

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

**Sur les espaces de Banach de dimension finie à distance extrême
d'un espace euclidien, d'après V. D. Milman et H. Wolfson**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A14_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SUR LES ESPACES DE BANACH DE DIMENSION FINIE
=====

A DISTANCE EXTREMALE D'UN ESPACE EUCLIDIEN,
=====

d'après V.D. Milman et H. Wolfson
=====

G. PISIER

Les résultats exposés ci-dessous ont pour origine le papier [3] de Milman et Wolfson. Dans cet article, les auteurs montrent que si un espace de Banach E de dimension n est à une distance (au sens de Banach-Mazur) extrême d'un espace euclidien, c'est-à-dire si $d(E, \ell_n^2) \geq \delta \sqrt{n}$ avec $\delta > 0$, alors E contient un sous-espace F de dimension $k = k(n, \delta)$ tel que $d(F, \ell_k^1) \leq 2$ et, pour tout $\delta > 0$ fixé, on a : $k(n, \delta) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

La démonstration originale a été simplifiée une première fois par W. Johnson et B. Maurey (cf. [3]). Plus tard, de nouvelles simplifications et diverses contributions (dues à W. Johnson, G. Schechtman, D. Lewis et l'auteur) ont permis d'obtenir un premier résultat concernant les constantes de projection. Ce n'est en fait que récemment que je me suis aperçu que la considération des nombres $e_n(X)$ permet de traiter simultanément la question des distances et celle des projections en complète analogie (cf. théorème 9 ci-dessous). Indépendamment (et sans doute avant moi) V. Milman avait abouti au même résultat.

Notations : Cet exposé est une suite naturelle de l'exposé X dont nous conservons les notations. Rappelons la définition de la "distance" de Banach-Mazur $d(E, F)$ de deux espaces de Banach E et F :

$$d(E, F) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| \}$$

l'infimum portant sur tous les isomorphismes T de E sur F . Rappelons aussi que si $u : X \rightarrow Y$ est un opérateur entre espaces de Banach, on note $u' : Y' \rightarrow X'$ son adjoint, $\pi_2(u)$ sa norme 2-sommante, et $\gamma_2(u)$ sa norme de factorisation par un Hilbert. On note $\Pi_2(X, Y)$ l'espace des opérateurs 2-sommants de X dans Y .

Commençons par un énoncé général :

Proposition 1 : Soient X un espace de Banach[♦], $C > 0$ une constante et n un entier fixés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall v : \ell_n^2 \rightarrow X, \pi_2(v) \leq C \pi_2(v')$.

♦ L'énoncé est valable dans le cas réel comme dans le cas complexe. Dans le cas complexe, ℓ_n^2 est l'espace euclidien complexe.

ii) Pour tout opérateur $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de rang $\leq n$, on a :

$$\forall (x_j)_j \in \ell^2(X) \quad \left(\sum_i \left\| \sum_j a_{ij} x_j \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \|A\| \left(\sum \|x_j\|^2 \right)^{1/2}$$

où $\{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ est la matrice associée à A (c'est-à-dire que, si l'on note e_i la base canonique de ℓ^2 , on a $a_{ij} = \langle e_i, A e_j \rangle$).

iii) Pour tout espace de Banach Z , pour tout sous-espace Y de X et tout opérateur $u: Y \rightarrow Z$ de rang $\leq n$, il existe une extension $\tilde{u}: X \rightarrow Z$ telle que

$$\tilde{u}|_Y = u \quad \text{et} \quad \gamma_2(\tilde{u}) \leq C \|u\| .$$

iv) Pour tout sous-espace $E \subset X$ de dimension $\leq n$, il existe une projection $P: X \rightarrow E$ telle que

$$\gamma_2(P) \leq C .$$

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii). Soit $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de rang $\leq n$. On a une factorisation de $A: \ell^2 \xrightarrow{A_1} \ell_n^2 \xrightarrow{A_2} \ell^2$ avec $A = A_2 A_1$ et $\|A_1\| \|A_2\| = \|A\|$. Soit $w: \ell^2 \rightarrow X$ défini par

$$w e_j = x_j \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

On voit facilement que $\pi_2(w') \leq (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$.

Posons $v = w A'_1$; d'après i) on a $\pi_2(v) \leq C \pi_2(v') \leq \|A_1\| \pi_2(w') \leq \|A_1\| (\sum \|x_j\|^2)^{1/2}$, donc :

$$\pi_2(w A') = \pi_2(w A'_1 A'_2) \leq \|A\| (\sum \|x_j\|^2)^{1/2} .$$

Par définition de $\pi_2(w A')$, on a :

$$\left(\sum_i \|w A'(e_i)\|^2 \right)^{1/2} \leq \pi_2(w A')$$

$$\text{c'est-à-dire : } \left(\sum_i \left\| \sum_j a_{ij} x_j \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \|A\| \left(\sum \|x_j\|^2 \right)^{1/2} .$$

Ce qui montre que i) $\Rightarrow$ ii).

ii) $\Rightarrow$ iii). Soit u, Y, Z comme en iii). D'après un résultat de Maurey (cf. le théorème 1.3 de l'exposé X de ce même séminaire)

il suffit de montrer que ii) implique : $\forall \{y_1, \dots, y_k\} \subset Y$,
 $\forall \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$

$$(1) \quad (y_j)_{j \leq k} \prec (x_i)_{i \leq m} \implies \sum \|u(y_j)\|^2 \leq C^2 \|u\|^2 \sum \|x_i\|^2 .$$

D'après le lemme 4.1 et la remarque 1.1 de l'exposé X, il existe un opérateur $A: \ell_m^2 \rightarrow \ell_k^2$ de rang $\leq n$ et de norme ≤ 1 tel que la matrice associée (a_{ij}) vérifie :

$$\forall j = 1, \dots, k \quad \sum_{\ell=1}^m a_{j\ell} x_\ell - y_j \in \text{Ker } u .$$

$$\text{Posons} \quad \tilde{y}_j = \sum_{\ell} a_{j\ell} x_\ell .$$

D'après ii), on a :

$$(\sum_j \|\tilde{y}_j\|^2)^{1/2} \leq C (\sum \|x_i\|^2)^{1/2} .$$

D'où

$$(\sum \|u(y_j)\|^2)^{1/2} = (\sum \|u(\tilde{y}_j)\|^2)^{1/2} \leq C \|u\| (\sum \|x_i\|^2)^{1/2} ,$$

ce qui est bien l'inégalité annoncée (1).

iii) $\Rightarrow$ iv). Trivial (prendre $u = \text{Id}_E$).

iv) $\Rightarrow$ i). Soit $v: \ell_n^2 \rightarrow X$ et soit E l'image de v . D'après iv), on peut factoriser v de la manière suivante :

$$\ell_n^2 \xrightarrow{v} X \xrightarrow{A} H \xrightarrow{B} X$$

où H est un Hilbert, $BAv = v$ et $\|A\| \|B\| \leq C$. La norme de Hilbert Schmidt, notée $\|w\|_{\text{HS}}$, d'un opérateur w entre deux espaces de Hilbert coïncide avec $\pi_2(w)$ (vérification facile) ; on a donc :

$$\|(Av)'\|_{\text{HS}} = \pi_2((Av)') ;$$

par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi_2(v) &= \pi_2(BAv) \leq \|B\| \pi_2(Av) = \|B\| \|Av\|_{\text{HS}} = \|B\| \|(Av)'\|_{\text{HS}} \\ &= \|B\| \pi_2((Av)') \\ &\leq \|B\| \|A\| \pi_2(v') \leq C \pi_2(v') . \end{aligned}$$

On obtient donc i). Ce qui termine la démonstration.

Notation 2 : Pour tout espace de Banach X et tout entier n , on note $e_n(X)$ le plus petit nombre C ayant les quatre propriétés équivalentes de la proposition précédente (e pour euclidien !).

Définition 3 : On dit qu'un espace X contient des ℓ_n^1 uniformément si :
 $\exists C \forall n \exists x_1, \dots, x_n \in X$ tels que :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq C \sum_{i=1}^n |\alpha_i| .$$

Autrement dit, X contient une suite de sous-espaces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $d(X_n, \ell_n^1) \leq C$.

Rappelons brièvement un résultat classique :

Proposition 4 : X contient des ℓ_n^1 uniformément si et seulement si son dual X' a la même propriété.

Démonstration : Supposons que X contient des ℓ_n^1 uniformément. Soit $X_n \subset X$ avec $d(X_n, \ell_{2^n}^1) \leq C$. On a $d(X'_n, \ell_{2^n}^\infty) \leq C$. Mais ℓ_n^1 est isométrique à un sous-espace de $\ell_{2^n}^\infty$, et X'_n s'identifie à un quotient de X' . En relevant dans X' les éléments de X'_n correspondant aux vecteurs de base de ℓ_n^1 , on trouve que X' contient des ℓ_n^1 uniformément. La réciproque est similaire.

Nous utiliserons un lemme très utile dû essentiellement à Brunel et Sucheston ([1] ; pour une démonstration explicite combiner [1] avec le lemme 1.5 de [2], cf. aussi les exposés de A. Brunel dans le séminaire Maurey-Schwartz 1973-74).

Lemme 5 : Soient $\delta > 0$ et n un entier. Il existe un entier $N = N(n, \delta)$ ayant la propriété suivante : de toute suite $(x_1, \dots, x_N)$ de N éléments d'un espace de Banach quelconque X vérifiant

$$\|x_i\| \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

et

$$\|x_i - x_j\| > \delta \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j ,$$

on peut extraire une suite notée $y_1, \dots, y_{2n}$ telle que si on pose $x'_j = y_{2j} - y_{2j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) la suite $(x'_j)_{j \leq n}$ est basique incondi-
nelle de constante ≤ 3 c'est-à-dire :

$$(2) \quad \forall (\alpha_j) \in \mathbb{R}^n \quad \forall (\varepsilon_j) \in \{-1, +1\}^n \quad \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \alpha_j x'_j \right\| \leq 3 \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x'_j \right\| .$$

(On a évidemment encore : $\delta < \|x'_j\| \leq 2 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$.)

De ce lemme, on peut déduire le suivant :

Lemme 6 : Soient X un espace de Banach, $u: X \rightarrow \ell_2$ un opérateur 2-sommant tel que $\pi_2(u) \leq 1$, et soit $x_1, \dots, x_N$ dans X avec $N = N(n, \delta)$ et :

$$\|u(x_i) - u(x_j)\| > \delta \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad i \neq j$$

$$\|x_i\| \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N .$$

Il existe alors $x'_1, \dots, x'_n$ dans X tels que

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\delta^2}{6} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i \right\| \leq 2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

c'est-à-dire que X contient un sous-espace $\frac{12}{\delta}$ -isomorphe à ℓ_n^1 .

Démonstration : On applique le lemme précédent (noter que $\|x_i - x_j\| > \|u(x_i) - u(x_j)\| > \delta$ si $i \neq j$) d'où $(x'_1, \dots, x'_n)$ vérifiant (2) avec $\|x'_j\| \leq 2$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Comme $\pi_2(u) \leq 1$, il existe une probabilité λ sur la boule unité de X' munie de $\sigma(X', X)$ telle que

$$\|u(x)\| \leq \left(\int |\langle x, \xi \rangle|^2 d\lambda(\xi) \right)^{1/2}$$

(cf. théorème 1.2 de l'exposé X ; c'est la "factorisation de Pietsch").
Remarquons que

$$\delta \leq \|u(x'_j)\| \leq \left(\int |\langle x'_j, \xi \rangle|^2 d\lambda(\xi) \right)^{1/2}$$

d'où, puisque $\|x'_j\| \leq 2$: $\delta \leq \sqrt{2} \left(\int |\langle x'_j, \xi \rangle|^2 d\lambda(\xi) \right)^{1/2}$

soit finalement $\int |\langle x'_j, \xi \rangle|^2 d\lambda(\xi) \geq \frac{\delta^2}{2}$.

On peut donc écrire : $\forall (\alpha_j) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{2} \sum_1^n |\alpha_j| &\leq \int \sum_1^n |\alpha_j| |\langle x'_j, \xi \rangle| d\lambda(\xi) \\
&= \int \max_{\varepsilon_j = \pm 1} \left| \langle \sum_1^n \varepsilon_j \alpha_j x'_j, \xi \rangle \right| d\lambda(\xi) \\
&\leq \sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_1^n \varepsilon_j \alpha_j x'_j \right\| \leq 3 \left\| \sum_1^n \alpha_j x'_j \right\|
\end{aligned}$$

la dernière inégalité d'après (2). cqfd

On peut maintenant énoncer le

Théorème 7 : Soit X un espace de Banach ne contenant pas de ℓ_n^1 uniformément. Alors, il existe une suite ω_n tendant vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ telle que : pour tout opérateur 2-sommant $u: X \rightarrow \ell^2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n(u) \leq \omega_n \pi_2(u)$$

où le nombre d'approximation $a_n(u)$ est défini par :

$$a_n(u) = \inf \{ \|u - Pu\| \} ,$$

l'infimum portant sur tous les projecteurs orthogonaux $P: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de rang $< n$.

Démonstration : Posons :

$$\omega_n = \sup \{ a_n(u) \mid u \in \Pi_2(X, \ell^2) \text{ et } \pi_2(u) \leq 1 \} .$$

Il s'agit de montrer que $\omega_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Supposons le contraire : alors

$\exists \delta > 0$ et $\forall N \in \mathbb{N} \exists u_N: X \rightarrow \ell^2$ avec $\pi_2(u_N) \leq 1$ mais $a_N(u_N) > \delta$. Fixons N . Nous allons montrer : $\exists x_1, \dots, x_N \in X$ tels que

$$(*) \quad \forall i \neq j \quad \|x_i\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|u_N(x_i) - u_N(x_j)\| > \delta .$$

On le montre par récurrence : puisque $\|u_N\| \geq a_N(u_N) > \delta$, on trouve $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leq 1$ et $\|u_N(x_1)\| > \delta$. Supposons que l'on a trouvé $x_1, \dots, x_m$ avec la propriété (*) ci-dessus et $m < N$; soit P la projection orthogonale sur le sous-espace de ℓ^2 engendré par $\{u_N(x_1), \dots, u_N(x_m)\}$. On a $\|u_N - Pu_N\| \geq a_N(u_N) > \delta$ donc $\exists x_{m+1} \in X$ tel que $\|x_{m+1}\| \leq 1$ et $\|(u_N - Pu_N)(x_{m+1})\| > \delta$; on a donc

$$\begin{aligned} \forall j \leq m \quad \|u_N(x_{m+1}) - u_N(x_j)\| &\geq \|(I - P)(u_N(x_{m+1}) - u_N(x_j))\| \\ &= \|(I - P)u_N(x_{m+1})\| > \delta . \end{aligned}$$

Ce qui établit l'hypothèse de récurrence à l'ordre $m+1$. Si l'on applique alors le lemme 6 à $(x_1, \dots, x_N)$ et u_N , on trouve -en supposant $N \geq N(\delta, n)$ - un sous-espace de X qui est $\frac{12}{\delta^2}$ -isomorphe à ℓ_n^1 . On obtient ainsi, puisque n est arbitraire, une contradiction avec l'hypothèse que X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément.

Remarque 8 : (i) On peut démontrer assez facilement que si un espace X vérifie la conclusion du théorème 7, alors nécessairement X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément.

(ii) Dans [4] ("added in proof"), on trouve le résultat suivant : un espace X ne contient pas ℓ_n^1 si et seulement si tout opérateur 2-sommant de X dans ℓ_n^2 est compact. Le théorème 7 apparaît comme la version locale de ce résultat de Rosenthal, et on pourrait d'ailleurs démontrer le théorème 7 par ultraproduit à partir de l'énoncé de Rosenthal.

Nous en venons au principal résultat de cet exposé :

Théorème 9 : Soit X un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément.
- (ii) $e_n(X)/\sqrt{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} \sup\{d(E, \ell_n^2) \mid E \subset X \text{ dim } E = n\} = 0$.
- (iv) Il existe une suite $\alpha_n > 0$ vérifiant : $\alpha_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et telle que : $\forall E \subset X, \text{ dim } E = n$ il existe une projection $P: X \rightarrow E$ avec $\|P\| \leq \alpha_n$.

Démonstration : C'est la partie (i) $\Rightarrow$ (ii) qui est intéressante : si X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément, d'après la proposition 4, il en est de même pour son dual X' ; donc, d'après le théorème 7, $\omega_n(X') \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ où

$$\omega_n(X') = \sup\{a_n(w) \mid w \in \Pi_2(X', \ell_n^2) \quad \pi_2(w) \leq 1\} .$$

Soit alors $u : \ell_n^2 \rightarrow X$ et soit $k \leq n$ un entier que nous déterminerons plus loin.

Par définition de $a_k(u')$, $\exists P : \ell_n^2 \rightarrow \ell_n^2$ projecteur de rang $< k$ tel que $\|u' - Pu'\| \leq a_k(u')$ donc

$$\|u - uP\| = \|u' - Pu'\| \leq a_k(u') .$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \pi_2(u) &\leq \pi_2(uP) + \pi_2(u - uP) \\ &\leq \|u\| \pi_2(P) + \|u - uP\| \pi_2(\text{Id}_{\ell_n^2}) \\ &\leq \|u\| \sqrt{k} + a_k(u') \sqrt{n} \end{aligned}$$

soit, puisque $\|u\| = \|u'\| \leq \pi_2(u')$ et $a_k(u') \leq \omega_k(X') \pi_2(u')$

$$\pi_2(u) \leq \left[\sqrt{\frac{k}{n}} + \omega_k(X') \right] \sqrt{n} \pi_2(u')$$

c'est-à-dire :
$$\frac{e_n(X)}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{k}{n}} + \omega_k(X') .$$

Il suffit donc de prendre par exemple k tel que

$$\sqrt{n} < k \leq \sqrt{n} + 1 ,$$

pour voir que $e_n(X)/\sqrt{n} \longrightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Montrons les autres implications : (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (ii) $\Rightarrow$ (iv) sont triviales.

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est évidente, si l'on sait que $d(\ell_n^1, \ell_n^2) = \sqrt{n} \forall n \geq 1$. Montrons pour finir que (iv) $\Rightarrow$ (i) : il est classique que $\ell_{2^n}^1$ contient un sous-espace E avec $d(E, \ell_n^2) \leq 2$, et $\|P\| \geq \delta \sqrt{n}$ pour toute projection P de $\ell_{2^n}^1$ sur E , avec $\delta > 0$ indépendant de n . (On peut prendre pour E le sous-espace engendré par les n premières fonctions de Rademacher considérées comme fonctions sur un ensemble à 2^n points.) Par conséquent, si X contient des ℓ_n^1 uniformément, on ne peut avoir (iv). Ce qui achève la démonstration.

Nous avons déjà signalé le problème suivant à l'exposé X :

Problème : Si $e_n(X)/\sqrt{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, existe-t-il $\alpha < 1/2$ tel que :

$$\sup_n \frac{e_n(X)}{n^\alpha} < \infty ?$$

D'après les résultats de König, Retherford et Tomczak-Jaegermann (cf. remarque 3.3 de l'exposé X de ce même séminaire) le problème précédent est équivalent au suivant :

Si X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément, existe-t-il $C < \infty$ et $\beta < 1/2$ tels que :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n u_{ij} x_j \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C n^\beta \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \right)^{1/2} \end{cases}$$

pour toute matrice orthogonale $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$?

En effet, en utilisant la remarque 3.3 de l'exposé X, on peut montrer que (3) entraîne : $e_n(X) \leq (K^2 \text{Log } n) C n^\beta$ pour tout $n \geq 2$. On peut remarquer que (3) est vrai en moyenne : si l'on intègre le carré du 1er membre de (3) par rapport à la mesure de Haar normalisée sur le groupe orthogonal, le résultat est inférieur à

$$\left\{ C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} \right\}^2$$

où C est une constante et $p > 1$ est tel que X est de type p .

On sait (cf. [2]) que tout espace qui ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément est nécessairement de type p pour un $p > 1$. Par analogie, on peut donc espérer une réponse positive au problème précédent. Par ailleurs, si X est de type p et de cotype q avec $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, alors les résultats présentés dans l'exposé X donnent une réponse positive.

Si l'on étudie la démonstration du théorème 9, on s'aperçoit qu'on a démontré le

Théorème 10 ([3]) : Pour tout $\delta > 0$, il existe une suite d'entiers $k_n(\delta)$ possédant les propriétés suivantes :

- (i) $k_n(\delta) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Tout espace E de dimension n tel que $d(E, \ell_n^2) \geq \delta \sqrt{n}$ contient un sous-espace F de dimension $k_n(\delta)$ tel que $d(F, \ell_{k_n(\delta)}^1) \leq 2$.

Le lecteur peut se reporter à [3] pour plus de précisions, en particulier sur l'ordre de grandeur de $k_n(\delta)$ en fonction de n et aussi sur le cas "isométrique" (i.e. le cas où $d(E, \ell_n^2) = \sqrt{n}$). Bien entendu, on a également un analogue du théorème 10 concernant les constantes de projection, nous laissons au lecteur le soin de l'énoncer.

REFERENCES

- [1] A. Brunel, L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, Math. Systems Theory 7 (1973) 294-299 et On J-convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces, T.A.M.S. 204 (1975) 79-90.
- [2] B. Maurey, G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.
- [3] V.D. Milman, H. Wolfson, Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space, Israël J. Math. 29 (1978) 113-131.
- [4] H.P. Rosenthal, Point-wise compact subsets of the first Baire class, Amer. J. Math. 99 (1977) 362-378.
