

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

(Annexe n° 1) Sur les espaces qui ne contiennent pas de l_n^∞ uniformément

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A27_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 *Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR LES ESPACES QUI NE CONTIENNENT PAS

DE l_n^∞ UNIFORMEMENT
==

par G. PISIER

Maurey a montré (cf. exp. XXII, corollaire 1) que les espaces de Banach tels que $1 \in I_E$ coïncident avec les espaces qui ne contiennent pas de l_n^∞ uniformément (par définition E contient des l_n^∞ uniformément s'il existe $C > 0$ tel que pour tout entier n , il existe un isomorphisme T de l_n^∞ sur un sous-espace de E tel que $\|T\| \|T^{-1}\| \leq C$).

A partir de ses résultats, on peut obtenir une caractérisation en termes de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans ces espaces.

Notation : Dans toute la suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$) désigne une suite de variables aléatoires réelles sur $([0,1], dt)$, indépendantes équidistribuées suivant la loi de Gauss (resp. la suite des variables de Rademacher sur $([0,1], dt)$).

Définition : Soit E et F deux espaces quasi-normés et u un opérateur de E dans F .

a) u est dit $(\gamma, 1)$ -sommant s'il existe une constante C telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$\int \left\| \sum u(x_i) f_i(t) \right\| dt \leq C \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum \varepsilon_i x_i \right\|.$$

b) u est dit (γ, ε) -sommant s'il existe une constante C telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$(0) \quad \int \left\| \sum u(x_i) f_i(t) \right\| dt \leq C \int \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\| dt.$$

Rappel : D'après un résultat de Kahane (2) (que l'on peut d'ailleurs retrouver à partir de l'exposé VI) il existe des constantes universelles d_p telles que : pour tout Banach E , pour toute suite finie (x_i) dans E et pour tout $p \geq 1$,

$$(1) \quad \left(\int \left\| \sum x_i \varepsilon_i(t) \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq d_p \int \left\| \sum x_i \varepsilon_i(t) \right\| dt.$$

D'après l'exposé VI, il existe des constantes universelles $g_{p,q}$ telles que, pour tout Banach E et pour toute suite finie (x_i) dans E on ait :

$$(2) \quad \text{si } 0 < p, q < \infty, \left(\int \left\| \sum f_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq g_{p,q} \left(\int \left\| \sum f_i(t) x_i \right\|^q dt \right)^{1/q}$$

Remarque 1 : Les énoncés relatifs à (1) et (2) restent vrais dans les espaces quasi-normés mais les constantes ne sont plus qu'universelles dans la classe des espaces α -normés (et ceci pour tout α dans $]0,1[$).

On rappelle qu'une suite de v.a.r. η_n est dite "suite symétrique", si pour toute suite (ξ_n) de nombres valant $+1$ ou -1 , la suite $(\xi_n \eta_n)$ a même loi sur $\mathbb{R}^N$ que la suite (η_n) .

Proposition 1 : Soit E un espace de Banach, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $1 \in I_E$
- ii) L'identité de E est $(\gamma, 1)$ -sommante.
- iii) Toute suite (η_n) de v. a. r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $\sup_n \|\eta_n\|_{L^p}$ est fini pour tout p dans $]0, \infty[$, a la propriété suivante :

Pour tout p dans $]0, \infty[$, il existe une constante C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E, on ait :

$$(\int \|\sum \eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega))^{1/p} \leq C_p \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|$$

Démonstration : $3 \Rightarrow 2$ est trivial

$2 \Rightarrow 1$: Si $1 \notin I_E$, d'après l'exposé XXII corollaire 1, pour tout entier n il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de E tels que :

$$\forall (C_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{2} \sup |C_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{i=n} C_i x_i \right\| \leq 2 \sup |C_i|$$

$$\text{d'où, d'une part} \quad \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i \right\| \leq 2$$

d'autre part

$$\int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t) x_i \right\| dt \geq \frac{1}{2} \int \sup_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)| dt ;$$

comme $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t)| = +\infty$ p.s., l'identité de E ne peut pas être

$(\gamma, 1)$ -sommante.

1 $\Rightarrow$ 3 : Si $1 \in I_E$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $1 + \varepsilon_0 \in I_E$ (cf. exposé XXII corollaire 3). Etant donné p dans $]0, \infty[$, on peut trouver α tel que

$$1 < \alpha \leq 1 + \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad p \leq \alpha' \quad (\text{où } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1).$$

D'après le théorème de l'exposé XVII, puisque $\alpha \in I_E$ il existe une constante C_α telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E , il existe des réels positifs α_i tels que

$$\sup_{\xi \in B_E} (\sum |\langle \xi, \frac{x_i}{\alpha_i} \rangle|^\alpha)^{1/\alpha} \leq 1$$

et

$$(\sum |\alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'} \leq C_\alpha \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|.$$

(Rappelons que $\sup_{\xi \in B_E} \sum |\langle \xi, x_i \rangle| = \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|$.)

On a alors : $\forall C_i \in \mathbb{R}^N$:

$$\|\sum C_i x_i\| = \|\sum C_i \alpha_i \frac{x_i}{\alpha_i}\| \leq (\sum |C_i \alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'}$$

en particulier :

$$\begin{aligned} (\int \|\sum \eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega))^{1/p} &\leq (\int \|\sum \eta_i(\omega) x_i\|^{\alpha'} dP(\omega))^{1/\alpha'} \\ &\leq \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}} (\sum |\alpha_i|^{\alpha'})^{1/\alpha'} \end{aligned}$$

soit finalement

$$(\int \|\sum \eta_i(\omega) x_i\|^p dP(\omega))^{1/p} \leq C_\alpha \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}} \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|$$

D'où le résultat avec $C_p = C_\alpha \sup_n \|\eta_n\|_{L^{\alpha'}}$.

Proposition 2 : Soit E un espace quasi-normé, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) L'identité de $l^p(E)$ est $(\gamma, 1)$ -sommante pour un p dans $]0, \infty[$.
- ii) L'identité de E est (γ, ε) -sommante.
- iii) L'identité de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, E)$ est (γ, ε) -sommante pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et pour tout p dans $]0, \infty[$.

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii). On note $x(k)$ la k-ième composante d'un élément x de $l^p(E)$. Par hypothèse et d'après (1) et (2), il existe C telle que, pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $l^p(E)$:

$$(3) \quad \int \sum_k \left\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i(k) f_i(t) \right\|^p dt \leq C^p \sup_{\varepsilon_i = -1} \sum_k \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i(k) \right\|^p;$$

on peut écrire, si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie dans E

$$\int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{k=2^n} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t_k) x_i \right\|^p$$

où

$$t_k \in \left] \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right[.$$

On pose alors

$$x_i(k) = \begin{cases} \varepsilon_i(t_k) x_i & \text{si } 1 \leq k \leq 2^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on écrit (3) :

$$(4) \quad \int \sum_{k=1}^{k=2^n} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t_k) x_i f_i(t) \right\|^p dt \leq C^p \sup_{\varepsilon_i = -1} \sum_{k=1}^{k=2^n} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \varepsilon_i(t_k) x_i \right\|^p$$

mais le second membre vaut

$$2^n C^p \sup_{\varepsilon_i = -1} \int dt \left\| \sum \varepsilon_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p$$

soit encore (puisque $(\varepsilon_n(\cdot))$ est une suite symétrique sur $([0, 1] dt)$)

$$2^n C^p \int dt \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p$$

. le premier membre vaut :

$$\sum_{k=1}^{2^n} \int dt \left\| \sum \varepsilon_i(t_k) x_i f_i(t) \right\|^p$$

soit encore (puisque (f_n) est une suite symétrique sur $([0,1], dt)$) :

$$2^n \int dt \left\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i f_i(t) \right\|^p$$

on obtient donc en divisant (4) par 2^n :

$$\int dt \left\| \sum x_i f_i(t) \right\|^p \leq C^p \int dt \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p$$

et l'identité de E est bien (γ, ε) -sommante d'après (1) et (2) .

ii) $\Rightarrow$ iii). Quand μ est σ -finie, iii) s'obtient facilement par intégration (compte tenu de (1) et (2)) par rapport à μ de l'inégalité (0) puis en appliquant Fubini.

Dans le cas général, on utilise l'argument de l'exposé XXIII, théorème 4, pour se ramener au cas σ -fini.

Enfin iii) $\Rightarrow$ i) est trivial.

Proposition 3 : Soit E un espace de Banach dont l'identité est (γ, ε) -sommante. Soit (η_n) une suite symétrique de v. a. r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ vérifiant

$$\sup_n \left(\int |\eta_n|^p dP \right)^{1/p} < \infty \text{ pour tout } p \text{ dans }]0, \infty[.$$

Alors, pour tout p dans $]0, \infty[$, il existe une constante C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E :

$$\left(\int \left\| \sum \eta_i(\omega) x_i \right\|^p dP(\omega) \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{1/p}$$

Démonstration : Si l'identité de E est (γ, ε) -sommante celle de $L^p([0,1], dt, E)$ l'est aussi (cf. prop.2) ; donc (prop. 1) il existe C_p telle que, pour toute suite finie (x_i) dans E

$$\left(\int \left\| \sum \eta_i(\omega) \varepsilon_i(\cdot) x_i \right\|_{L^p([0,1], E)}^p dP(\omega) \right)^{1/p} \leq C_p \sup_{\varepsilon_i = -1} \left(\int \left\| \sum \varepsilon_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{1/p}$$

Par des arguments de symétrie (les suites $(\varepsilon_i \varepsilon_i(t))$ et $(\varepsilon_i(t) \eta_i(\omega))$ sont distribuées respectivement comme $(\varepsilon_i(t))$ et $(\eta_i(\omega))$) on en déduit

$\left(\int \left\| \sum \eta_i(\omega) x_i \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{1/p}$. On aurait pu aussi faire une démonstration identique à celle de i) $\Rightarrow$ ii) dans la proposition. 2.

Lemme : Soit (η_n) une suite symétrique de v.a.r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La suite $\varepsilon_n(\cdot) \otimes |\eta_n(\cdot)|$ sur $([0,1]dt) \times (\Omega, P)$ est distribuée (sur $\mathbb{R}^N$) comme la suite (η_n) . Si E est un espace de Banach et si (x_i) est une suite finie dans E on a, si les variables η_n sont intégrables et non nulles :

$$\left(\int \left\| \sum x_i \varepsilon_i(t) \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq \frac{1}{\inf_n \left\| \eta_n \right\|_{L^1}} \left(\int \left\| \sum \eta_i(\omega) x_i \right\|^p dP(\omega) \right)^{1/p}$$

pour tout p dans $[1, \infty[$.

Démonstration : La première affirmation est élémentaire. Montrons la deuxième : fixons t, on a :

$$\left\| \int dP(\omega) \sum |\eta_i(\omega)| \varepsilon_i(t) x_i \right\| \leq \int \left\| \sum |\eta_i(\omega)| \varepsilon_i(t) x_i \right\| dP(\omega)$$

d'où en intégrant en t après élévation à la puissance p :

$$\left(\int dt \left\| \sum \left\| \eta_i \right\|_{L^1} \varepsilon_i(t) x_i \right\|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int \left\| \sum \varepsilon_i(t) |\eta_i(\omega)| x_i \right\|^p dP(\omega) dt \right)^{1/p};$$

d'après la 1ère partie de l'énoncé, le deuxième membre est égal à

$$\left(\int dP(\omega) \left\| \sum \eta_i(\omega) x_i \right\|^p \right)^{1/p};$$

d'après le principe de contraction (cf. exposé VII, lemme 1) :

$$(\int dt \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\|^p)^{1/p} \leq \sup_i \frac{1}{\|\eta_i\|_{L^1}} (\int \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\| \eta_i\|_{L^1}^1 \|^p dt)^{1/p}$$

cqfd.

Corollaire : Soit E un espace de Banach dont l'identité est (γ, ε) -sommante, soit η_n une suite symétrique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que : $\delta = \inf \|\eta_n\|_{L^1} > 0$.

$$\sup_n \|\eta_n\|_{L^p} < \infty \text{ pour tout } p \text{ dans }]0, \infty[.$$

Alors pour tout p dans $[1, \infty[$ il existe une constante a_p telle que : pour toute suite finie (x_i) dans E

$$(\int \|\sum \eta_i x_i\|^p dP)^{1/p} \leq a_p \int \|\sum \eta_i x_i\| dP.$$

D'après la proposition précédente,

$$(\int \|\sum \eta_i x_i\|^p dP)^{1/p} \leq c_p (\int \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\|^p dt)^{1/p}.$$

D'après (1)

$$(\int \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\|^p dt)^{1/p} \leq d_p \int \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\| dt$$

enfin, d'après le lemme

$$\int \|\sum \varepsilon_i(t) x_i\| dt \leq \frac{1}{\delta} \int \|\sum \eta_i x_i\| dP$$

d'où le résultat avec

$$a_p = \frac{c_p d_p}{\delta}.$$

Remarque 2 : La conclusion de la proposition 3 n'est évidemment vraie que si l'identité de E est (γ, ε) -sommante. Par contre, cela n'est plus le cas a priori pour le corollaire. Celui-ci est à rapprocher des résultats de Hoffman-Jørgensen (exposé VI) ; il faut remarquer qu'aucune hypothèse

d'indépendance n'est faite : les hypothèses numériques équivalent à dire que (η_n) est une suite basique équivalente à la base canonique de l^2 et ceci dans $L^p(\Omega, P)$ pour tout p dans $]0, \infty[$. Il est possible que ce corollaire soit vrai dans tout Banach.

Les propositions 2 et 3 résolvent en partie un problème posé par Hoffmann-Jørgensen (1). Celui-ci a conjecturé que les espaces E dans lesquels la convergence p.s de $\sum \varepsilon_n(.)x_n$ équivaut à celle de $\sum \eta_n x_n$ quand (η_n) est une suite de variables indépendantes équidistribuées suivant une loi symétrique ayant certaines propriétés de régularité à l'infini, étaient ceux qui ne contenaient pas c_0 . Comme, pour de telles séries, la convergence p.s équivaut à la convergence dans $L^0(E)$ ou dans $L^p(E)$, un tel énoncé -sans constante- se ramène aisément à un énoncé avec constante. L'espace $l^2(l_n^\infty)$ des suites (x_k) dans $\prod_{k=1}^\infty l_k^\infty$ telles que $\sum \|x_k\|^2 < \infty$ est un contre exemple car il est réflexif (donc ne contient pas c_0) mais il contient des l_n^∞ uniformément (la conjecture est donc fausse avec $\eta_n = f_n$).

En fait, les propositions 2 et 3 montrent que les espaces en question sont exactement les espaces E tels que $l^1(E)$ (ou $l^p(E)$, ou $L^p([0,1], E)$) ne contient pas de l_n^∞ uniformément.
pour $p \geq 1$

Par ailleurs, les hypothèses de la proposition 3 sur les (η_n) sont moins restrictives que celles de (1). Il paraît raisonnable de conjecturer que si $L^1([0,1], E)$ contient uniformément des l_n^∞ , il en est de même de E .

Posé en ces termes le problème est à rapprocher d'une seconde conjecture de (1) : si $L^1([0,1], dt, E)$ contient c_0 , est-ce que E le contient aussi ?

En termes d'opérateurs sommants, le problème équivaut à : si $1 \in I_E$ est-ce que $1 \in I_{l^2(E)}$?, il est alors naturel de le rapprocher d'un problème de (3) : si $2 \in I_E$ est-ce que $2 \in I_{l^2(E)}$?

BIBLIOGRAPHIE
=====

- [1] J. Hoffmann-Jørgensen : Sums of independent Banach space valued random variables. Aarhus Universitet Matematisk Institut, Preprint series 72-73, n^o15.
 - [2] J. P. Kahane : Some random series of functions, Heath Mathematical monographs, 1968.
 - [3] B. Maurey : Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L^p . A paraître dans Astérisque.
-