=1}^s a_t y_t \right\| \geq \frac{\delta}{2} \rho_s \sum_{t=1}^s |a_t|$$

pour tout  $s$ -uple  $a_1, \dots, a_s$  de réels. Ceci achèvera la démonstration.

Le cas  $s = 1$  est évident.

En vertu de (\*), on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right\| &\geq \left\| \pi_{m_s} \left( \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right) \right\| + \delta \left\| \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t - j_{m_s} \pi_{m_s} \left( \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right) \right\| = \\ &\left\| \pi_{m_s} \left( \sum_{t=1}^s a_t y_t \right) + a_{s+1} \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| + \delta \left\| y_{s+1} - j_{m_s} \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| |a_{s+1}| \geq \\ &\left\| \pi_{m_s} \left( \sum_{t=1}^s a_t y_t \right) \right\| + \delta |a_{s+1}| - (1 + \delta\lambda) \left\| \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| |a_{s+1}| \geq \\ &\frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \left\| \sum_{t=1}^s a_t y_t \right\| + (\delta - 2\lambda \frac{\delta}{4\lambda}) |a_{s+1}| \geq \\ &\frac{\delta}{2} \rho_{s+1} \sum_{t=1}^s |a_t| + \frac{\delta}{2} |a_{s+1}| \geq \frac{\delta}{2} \rho_{s+1} \sum_{t=1}^{s+1} |a_t| \quad . \end{aligned}$$



**Proposition 10** :  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym.

**Démonstration** : Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace probabilisé et  $(\xi_n, \Sigma_n)_n$  une martingale uniformément bornée à valeurs dans  $X$ . Donc nous démontrons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$\int \text{dist}(\xi_n(t), X_m) \mu(dt) \leq \varepsilon$$

pour tout  $n$ .

La convergence de  $(\xi_n)_n$  s'obtient alors facilement en utilisant les critères bien connus sur la convergence des martingales vectorielles. Puisque  $(\xi_n)_n$  est une martingale,  $(\|\xi_n\|_1)_n$  est une suite croissante

et il existe donc  $n_0$  tel que  $\|\xi_{n_0}\|_1 \geq \sup_n \|\xi_n\|_1 - \frac{\varepsilon\delta}{2}$ . On déduit du lemme de Beppo-Lévy que  $\|\xi_{n_0}\|_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m \circ \xi_{n_0}\|_1$ . Choisissons  $m$  tel que

$\int \text{dist}(\xi_n(t), X_m) \mu(dt) \leq \varepsilon$  pour  $n = 1, \dots, n_0$  et en plus

$\|\xi_{n_0}\|_1 \leq \|\pi_m \circ \xi_{n_0}\|_1 + \frac{\varepsilon\delta}{2}$ . Fixons  $n > n_0$ . Pour tout  $t \in \Omega$  on obtient en

vertu de (\*\*)

$$\|\xi_n(t)\| \geq \|\pi_m \circ \xi_n(t)\| + \delta \text{dist}(\xi_n(t), X_m)$$

L'intégration donne

$$\|\xi_n\|_1 \geq \|\pi_m \circ \xi_n\|_1 + \delta \int \text{dist}(\xi_n(t), X_m) \mu(dt) .$$

Puisque  $(\pi_m \circ \xi_i)_i$  est une martingale (à valeurs dans  $E_m$ ), on a également  $\|\pi_m \circ \xi_n\|_1 \geq \|\pi_m \circ \xi_{n_0}\|_1$ . Donc

$$\delta \int \text{dist}(\xi_n(t), X_m) \mu(dt) \leq \|\xi_n\|_1 - \|\pi_m \circ \xi_{n_0}\|_1 \leq$$

$$\|\xi_n\|_1 - \|\xi_{n_0}\|_1 + \frac{\varepsilon\delta}{2} \leq \varepsilon\delta ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Remarque** : Une construction très voisine permet de démontrer l'existence d'un Banach  $X$  qui a les propriétés suivantes :

1.  $X^*$  est isomorphe à  $\ell^1$ .
2.  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym.

#### IV.7

3. Tout espace  $Y \subset X$ ,  $\dim Y = \infty$  contient un sous-espace réflexif  $Z$  de dimension infinie.

Ceci résout négativement une conjecture de Davis.

-----