Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey
G. Pisier

(Annexe n° 1) Remarques sur l'exposé d'Assouad (n° XVI)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A26_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

REMARQUES SUR L'EXPOSE D'ASSOUAD
(n° XVI)

par B MAUREY et G. PISIER

Annexe n° 1

Juin 1975

Le but des remarques ci-dessous est de montrer que les résultats d'Assouad (exp. XVI) s'étendent à une classe d'espaces plus générale que celle des espaces p-lisses : les espaces de type p-Rademacher (cf. [1] exposé III pour la définition et les commentaires usuels). D'après un contre-exemple de R. C. James [2], on sait que cette classe est strictement plus générale.

Nous conservons les notations de l'exposé d'Assouad. Nous allons montrer que les expressions

$$\mathbb{E} \sup_{1\le i\le n} \|X_i\|^p \qquad \text{et} \qquad \sup_{1\le i\le n} \mathbb{E}\|X_i\|^p$$

(avec $X_i = \Sigma_{j=1}^{i} Y_j$, Y_j-écartables et de somme nulle) sont équivalentes - pour chaque p, indépendamment de n - à l'expression

$$\int \|\Sigma_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t) Y_j\|^p dt$$

où (ε_j) désigne la suite des variables de Rademacher (ou de Bernoulli!) sur $([0,1], dt)$. Nous poserons dans la suite

$$\xi_j = \frac{1+\varepsilon_j}{2} .$$

Le premier lemme est trivial.

Lemme 1 : Soit Q la probabilité équirépartie sur $\{0,1\}^n$ et pour chaque $k = 1,2,\ldots,n$ soit Q_k la probabilité équirépartie sur l'ensemble $\{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \xi_i = k\}$. On a

(1) $$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} Q_k \qquad \text{(formule du binôme!)}$$

Lemme 2 : Soit $c > 0$, alors

(2) $$\sum_{k : |k-\frac{n}{2}| \le c} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \ge 1 - \frac{n}{4c^2} .$$

Démonstration : Par l'inégalité de Bienaymé-Čebishev et puisque

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) - n/2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)/2 \quad :$$

$$\frac{n}{4} = \int \Big|\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) - \frac{n}{2}\Big|^2 dt \geq c^2 Q\{\Big|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{n}{2}\Big| > c\} \quad ,$$

d'où

$$Q\{\Big|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{n}{2}\Big| \leq c\} \geq 1 - \frac{n}{4c^2} \quad ,$$

ce qui s'écrit encore en utilisant (1)

$$\sum_{k:|k-\frac{n}{2}| \leq c} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \geq 1 - \frac{n}{4c^2} \quad .$$

<u>Lemme 3</u> : Soit $(Y_1,\ldots,Y_n)$ des variables écartables♦ à valeurs dans un espace de Banach, on a :

(3) $$\int \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j(t) Y_j\Big\|^p dt \geq \left(\frac{3}{4}\right) \inf_{k:|k-\frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}} \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{k} Y_j\Big\|^p \quad .$$

<u>Démonstration</u> : D'après (1) le premier membre de l'inégalité précédente vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \int \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j Y_j\Big\|^p dQ_k(\xi) .$$

Posons toujours $X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$. Pour chaque (ξ_j) dans $\{0,1\}^n$, tel que $\sum_{j=1}^{n} \xi_j = k$ on a : $\mathbb{E}\|X_k\|^p = \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j Y_j\|^p$, puisque les Y_j sont écartables♦ ; d'où :

$$\int \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j(t) Y_j\Big\|^p dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \mathbb{E}\|X_k\|^p \geq \left(\frac{3}{4}\right) \inf_{k:|k-\frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}} \mathbb{E}\|X_k\|^p .$$

La dernière inégalité résulte de (2) (avec $c = \sqrt{n}$).

♦ On utilise en fait seulement le fait que pour chaque $k = 1,2,\ldots,n$ la loi de $\sum_{\alpha=1}^{k} Y_{j_\alpha}$ ne dépend pas du k-uple $\{j_1,\ldots,j_k\}$ considéré dans $\{1,\ldots,n\}$.

<u>Lemme 4</u> : Soit $(Y_j)_{1\le j\le n}$ écartables (ou seulement vérifiant α) sur les intervalles) et de somme nulle. Posant $X_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$, on peut écrire si $1 \le k < n$:

$$\Big(\mathbb{E}\sup_{1\le i\le n} \|X_i\|^p\Big)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\,\frac{n^2}{k(n-k)}\,(\mathbb{E}\|X_k\|^p)^{1/p}$$

Donc si $n > 4$:

$$\Big(\mathbb{E}\sup_{1\le i\le n}\|X_i\|^p\Big)^{1/p} \le K_p \inf_{k:\,|k-\frac{n}{2}|\le\sqrt{n}} (\mathbb{E}\|X_k\|^p)^{1/p} \tag{4}$$

avec $K_p = 4p'/(1-2/\sqrt{5})^2$.

<u>Démonstration</u> : Rappelons la propriété α) sur les intervalles :

$$\alpha) \qquad \mathbb{E}\Big(\sum_{j\in A} Y_j \,\Big|\, \mathcal{A}(B)\Big) = \frac{\text{card } A}{\text{card } B}\sum_{j\in B} Y_j$$

pour tout $A \subset B$ où A, B sont des intervalles d'entiers et $\mathcal{A}(A)$ est la tribu engendrée par $(Y_j)_{j\notin A}$.

Le choix de $A = \{k+1,\dots,n\}$ et $B = \{i+1,\dots,n\}$ nous donne, en tenant compte de $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$:

$$\forall\ i \le k \qquad \mathbb{E}(X_k|\mathcal{A}_i) = \frac{n-k}{n-i}\,X_i \tag{5}$$

avec $\mathcal{A}_i = \tau(Y_1,\dots,Y_i)$.

Le choix de $A = \{1,\dots,k\}$ et $B = \{1,\dots,i\}$ nous donne

$$\forall\ i \ge k \qquad \mathbb{E}(X_k|\mathcal{A}'_i) = \frac{k}{i}\,X_i \tag{6}$$

avec $\mathcal{A}'_i = \tau(Y_{i+1},\dots,Y_n)$.

On déduit de (5) et (6) :

$$\sup_{1\le i\le n}\|X_i\| \le \max\Big\{\sup_{i\le k}\frac{n-i}{n-k}\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}_i}X_k\|,\ \sup_{i\ge k}\frac{i}{k}\|\mathbb{E}^{\mathcal{A}'_i}X_k\|\Big\}$$

soit

$$\sup_{1\le i\le n} \|X_i\| \le \max\{\frac{n}{n-k} \sup_{i\le k} \mathbb{E}^{\mathcal{a}_i}\|X_k\|, \frac{n}{k} \sup_{i} \mathbb{E}^{\mathcal{a}'_i}\|X_k\|\} \quad .$$

L'inégalité de Doob nous donne alors :

$$(\mathbb{E} \sup_{1\le i\le n} \|X_i\|^p)^{1/p} \le \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}\|X_k\|^p)^{1/p} [\frac{n}{n-k} + \frac{n}{k}]$$

ce qui est la première inégalité de l'énoncé. La seconde en résulte car si $n > 4$ et $|k - \frac{n}{2}| \le \sqrt{n}$

$$\frac{n^2}{k(n-k)} \le \frac{n^2}{(\frac{n}{2} - \sqrt{n})^2} \le \frac{4}{(1 - 2/\sqrt{5})^2} \quad .$$

Remarque 1 : 1) La formule (1) donne immédiatement que pour des variables écartables $(Y_j)_{j\le n}$ de somme nulle

$$(7) \qquad \begin{aligned} \int \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j(t) Y_j\|^p dt &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \mathbb{E}\|X_k\|^p \\ &\le \sup_{1\le k\le n} \mathbb{E}\|X_k\|^p \quad . \end{aligned}$$

Il faut donc remarquer que l'on a prouvé (dans le cas écartable de somme nulle) l'équivalence des quatre expressions intervenant dans les inégalités (3), (4) et (7) .

2) Exemple d'application : Soit $x_1 x_2 \ldots x_n$ un n-uple dans un espace de Banach tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Notons (Ω, P) l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ muni de la probabilité uniforme et posons $Y_j(\omega) = x_{\omega(j)}$ pour tout $j = 1,2,\ldots,n$ et toute permutation ω de Ω. Il existe pour tout p,q tels que $1 < p < q < \infty$ une constante universelle $K_{p,q}$ telle que

$$(8) \qquad (\int \sup_{k\le n} \|\sum_{j=1}^{k} x_{\omega(j)}\|^q dP(\omega))^{1/q} \le K_{p,q} (\int \sup_{k\le n} \|\sum_{j=1}^{k} x_{\omega(j)}\|^p dP(\omega))^{1/p}$$

En effet, les $(Y_j)_{j\le n}$ sont échangeables et d'après la remarque ci-dessus le second membre est équivalent à $(\int dP(\omega) \int \|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t) x_{\omega(j)}\|^p dt)^{1/p}$ qui est lui-même <u>égal</u> à $\left(\int \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t) x_j \right\|^p dt\right)^{1/p}$. L'inégalité (8) se réduit donc à une inégalité de Kahane (formulée par exemple dans [1] exp. III, page 1bis).

3) <u>Théorème 1</u> : Soient X un espace de Banach de type p-Rademacher, et (x_n) une suite dans X telle que

a) $\sum \|x_n\|^p < \infty$

b) La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ a une sous suite convergente. Dans ces conditions il existe une permutation $(x_{\omega(n)})$ de la suite (x_n) de telle sorte que la série $\sum_n x_{\omega(n)}$ soit convergente.

La démonstration se réduit à celle d'Assouad une fois connue la remarque 2) ci-dessus. Notons que pour le "type ρ-Rademacher", il y a un énoncé analogue : nous dirons qu'un espace de Banach X est de type ρ-Rademacher - où ρ est une fonction d'Orlicz - si pour tout p > 0 il existe une constante C_p^X telle que :

$$(9) \qquad \left(\int \left\| \sum \varepsilon_n(t) x_n \right\|^p dt\right)^{1/p} \leq C_p^X \left\| (\|x_n\|)_n \right\|_\rho$$

pour toute suite finie (x_n) dans X, où l'on a posé :

$$\left\| (\|x_n\|)_n \right\|_\rho = \inf \left\{ c > 0 \mid \sum \rho\left(\frac{\|x_n\|}{c} \right) \leq 1 \right\} .$$

<u>Théorème 2</u> : Soient $(Y_j)_{j \leq n}$ des variables aléatoires écartables de somme nulle à valeurs dans un espace de Banach X de type ρ-Rademacher. Pour tout p > 1, on a :

$$\left(\mathbb{E} \sup_{i \leq n} \|X_i\|^p\right)^{1/p} \leq \left[\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^{1/p} K_p\right] C_p^X \left(\mathbb{E}\left\{ \left\| (\|Y_j\|)_j \right\|_\rho \right\}^p\right)^{1/p} .$$

<u>Preuve</u> : Combiner (4) (3) et (9).

4) Il est clair qu'en utilisant l'inégalité de Doob de "type faible", on obtient par une modification de la démonstration du lemme 4 :
si $1 \leq k \leq n$

$$\sup_{c > o} c\, \mathbb{P}\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| > c \right\} \leq \frac{n^2}{k(n-k)} \mathbb{E} \|X_k\| .$$

donc $\sup_{c>o} c\,\mathbb{P}\{\sup_{1\le i\le n} \|X_i\| > c\} \le 4/(1-2/\sqrt{5})^2 \inf_{k:|k-\frac{n}{2}|\le\sqrt{n}} \mathbb{E}\|X_k\|$

si $n > 4$; à la condition que les Y_j soient de somme nulle et vérifient $\alpha)$ sur les intervalles. Nous n'écrivons pas les généralisations évidentes au cas des espaces d'Orlicz.

Dans le cas échangeable, on a aussi :

<u>Théorème 3</u> : Soit X un espace de Banach de type p-Rademacher, et $(Y_j)_{j\le n}$ des variables échangeables de somme nulle à valeurs dans X, on a pour toute suite scalaire $(a_j)_{j\le n}$:

$$(\mathbb{E}\sup_{i\le n} \|\Sigma_1^i a_j Y_j\|^p) \le K'_p(\tfrac{1}{n}\Sigma_1^n |a_j|^p)\,\Sigma_1^n \mathbb{E}\|Y_j\|^p$$

où K'_p est une constante ne dépendant que de p et X.

<u>Démonstration</u> : Soit $k < n$; nous posons sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\varphi_k(a_1,\dots,a_k) = (\mathbb{E}\|\Sigma_1^k a_j Y_j\|^p)^{1/p} \quad \text{et} \quad \varphi_k^* = (\mathbb{E}\sup_{i\le k}\|\Sigma_1^i a_j Y_j\|^p)^{1/p}.$$

Soit $(\varepsilon_j)_1^k$ une suite de nombres égaux à $+1$ ou -1. Soit σ une permutation telle que dans la suite $(\varepsilon_{\sigma(j)})_1^k$ les signes + soient rangés tous avant les signes −.

Avec les mêmes notations que pour (5), on a :

$$\forall\, i \le k,\quad \Sigma_1^i a_j Y_j = \mathbb{E}(\Sigma_1^k a_j Y_j \mid \mathcal{C}_i) + \left(\frac{\Sigma_{i+1}^k a_j}{n-i}\right) X_i .$$

Donc par l'inégalité de Doob :

$$(10) \qquad \varphi_k^*(a_1,\dots,a_k) \le p'\varphi_k(a_1,\dots,a_k) + \frac{\Sigma_1^k |a_j|}{n-k}.\varphi_k^*(1,\dots,1).$$

Mais par échangeabilité $\varphi_k(a_1,\dots,a_k) = \varphi_k(a_{\sigma 1},\dots,a_{\sigma k})$ et par l'inégalité triangulaire : $\varphi_k(a_{\sigma 1},\dots,a_{\sigma k}) \le 3\,\varphi_k^*(\varepsilon_{\sigma 1}a_{\sigma 1},\dots,\varepsilon_{\sigma k}a_{\sigma k})$ donc par (10) :

$$\varphi_k(a_1,\ldots,a_k) \leq 3p'\,\varphi_k(\varepsilon_{\sigma 1}a_{\sigma 1},\ldots,\varepsilon_{\sigma k}a_{\sigma k}) + 3\,\frac{\Sigma_1^k|a_j|}{n-k}\,\varphi_k^*(1,\ldots,1)$$

soit par échangeabilité $\leq 3p'\varphi_k(\varepsilon_1 a_1,\ldots,\varepsilon_k a_k) + 3\,\frac{\Sigma_1^k|a_j|}{n-k}\,\varphi_k^*(1,\ldots,1)$.

En reportant dans (10), on obtient finalement :

$$\varphi_k^*(a_1,\ldots,a_k) \leq 3p'^2\varphi_k(\varepsilon_1 a_1,\ldots,\varepsilon_k a_k) + (3p'+1)\,\frac{\Sigma_1^k|a_j|}{n-k}\,\varphi_k^*(1,\ldots,1).$$

En faisant la moyenne sur les choix de signes (ε_j), on obtient (puisque X est de type p-Rademacher) :

$$\varphi_k^*(a_1,\ldots,a_k) \leq B_p(\Sigma_1^k \mathbb{E}|a_j|^p\|Y_j\|^p)^{1/p} + (3p'+1)\,\frac{\Sigma_1^k|a_j|}{n-k}\,\varphi_k^*(1,\ldots,1),$$

où B_p ne dépend que de X et de p.

Il est alors facile de conclure en choisissant $k = [\frac{n+1}{2}]$, en utilisant le théorème 2 pour estimer $\varphi_k^*(1,\ldots,1)$, et en traitant l'intervalle $[k+1,\ldots,n]$ similairement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74

[2] R. C. James : A non reflexive Banach space which is uniformly non octahedral. Israel J. Math. 18 (1974) 145-155.