

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

**(Annexe n° 2) Un exemple concernant la super-réflexivité**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1974-1975\\_\\_A27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A27_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

UN EXEMPLE CONCERNANT LA SUPER-REFLEXIVITE

par G. PISIER



On va construire ci-dessous pour chaque  $p < 2$  un espace super-réflexif, de type  $p$ -Rademacher mais qui n'est pas  $p$ -lisse (on dit qu'un espace de Banach est  $p$ -lisse s'il admet une norme équivalente pour laquelle le module de lissité est  $O(t^p)$  quand  $t \rightarrow 0$ ).

Le principe est simple : on va interpoler les normes d'espaces  $B$ -convexes non super-réflexifs construites dans l'exposé XX avec une norme euclidienne convenablement choisie ; l'espace euclidien assure à lui seul que le résultat de l'interpolation est super-réflexif (voir remarque 1) mais comme les deux espaces entre lesquels on interpole sont  $B$ -convexes, le résultat est "plus  $B$ -convexe qu'il n'est super-réflexif" ce qui se traduit par un écart des indices correspondants.

Pour la définition des espaces de type  $p$ -Rademacher, voir [8] exposé III. Pour le lien avec la  $B$ -convexité : [8] exposé VII. Soit  $E$  un espace de Banach, nous posons :

$$p(E) = \sup\{p \mid E \text{ est de type } p\text{-Rademacher}\}$$

$$\pi(E) = \sup\{p \mid E \text{ est } p\text{-lisse}\} .$$

#### A) RAPPELS SUR LA SUPER RÉFLEXIVITÉ [2]

Le premier lemme est classique, il résulte de divers résultats de R. C. James caractérisant les espaces réflexifs ([2], repris dans [8] exposé XIV. prop. 2).

Lemme 1 : Si un espace de Banach  $B$  n'est pas super-réflexif, il existe, pour chaque entier  $n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  éléments de  $B$  tels que :

$$\forall \alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$$

$$(1) \quad \|\alpha\|_{S,n} \leq \left\| \sum_1^n \alpha_i x_i \right\| \leq 2 \|\alpha\|_{1,n} ,$$

où l'on a posé  $\|\alpha\|_{S,n} = \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_1^k \alpha_i \right|$  et  $\|\alpha\|_{1,n} = \sum_1^n |\alpha_i|$ .

Le lemme suivant peut être traité par dualité en travaillant sur l'uniforme convexité comme dans [5] prop. 2. Nous choisissons une méthode indiquée par J. Lindenstrauss.

**Lemme 2** : Soit  $n$  un entier ; notons  $(\Omega_n, P_n)$  l'espace  $\{-1, +1\}^n$  muni de la probabilité équirépartie. Il existe une variable aléatoire  $X_n^n$  sur  $(\Omega_n, P_n)$  à valeurs dans  $\ell_{2^n}^1$ , telle que :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega_n \quad : \quad \|X_n^n(\omega)\|_{S, 2^n} \geq n/3 \\ \forall k = 1, 2, \dots, n \quad : \quad \|X_k^n(\omega) - X_{k-1}^n(\omega)\|_{1, 2^n} = 1 \\ \text{et} \quad X_0^n = 0 \end{array} \right. ;$$

où l'on a posé  $X_0^n = \mathbf{E} X_n^n$  et pour  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $X_k^n = \mathbf{E}(X_n^n | \mathcal{O}_k)$ , en désignant par  $\mathcal{O}_k$  la tribu engendrée par les  $k$  premières coordonnées  $\omega_1, \dots, \omega_k$  sur  $\{-1, +1\}^n$ .

**Démonstration** : Elle se fait par récurrence :

si l'on note  $e_1^n, \dots, e_{2^n}^n$  les vecteurs de base de  $\ell_{2^n}^1$ , on va écrire  $X_n^n(\omega)$  sous la forme

$$\sum_1^{2^n} \alpha_j(\omega) e_j^n \quad \text{où } \alpha_j \text{ est à valeurs dans } \{-1, 0, +1\},$$

$\sum_1^{2^n} |\alpha_j| \equiv n$  ; on impose de plus :  $\alpha_j(\omega) = -1 \Rightarrow \alpha_{j+1}(\omega) \neq 1$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, 2^n$  ; enfin :  $\|dX_k^n(\omega)\|_{1, 2^n} = 1$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Pour  $n = 1$  la construction est triviale. Supposons que l'on a construit une telle variable  $X_n^n$  au rang  $n$ , avec  $X_n^n = \sum_1^{2^n} \alpha_j e_j^n$  de la forme convenable. On peut poser alors  $N(\omega) = \inf \{j | \alpha_j(\omega) = -1\}$  ; quand  $\omega$  décrit  $\Omega_n$ ,  $N(\omega)$  décrit un ensemble d'entiers  $\{k_1, \dots, k_{2^n}\}$  (indexés en ordre croissant) que l'on peut supposer distincts.

On définit  $\varphi = \{1, \dots, 2^n\} \rightarrow \{1, \dots, 2^{n+1}\}$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(j) = j \quad \text{si } j < k_1 \quad . \\ \varphi(j) = j + \lambda \quad \text{si } k_\lambda \leq j < k_{\lambda+1}, \lambda < 2^n. \\ \varphi(j) = j + 2^n \quad \text{si } k_{2^n} \leq \lambda < 2^n, \end{array} \right.$$

et on pose  $\Psi(\omega, \omega_{n+1}) \in \Omega_n \times \{-1, +1\} = \Omega_{n+1}$  :

$$X_{n+1}^{n+1}(\omega, \omega_{n+1}) = \sum_1^{2^n} \alpha_j(\omega) e_{\varphi(j)}^{n+1} + \omega_{n+1} e_{\varphi(N(\omega)) - 1}^{n+1} .$$

Il est clair que  $X_{n+1}^{n+1}$  est aussi de la forme convenable ; les conditions imposées aux  $(\alpha_j)$  impliquent aisément la conclusion du lemme. Le lemme suivant est implicite dans [6].

**Lemme 3** : Soit B un espace de Banach et  $p \in [1, \infty[$  . On suppose l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que, pour tout entier n, il existe une variable aléatoire  $X_n$  sur  $(\Omega_n, P_n)$  à valeurs dans B vérifiant :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega_n \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad X_0 = 0, \\ \|\|X_n(\omega)\|\| \geq C n^{1/p} \quad \text{et} \quad \|\|X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)\|\| \leq 1. \end{array} \right.$$

Alors :  $\pi(B) \leq p$ .

**Démonstration** : Si  $\pi(B) > p$ , alors pour tout  $r \in ]p, \pi(B)[$  il existe une constante D telle que pour toute martingale  $(X_m)_{m \geq 0}$  à valeurs dans B, on a :

$$(5) \quad \sup_{m \geq 0} \mathbf{E} \|X_m\|^r \leq D^r [\mathbf{E} \|X_0\|^r + \sum_{k \geq 1} \mathbf{E} \|X_k - X_{k-1}\|^r] .$$

On trouvera une démonstration de cette assertion dans l'exposé n° XV, prop.2 Si l'on écrit (5) pour la martingale qui satisfait à (4), on obtient

$$C n^{1/p} \leq D n^{1/r} ;$$

ce qui est impossible quand n est assez grand si  $r > p$ .

Remarque 1 : Les deux lemmes ci-dessus ont un analogue dual relatif à l'uniforme convexité (voir [5] [6]).

Lemme 2\* : Soit n un entier, il existe une variable aléatoire  $X'_n$  sur  $(\Omega_n, P_n)$  à valeurs dans  $\ell^1_{2^n}$  telle que :

$$\forall \omega \in \Omega_n \quad \|X'_n(\omega)\|_{1, 2^n} \leq 1$$

$$\inf_{1 \leq k \leq n} \|X'_k(\omega) - X'_{k-1}(\omega)\|_{S, 2^n} \wedge \|X'_0\|_{S, 2^n} \geq 1/2$$

Lemme 3\* : Soit B un espace de Banach et  $q \in [1, \infty]$ . On suppose l'existence d'une constante C telle que, pour tout entier n, il existe une variable aléatoire  $X'_n$  sur  $(\Omega_n, P_n)$  à valeurs dans B vérifiant :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega_n \\ \forall k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \|X'_k(\omega) - X'_{k-1}(\omega)\| \geq 1 \\ \text{et } \|X'_n(\omega)\| \leq C n^{1/q} . \end{array}$$

Désignons par  $\mathcal{K}(B)$  la borne inférieure des nombres r pour lesquels il existe sur B une norme équivalente dont le module de convexité  $\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$  vérifie  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)/\varepsilon^r > 0$  ; alors nécessairement :  $\mathcal{K}(B) \geq q$ .

B) RAPPELS SUR L'INTERPOLATION [3] [4] :

Soit  $\theta \in [0, 1]$ ,  $p_0, p_1$  deux éléments de  $[1, \infty]$ . Si f est une fonction mesurable à valeurs dans un Banach A, on note  $\|f\|_{L^p_*(A)}$  l'intégrale  $(\int_0^\infty \|f(t)\|^p \frac{dt}{t})^{1/p}$  et on désigne par  $L^p_*(A)$  l'espace des f tels que  $\|f\|_{L^p_*(A)} < \infty$ .

Soient  $A_0, A_1$  deux espaces de Banach plongés dans un même espace de fonctions A. On désigne par  $(A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}$  l'espace des  $a \in A$  pour lesquels il existe une fonction mesurable  $t \rightarrow u(t)$  sur  $]0, \infty[$  à valeurs dans  $A_0 \cap A_1$  telle que (au sens de  $A_0 + A_1$ ) :

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}, \quad t^{-\theta} u(t) \in L_*^{p_0}(A_0), \quad t^{1-\theta} u(t) \in L_*^{p_1}(A_1).$$

On munit cet espace de la norme

$$a \rightarrow \|a\|_{\theta, p_0, p_1} = \inf \left\{ \|t^{-\theta} u(t)\|_{L_*^{p_0}(A_0)} \vee \|t^{1-\theta} u(t)\|_{L_*^{p_1}(A_1)} \right\}$$

où l'infimum porte sur les représentations de  $a$  de la forme

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \quad \text{dans } A_0 + A_1.$$

Nous aurons besoin essentiellement de deux propriétés de l'interpolation ; la troisième est citée pour clarifier.

Propriété n° 1 : Si un opérateur  $T$  est borné de  $A_0$  dans  $B_0$  d'une part et de  $A_1$  dans  $B_1$  d'autre part, alors  $T$  est borné de  $[A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}$  dans  $[B_0, B_1]_{\theta, p_0, p_1}$ . Si l'on désigne par  $\|T\|_0$ ,  $\|T\|_1$ , et  $\|T\|_{\theta, p_0, p_1}$  les normes correspondantes, on a :

$$\|T\|_{\theta, p_0, p_1} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta.$$

Cette propriété est une conséquence facile de la définition.

Propriété n° 2 : Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré.  $[L_\mu^{p_0}(A_0), L_\mu^{p_1}(A_1)]_{\theta, p_0, p_1}$  s'identifie à l'espace  $L_\mu^p([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1})$  avec  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ .

Cette propriété est démontrée dans [3] ch. VII théorème 1.1. Bien entendu le résultat signifie que les normes correspondantes sont équivalentes, avec des constantes ne dépendant ni de  $A_0$  ni de  $A_1$ .

Propriété n° 3 : L'espace  $[A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}$  ne dépend en fait que de  $\theta$  et de  $p$  déterminé par  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ . (i.e : les divers espaces sont en fait identiques et leurs normes sont équivalentes).

Ce résultat est démontré dans [4] § 3. th.1.

Notations : Pour simplifier, nous notons  $(\Omega, P)$  l'espace  $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$  muni de la probabilité uniforme ; nous noterons  $\mathcal{C}_0$  la tribu triviale et  $\forall n \geq 1$ ,  $\mathcal{C}_n$  la tribu engendrée par les  $n$  premières coordonnées  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  sur  $\Omega$ . On considère sur  $\Omega \times \mathbb{N}$  la "tribu des prévisibles" notée  $\mathcal{P}$  et définie comme suit : par définition une partie  $A = \sum_{n \geq 0} A_n \times \{n\}$  de  $\Omega \times \mathbb{N}$  est dans  $\mathcal{P}$  si :  $A_0 \in \mathcal{C}_0$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $A_n \in \mathcal{C}_{n-1}$ . On notera  $m$  la mesure produit de  $P$  par la mesure de comptage sur  $(\Omega \times \mathbb{N}, \mathcal{P})$ .

Si  $B$  est un espace de Banach de type  $p$ -Rademacher, on note  $R_p(B)$  la norme de l'opérateur  $(x_n) \rightarrow \sum \varepsilon_n x_n$  de  $\ell^p(B)$  dans  $L^p(\Omega, P; B)$ .

Si  $B$  est un espace de Banach  $p$ -lisse, alors ([6], et dans un cadre plus général exposé XV, prop. 2) l'opérateur de  $L^p(\Omega \times \mathbb{N}, m; B)$  dans  $L^p(\Omega, P; B)$  défini par :

$$(6) \quad \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}(\cdot, 0) + \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n(\cdot) \mathfrak{F}(\cdot, n)$$

est borné. On note  $S_p(B)$  sa norme. Dans [6] théorème 3.1, on montre que  $B$  est  $p$ -lisse si et seulement si  $S_p(B) < \infty$ . Les propriétés de l'interpolation ont pour conséquences : (voir l'exposé n° XIV)

Lemme 4 : Soient  $A_0$  et  $A_1$  deux espaces de Banach.

a) Si  $A_i$  ( $i = 0, 1$ ) est de type  $p_i$ -Rademacher alors, si  $0 < \theta < 1$  et

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad [A_0, A_1]_{\theta, p}$$
 est de type  $p$ -Rademacher et

$$R_p([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}) \leq R_{p_0}(A_0)^{1-\theta} R_{p_1}(A_1)^\theta.$$

b) Si  $A_i$  ( $p_i = 0, 1$ ) est  $p_i$ -lisse, alors si  $\theta$  et  $p$  sont comme en a),  $[A_0, A_1]_{\theta, p}$  est  $p$ -lisse et

$$S_p([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}) \leq S_{p_0}(A_0)^{1-\theta} S_{p_1}(A_1)^\theta.$$

c) On suppose que  $A_i$  ( $i = 0, 1$ ) est  $q_i$ -lisse avec  $q_0 \leq p_0, q_1 \leq p_1$ . Si

$0 < \theta < 1$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$  alors  $[A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}$  est  $\lambda$ -lisse avec

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$  ; on a aussi :

$$S_{\lambda}([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}) \leq \psi(S_{q_0}(A_0), S_{q_1}(A_1))$$

où  $\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction dépendant seulement des paramètres .

Remarque 1 : Il faut noter que si  $p_0 > 1$  et si  $0 < \theta < 1$  alors  $p > 1$  même si  $p_1 = 1$ . Par conséquent, il suffit que l'un des espaces  $A_0, A_1$  soit B-convexe (resp. super-réflexif) pour que  $[A_0, A_1]_{\theta, p}$ ,  $0 < \theta < 1$ , le soit aussi.

Démonstration : Les points a) et b) sont des conséquences immédiates des propriétés n° 1 et n° 2 ci-dessus, appliquées à l'opérateur intervenant dans la définition de  $R_p(B)$  ou  $S_p(B)$ . Pour c) la situation est un peu moins simple : on note  $L^p(\ell^q)(\mathcal{P}; B)$  l'espace de Banach des éléments  $\Phi$  de  $L^0(\Omega \times \mathbb{N}, \mathcal{P}; B)$  tels que  $\{\mathbf{E}(\sum_{n \geq 0} \|\Phi(\cdot, n)\|^q)^{p/q}\}^{1/p}$  est fini et on choisit bien entendu cette dernière expression comme norme dans cet espace. On constate aisément que  $L^p(\ell^q)(\mathcal{P}; B)$  s'identifie à un sous-espace de  $L^p(\Omega, \mathcal{Q}_{\infty}, P; \ell^q(B))$  sur lequel il existe une projection de norme 1 ; cette dernière s'écrit immédiatement avec les espérances conditionnelles relatives aux  $\mathcal{Q}_n$ .

Par conséquent, on voit immédiatement (propriétés n°1 et 2) que  $\Lambda = [L^{p_0}(\ell^{q_0})(\mathcal{P}; A_0), L^{p_1}(\ell^{q_1})(\mathcal{P}; A_1)]_{\theta, p_0, p_1}$  s'identifie à un sous-espace complémenté de  $\mathcal{E} = L^p(\Omega, \mathcal{Q}_{\infty}, P; [\ell^{q_0}(A_0), \ell^{q_1}(A_1)]_{\theta, p_0, p_1})$ . Mais on sait que :

$$[\ell^{q_0}(A_0), \ell^{q_1}(A_1)]_{\theta, p_0, p_1} \supset \ell^{\lambda}([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1})$$

dès que  $\lambda \leq p$ .

La norme dans  $\Lambda$  est donc majorée - à une constante près - par la norme dans l'espace  $\mathcal{E} = L^p(\Omega, P; \ell^{\lambda}([A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}))$ .

\* par une variante facile de la deuxième partie de la démonstration de [3], chapitre VII, th.1.1 en se servant des inclusions  $L^{p_i}(\ell^{q_i}(A_i)) \supset \ell^{q_i}(L^{p_i}(A_i))$ .

Nous en venons au fait : d'après les résultats de [6] ou de l'exposé XV, l'opérateur défini par (6) est borné de

$$L^{p_i}(\ell^{q_i})(\Omega, \mathcal{P}; A_i) \text{ dans } L^{p_i}(\Omega, \mathcal{P}; A_i) ;$$

par interpolation (propriété n°1), il est borné de  $\Lambda$  dans (propriété 2)  $\mathfrak{F} = L^p(\Omega, \mathcal{P}; [A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1})$ . D'après la remarque précédente, il est a fortiori borné de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathfrak{F}$ . Or, d'après [6] remarque 3.3 et théorème 3.1, cela assure que  $[A_0, A_1]_{\theta, p_0, p_1}$  est  $\lambda$ -lisse.

L'existence de la fonction  $\psi$  de l'énoncé est implicite dans la démonstration ci-dessus.

### C) LE RESULTAT

Nous allons utiliser les lemmes précédents dans le cas suivant :  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = 2$ ,  $p_0 = \rho$  et  $p_1 = 2$ , avec  $\rho < 2$ . D'après l'exposé XX, corollaire 6, on peut trouver (en application du lemme 1) une norme, notée  $\|\cdot\|_{\rho, 2^n}$  sur  $\mathbb{R}^{2^n}$  telle que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{2^n}$  :

$$(7) \quad \|\alpha\|_{S, 2^n} \leq \|\alpha\|_{\rho, 2^n} \leq 2 \|\alpha\|_{1, 2^n}$$

$$(8) \quad R_\rho(J(\rho, 2^n)) \leq R_\rho$$

où l'on a noté  $J(\rho, 2^n)$  l'espace  $\mathbb{R}^{2^n}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\rho, 2^n}$  et  $R_\rho$  est une constante indépendante de  $n$ .

Dans [1] (voir aussi [7] exp. XXIV page 3) Kwapien et Pełczyński ont démontré que -si  $j_n$  désigne l'injection de  $\ell_2^1$  dans  $(\mathbb{R}^{2^n}, \|\cdot\|_{S, 2^n})$ , on a :  $\pi_2(j_n) \leq K n$  où  $K$  est une constante indépendante de  $n$ . Par conséquent, par le théorème de factorisation de Pietsch, il existe une norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{2^n}$  telle que l'espace euclidien correspondant - noté  $E_{2^n}$  - vérifie :

$$(9) \quad \|\alpha\|_{S, 2^n} \leq \|\alpha\|_{E_{2^n}} \leq K n \|\alpha\|_{1, 2^n} .$$

On peut alors considérer sur  $\mathbb{R}^{2^n}$  la norme - notée  $K_{\rho, 2^n}^\theta$  - de l'espace interpolé  $[J(\rho, 2^n), E_{2^n}]_{\theta, p_0, p_1}$  noté lui aussi  $K_{\rho, 2^n}^\theta$ .

Par la propriété n° 1, on a en combinant (7) et (9) :

$$(10) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^{2^n} \quad \|\alpha\|_{S, 2^n} \leq K_{\rho, 2^n}^\theta(\alpha) \leq 2^{1-\theta} (Kn)^\theta \|\alpha\|_{1, 2^n} .$$

Par le lemme 4 c) :

$$(11) \quad S_\lambda(K_{\rho, 2^n}^\theta) \leq \psi(1, 1) \text{ avec } \frac{1}{\lambda} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} .$$

Il résulte de (8) et du lemme 4.a) :

$$(12) \quad R_p(K_{\rho, 2^n}^\theta) \leq (R_\rho)^{1-\theta} \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{2} .$$

Si l'on forme l'espace  $K_\rho^\theta$  en posant  $K_\rho^\theta = \ell^2(\{K_{\rho, 2^n}^\theta\}_{n \geq 1})$ , on a :

i) D'après (11),  $K_\rho^\theta$  est  $\lambda$ -lisse, donc super-réflexif puisque  $\lambda > 1$  à condition que  $0 < \theta < 1$ .

ii) D'après (12),  $K_\rho^\theta$  est de type p-Rademacher.

iii) (10) nous permet d'appliquer le lemme 2 et d'obtenir  $\forall n \geq 1$  une martingale  $X_n^n$  sur  $(\Omega_n, P_n)$  à valeurs dans  $K_\rho^\theta$  et telle que  $\forall \omega \in \Omega_n$

$$\|X_k^n(\omega) - X_{k-1}^n(\omega)\|_{K_\rho^\theta} \leq 1$$

$$\|X_n^n(\omega)\| \geq 2^{\theta-1} K^{-\theta} \cdot n^{1-\theta}/3 ;$$

cette propriété de  $K_\rho^\theta$  nous assure d'après le lemme 3 que  $\pi(K_\rho^\theta) \leq \frac{1}{1-\theta}$ .  
On a donc démontré le théorème :

**Théorème** : Soit  $0 < \theta < 1$  et  $1 < \rho < 2$ . Il existe un espace de Banach

$K_\rho^\theta$  qui est :

i) super-réflexif

ii) de type p-Rademacher avec  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{2}$ .

iii) tel que  $\pi(K_\rho^\theta) \leq \frac{1}{1-\theta}$  .

Par conséquent :

$$1 < \pi(K_\rho^\theta) \leq \frac{1}{1-\theta} < p \leq p(K_\rho^\theta)$$

dès que (13)  $0 < \theta < (1 - 1/\rho)(3/2 - 1/\rho)^{-1}$  .

Remarques : 1) Le théorème précédent est à rapprocher des résultats (en sens inverse) de Figiel dans l'exposé XXIV où il montre que  $\pi(E) = p(E)$  pour tout espace  $E$  à structure locale inconditionnelle. Nous conjecturons que  $K_\rho^\theta$  n'est pas finiment représentable dans un treillis de Banach super-réflexif, dès que  $\theta$  vérifie (13).

2) Si un espace de Banach  $E$  satisfait la "propriété d'inconditionnalité des différences de martingales" introduite dans l'exposé II. remarque 4, alors on voit facilement que  $R_p(E)$  est fini si et seulement si  $S_p(E)$  l'est aussi. Par conséquent un tel espace vérifie également  $\pi(E) = p(E)$ . Le théorème ci-dessus montre que, pourvu que  $\theta$  vérifie (13),  $K_\rho^\theta$  est super-réflexif mais n'a pas la propriété d'inconditionnalité des différences de martingales.

3) On ne sait pas s'il existe des espaces non réflexifs de type 2-Rademacher ; notons que s'il en existe, la construction qui précède montre qu'il existe aussi des espaces super-réflexifs de type 2 qui ne sont pas 2-lisses (il suffit de prendre  $\rho = 2!$ ).

4) Les lemmes 2\* et 3\* permettent de montrer que :

$$\frac{1}{\theta} \leq \mathcal{K}(K_\rho^\theta) \leq \frac{2}{\theta} .$$

5) Le dual  $(K_\rho^\theta)^*$  est super-réflexif, de cotype  $p'(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$  mais  $\mathcal{K}(K_\rho^{\theta*}) > p'$  dès que  $\theta$  vérifie (13).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Kwapien et A. Pełczyński : The main triangle projection in matrix spaces and its applications. *Studia Math.* 34 (1970) 43-67.
- [2] R. C. James : Some self dual properties of normed linear spaces. *Annals of Math. Studies* 69 (1972) p.159-175.

- [3] J. L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publications mathématiques I. H. E. S. (1964) n° 19, p.5-68.
  - [4] J. Peetre : Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation. Ricerche Mat. 12 (1963) 248-261.
  - [5] G. Pisier : B-convexity, super-réflexivity and the three space problem. Proceedings of a conference on "Random series, convex sets and the geometry of Banach spaces". Aarhus, Octobre 1974.
  - [6] G. Pisier : Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel J. Math. à paraître.
  - [7] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73 .
  - [8] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74.
-