Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Le problème des 3 espaces : un contre-exemple de J. Lindenstrauss

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 17, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

LE PROBLEME DES 3 ESPACES :
UN CONTRE-EXEMPLE DE J. LINDENSTRAUSS

par G. PISIER

Exposé N° XVII

19 Mars 1975

§ 1. INTRODUCTION

Soient X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X, on peut considérer un troisième espace de Banach : X/Y muni de la norme quotient. Une forme générale du "problème des 3 espaces" est alors : étant donnée une propriété $\mathcal{P}$, si deux des trois espaces précédents ont la propriété $\mathcal{P}$, que peut-on dire du troisième ?

Il va sans dire que, suivant la propriété $\mathcal{P}$, le problème est plus ou moins intéressant. Le cas qui nous intéressera ici est celui où l'on suppose que Y et X/Y ont la propriété considérée, et l'on demande si X l'a aussi. Par exemple (cf. [1] II.4, p. 19-20) il est facile de voir que si Y et X/Y sont réflexifs, alors X est aussi réflexif.

Giesy ([3] th. II.9) a montré que si ℓ_1 n'est finiment représentable ni dans Y ni dans X/Y alors il ne l'est pas non plus dans X. Par ailleurs (cf. [2]) si Y et X/Y sont super-réflexifs, alors X l'est aussi.

Stegall ([6] cor. 6) a montré que si les duaux Y^* et $(X/Y)^*$ ont la propriété de Radon Nikodym, alors le dual X^* l'a aussi. La difficulté de ce type de problème est évidemment due à ce que Y n'est pas nécessairement complémenté (c'est-à-dire : n'est pas nécessairement l'image d'une projection linéaire bornée de X dans X), donc X n'est pas nécessairement linéairement homéomorphe à $Y \times X/Y$!

Le problème central (dû à Palais) a longtemps été : si Y et X/Y sont chacun isomorphes à un espace de Hilbert, est-ce que X l'est aussi ? J. Lindenstrauss a récemment résolu par la négative ce problème en prouvant le

<u>Théorème [2]</u> : Il existe un espace de Banach $\mathcal{X}$ qui n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert mais qui a un sous-espace $\mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ sont chacun isométriques à un espace de Hilbert.

On trouvera néanmoins dans [2] des résultats qui prouvent que $\mathcal{X}$ n'est pas loin d'être un espace de Hilbert et qui expliquent peut-être les estimations "logarithmiques" qui apparaissent dans la démonstration du théorème.

Notations : L'espace ℓ_n^2 désigne l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Pour alléger les notations, toutes les normes euclidiennes seront notées simplement $\| \ \|$; dans le cas général, on notera $\| \ \|_X$ la norme dans l'espace de Banach X . Enfin, pour toute suite d'espaces de Banach $(\mathcal{X}_n)_{n\geq 1}$, on note $\left(\sum_{n\geq 1} \mathcal{X}_n\right)_p$ (avec $1\leq p<\infty$) l'espace de Banach formé des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n \in \mathcal{X}_n$ pour chaque $n \geq 1$ et normé par $(x_n)_{n\geq 1} \longrightarrow (\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^p)^{1/p}$.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME

Pour commencer, nous allons "transformer" le problème : Soit B_n l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ vérifiant

α) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

β) Pour toute famille finie (x_i) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Sigma x_i = 0$, on a :

$$\|\Sigma f(x_i)\| \leq \Sigma \|x_i\| \quad .$$

On peut associer à une telle fonction f un espace de Banach X_f de la manière suivante : On considère dans $\mathbb{R}^{n+n^2}$ ♦ l'enveloppe convexe fermée $\mathcal{C}_f$ de l'ensemble des points $(x,f(x))$ et $(0,y)$ quand x décrit la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et y celle de $\mathbb{R}^{n^2}$; on peut définir X_f comme $\mathbb{R}^{n+n^2}$ avec pour norme la jauge de $\mathcal{C}_f$. Autrement dit X_f est défini de sorte que $\mathcal{C}_f$ soit sa boule unité. On voit facilement que l'on peut écrire

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}, \qquad \|(x,y)\|_{X_f} = \inf\{\Sigma\ \|x_\alpha\| + \Sigma\ \|y_\beta\|\}$$

où l'infinimum porte sur les familles finies (x_α) et (y_β) respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n^2}$ telles que $\sum_\alpha (x_\alpha, f(x_\alpha)) + \sum_\beta (0,y_\beta) = (x,y)$.

Nous poserons $Y_f = \{(0,y) \in X_f \mid y \in \mathbb{R}^{n^2}\}$.

Le lemme suivant justifie l'introduction de ce point de vue :

♦ que l'on va identifier à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

<u>Lemme 1</u> : Soit f une fonction dans B_n. Alors X_f/Y_f et Y_f sont isométriques respectivement à ℓ_n^2 et $\ell_{n^2}^2$.

<u>Démonstration</u> : Le premier point est presque évident : si, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\dot{x}$ l'image de $(x,0)$ par la surjection canonique de X_f sur X_f/Y_f, on a :

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}\|_{X_f/Y_f} &= \inf_{(0,y)\in Y_f} \|(x,y)\|_{X_f} \\
&= \inf_{(0,y)\in Y_f} \inf\{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \sum_\beta \|y_\beta\| \mid \sum_\alpha (x_\alpha, f(x_\alpha)) + \sum_\beta (0,y_\beta) = (x,y)\} \\
&= \inf_{\Sigma x_\alpha = x} \ \inf_{y\in\mathbb{R}^{n^2}, \sum_\beta y_\beta = y - \sum_\alpha f(x_\alpha)} \{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \sum_\beta \|y_\beta\|\} \\
&= \inf_{\Sigma x_\alpha = x} \ \Sigma \|x_\alpha\| = \|x\| \quad .
\end{aligned}$$

De même : $\forall\, y \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$(1) \qquad \|(0,y)\|_{X_f} = \inf\{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \Sigma \|y_\beta\| \mid \sum_\alpha (x_\alpha, f(x_\alpha)) + \sum_\beta y_\beta = (0,y)\}$$

d'où trivialement $\|(0,y)\|_{X_f} \leq \|y\|$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|(0,y)\|_{X_f} &\geq \inf \ \{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \|\sum_\beta y_\beta\|\} \\
&\geq \inf \ \{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \|y - \sum_\alpha f(x_\alpha)\|\} \\
&\geq \inf \ \{\sum_\alpha \|x_\alpha\| + \|y\| - \|\sum_\alpha f(x_\alpha)\|\}
\end{aligned}$$

où l'inf porte sur le même ensemble qu'en (1). La propriété β) assure alors que

$$\|(0,y)\|_{X_f} \geq \|y\| \quad ;$$

ce qui prouve que Y_f est isométrique à $\ell_{n^2}^2$.

Lemme 2 : Posons pour $f \in B_n$:

$$d_f = \inf_{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})} \{ \sup_{\|x\|=1} \|f(x) - T(x)\| \} \tag{2}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$ est l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Alors $\max(d_f, 1)$ est égal à l'infinimum de $\|\pi\|$ quand π décrit les projections de X_f sur Y_f.

Démonstration : Soit π une projection de X_f sur Y_f, il est facile de lui associer un opérateur $T_\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$ tel que

$$\forall\ (x,y) \in X_f \qquad \pi(x,y) = (0, y - T_\pi x) \quad .$$

On peut écrire :

$$\|\pi\| = \sup_{z \in \mathcal{C}_f} \|\pi z\|$$

donc par convexité :

$$\|\pi\| = \sup \left[\max \left(\|\pi(x, f(x))\|, \|\pi(0,y)\| \right) \ \middle|\ (x,y) \in X_f \quad \|x\| = \|y\| = 1 \right]$$

$$= \sup \left[\|f(x) - T_\pi x\| \vee 1 \ \middle|\ x \in \mathbb{R}^n ,\ \|x\| = 1 \right] \quad .$$

La conclusion résulte alors de la surjectivité de $\pi \to T_\pi$ qui est évidente. Le lemme précédent montre que plus d_f est grand, moins f est linéaire et moins X_f est hilbertien. Il est donc naturel de considérer le nombre $D_n = \sup_{f \in B_n} d_f$.

Le point crucial de la démonstration du théorème est alors le

Lemme 3 : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $D_{2n}^2 \geq D_n^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2$.

Pour démontrer ce lemme, on va introduire une application $f \to g_f$ de B_n dans B_{2n}. g_f est définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$

$$g_f(x,y) = \left(f(x), f(y), x \frac{\|y\|}{(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}}, 0 \right) ^{\blacklozenge}$$

♦ La quatrième composante ne jouera aucun rôle ...

où l'on a identifié au premier membre $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et au second $\mathbb{R}^{4n^2}$ à $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ et où (pour la troisième composante) on considère $\mathbb{R}^n$ comme plongé dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

<u>Sous-lemme 1</u> : Si $f \in B_n$ alors $g_f \in B_{2n}$.
Cela résultera de l'inégalité élémentaire

$$(3) \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R} \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2 \leq 2\left[\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+b^2} - (1+ab)\right] .$$

Celle-ci se voit aisément : si on ajoute $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2$ au premier membre, on trouve si on développe : $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+b^2}}\left[\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+b^2} - (1+ab)\right]$ qui est inférieur au deuxième membre.

<u>Preuve du sous-lemme 1</u> : Il suffit évidemment de montrer que g_f vérifie β).
Soit donc (x_i,y_i) une famille finie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que
$\sum_i (x_i,y_i) = (0,0)$.
On a :

$$(4) \qquad \|\sum_i g_f(x_i,y_i)\|^2 = \|\sum f(x_i)\|^2 + \|\sum f(y_i)\|^2 + \|\sum x_i \lambda_i\|^2$$

avec $\lambda_i = \frac{\|y_i\|}{\sqrt{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}}$; puisque $\sum x_i = 0$ et $\sum y_i = 0$ et $f \in B_n$ on a

$$(5) \qquad \|\sum f(x_i)\|^2 \leq (\sum \|x_i\|)^2$$

$$(6) \qquad \|\sum f(y_i)\|^2 \leq (\sum \|y_i\|)^2 .$$

D'autre part on peut écrire pour tout nombre c :

$$\|\sum_i x_i\, \lambda_i\|^2 = \|\sum_i x_i(\lambda_i - c)\|^2 \leq (\sum \|x_i\|\ |\lambda_i - c|)^2$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(7) \qquad \|\sum_i x_i\, \lambda_i\|^2 \leq (\sum_i \|x_i\|) \cdot (\sum \|x_i\|\ |\lambda_i - c|^2) \quad ;$$

si l'on pose $c = \Sigma \|x_i\| \lambda_i / \Sigma \|x_i\|$, alors le deuxième membre de (7) est égal à :

$$\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i,j} \|x_i\| \, \|x_j\| \, (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

qui d'après (3) est majoré par

$$\sum_{i,j} \sqrt{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2} \sqrt{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2} - (\|x_i\| \, \|x_j\| + \|y_i\| \, \|y_j\|) \quad ,$$

c'est-à-dire précisément $(\Sigma \|(x_i,y_i)\|)^2 - (\Sigma \|x_i\|)^2 - (\Sigma \|y_i\|)^2$; en reportant ce dernier résultat dans (4) et (5)-(6) on trouve finalement

$$\|\Sigma \, g_f(x_i,y_i)\|^2 \leq (\sum_i \|(x_i,y_i)\|)^2 \quad . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

<u>Sous-lemme 2</u> : $(d_{g_f})^2 \geq (d_f)^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$.

<u>Démonstration</u> : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{4n^2})$, on peut le représenter sous la forme : $\forall \, x,y \in \mathbb{R}^n$

(8) $$T(x,y) = (Px + P'y, \, Rx + R'y, \, Sx + S'y, \, Ux + U'y)$$

avec P, P', R, R', S, S', U et U' dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$. Posons $d(g_f,T) = \sup\{\|g_f(z) - Tz\| \mid z \in \mathbb{R}^{2n} \ \|z\| = 1\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de d_f il existe x_o et y_o sur la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^n$ tels que

(9) $$\|f(x_o) - Px_o\| \geq d_f - \varepsilon$$

(10) $$\|f(y_o) - R'y_o\| \geq d_f - \varepsilon \quad .$$

Il résulte alors de (8) que :

(11) $$\|g_f(x_o,0) - T(x_o,0)\|^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \|R \, x_o\|^2 + \|S \, x_o\|^2 \quad .$$

Les points $z_+ = \left(\frac{x_o}{\sqrt{2}}, \frac{y_o}{\sqrt{2}}\right)$ et $z_- = \left(\frac{x_o}{\sqrt{2}} , \frac{-y_o}{\sqrt{2}}\right)$ sont sur la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$ et donc d'après (9) et (10)

$$d(g_f,T)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\|g_f(z_+) - Tz_+\|^2 + \|g_f(z_-) - Tz_-\|^2\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[(d_f-\varepsilon)^2 + \|P'y_o\|^2 + \|Rx_o\|^2 + (d_f-\varepsilon)^2 + \left\|\frac{x_o}{\sqrt{2}} - Sx_o\right\|^2 + \|S'y_o\|^2\right] .$$

D'où si l'on pose $\delta^2 = \|Rx_o\|^2 + \|Sx_o\|^2$:

$$d(g_f,T)^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\left[\|Rx_o\|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \|Sx_o\|\right)^2\right]$$

$$\geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\left(\|Rx_o\|^2 + \|Sx_o\|^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,\|Sx_o\|\right)$$

$$\geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\left(\delta^2 - \sqrt{2}\,.\,\delta + \frac{1}{2}\right) .$$

En combinant (11) et la dernière ligne, on a :

$$d(g_f,T)^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \inf_{\delta>0} \max\left\{\delta^2 , \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right\}$$

c'est-à-dire : $d(g_f,T)^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$; d'où puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire :

$$d(g_f,T)^2 \geq d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

et

$$d_{g_f}^2 = \inf_{T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{4n^2})} d(g_f,T)^2 \geq d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

<u>Démonstration du lemme 3</u> : $D_{2n}^2 = \sup_{g\in B_{2n}} d_g^2 \geq \sup_{f\in B_n} d_{g_f}^2$ d'après le sous-lemme 1 ; donc $D_{2n}^2 \geq \sup_{f\in B_n} d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = D_n^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$ d'après le sous-lemme 2.

<u>Démonstration du théorème</u> : On déduit du lemme 3 que pour chaque entier $n \geq 1$: $D_{2^n} \geq \frac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{2}}$, donc qu'il existe une fonction f_n dans B_{2^n} telle que $d_{f_n} > \frac{\sqrt{n}}{4}$. On pose $\mathcal{X} = \left(\sum_{n\geq 1} X_{f_n}\right)_2$, et $\mathcal{Y} = \left(\sum_{n\geq 1} Y_{f_n}\right)_2$ considéré comme sous-espace de $\mathcal{X}$.

Comme $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ s'identifie à $\left(\sum_{n\geq 1} X_{f_n} / Y_{f_n}\right)_2$, le lemme 1 montre que $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ sont isométriques à des espaces de Hilbert. Soit π une projection linéaire (non nécessairement bornée) de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$, alors $\pi_n \pi j_n$ est une projection de X_{f_n} sur Y_{f_n} si l'on note j_n l'injection canonique de X_{f_n} dans $\mathcal{X}$ et π_n la projection canonique de $\mathcal{Y}$ sur Y_{f_n}. Le lemme 2 implique donc que $\|\pi_n \pi j_n\| \geq d_{f_n} > \frac{\sqrt{n}}{4}$ $\forall\, n \geq 1$, donc $\|\pi\| \geq \|\pi_n \pi j_n\| > \frac{\sqrt{n}}{4}$ $\forall\, n \geq 1$ c'est-à-dire que $\|\pi\| = \infty$. Cela prouve que $\mathcal{X}$ n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert puisqu'il a un sous-espace $\mathcal{Y}$ sur lequel il n'existe pas de projection bornée.

<u>Remarque finale</u> : Soit p tel que $1 < p < \infty$. L'espace $\mathcal{X}_p = \left(\sum_{n\geq 1} X_{f_n}\right)_p$ a un sous-espace $\mathcal{Y}_p = \left(\sum_{n\geq 1} Y_{f_n}\right)_p$ tel que $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{X}_p/\mathcal{Y}_p$ sont isomorphes à ℓ_p mais $\mathcal{X}_p$ n'est pas un espace $\mathcal{L}_p$. En effet $\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{X}_p/\mathcal{Y}_p$ sont isomorphes à des sous-espaces complémentés de ℓ_p et contiennent ℓ_p complémenté ; ils sont donc isomorphes à ℓ_p d'après la méthode de décomposition de Pełczyński ([5] p. 30, theorem I.2.6). Pour voir que $\mathcal{X}_p$ n'est pas un espace $\mathcal{L}_p$ on peut se ramener au cas $p \geq 2$ et utiliser un résultat de Kadec-Pełczyński : tout sous-espace hilbertien (ici $\mathcal{Y}_p$) d'un espace L_p est complémenté ([4] corollary 1). On conclut alors comme pour $p = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Dunford and J.T. Schwartz : Linear operators I, Interscience, New York (1958).

[2] P. Enflo, J. Lindenstrauss and G. Pisier : On the "three space problem", à paraître dans Math. Scand. 36 (1975).

[3] D.P. Giesy : On a convexity condition in normed linear spaces, Trans. A.M.S. 125 (1966) 114-146.

[4] M. Kadec and A. Pełczyński : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p, Studia Math. 21 (1962) 161-176.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafiri : Classical Banach spaces, Lect. Notes in Math. No 338, Springer Verlag.

[6] C. Stegall : The Radon Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. A.M.S. (à paraître).
