

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Une nouvelle démonstration d'un théorème de Grothendieck

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 22, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A21_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉOREME
=====
DE GROTHENDIECK
=====

par B. MAUREY

Nous allons poursuivre l'étude de l'ensemble I_E , défini dans l'exposé précédent. Nous donnerons tout d'abord quelques corollaires du théorème de l'exposé précédent. Lorsque $q = 1$, ce théorème prend une forme particulièrement sympathique :

Corollaire 1 : Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $1 \notin I_E$
- b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n , E contient un sous-espace $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à l_n^∞ .

(Démonstration immédiate : si u et v sont les opérateurs de l_n^∞ dans E et de E dans l_n^∞ fournis par le théorème, on prend $F = u(l_n^\infty)$. Les opérateurs u et v restreints à F sont alors des isomorphismes entre F et l_n^∞ , et $d(F, l_n^\infty) \leq \|u\| \|u^{-1}\| \leq \|u\| \|v\| \leq 1 + \varepsilon$.)

Autrement dit, en dehors des espaces qui contiennent des l_n^∞ pour tout n , tous les Banach vérifient une "conjecture de Pietsch forte", c'est-à-dire que $\pi_1(E, F) = \pi_p(E, F)$ pour tout p tel que $-1 < p \leq 1$ et tout espace quasi-normé F . Si E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, on peut dire également d'après le théorème de l'exposé XVII que tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p \leq 1$, se factorise par $L^1(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de L^r , $1/p = 1 + 1/r$.

Corollaire 2 : Soit E un espace de Banach. S'il existe un réel $q \geq 1$ tel que toute suite sommable dans E (x_i) vérifie $\sum \|x_i\|^{q'} < \infty$, on a :

$$]0, q[\subset I_E.$$

Démonstration : L'espace des suites sommables sur E est un Banach pour la norme $\sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|$.

D'après le théorème du graphe fermé, l'hypothèse du corollaire implique l'existence d'une constante C telle que l'on ait pour toute suite sommable (x_i) :

$$(\sum \|x_i\|^{q'})^{1/q'} \leq C \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum \varepsilon_i x_i\|$$

Soit $p < q$, et supposons que $p \notin I_E$. On peut alors supposer $p \geq 1$ d'après la conjecture de Pietsch. D'après le théorème de l'exposé XXI, on peut trouver pour tout entier n deux opérateurs u et v , de $l_n^{p'}$ dans E et de E dans l_n^∞ respectivement, tels que :

$$\|u\| \leq 2 ; \|v\| \leq 1 ; v \circ u \text{ est l'injection de } l_n^{p'} \text{ dans } l_n^\infty.$$

Soit (e_i) la base canonique de $l_n^{p'}$, et posons $x_i = u(e_i)$.
Nous aurons :

$$\|x_i\| \geq \|v(x_i)\| = \|e_i\| = 1, \quad \text{donc} \quad (\sum \|x_i\|^{q'})^{1/q'} \geq n^{1/q'}$$

D'autre part :

$$\|\sum \varepsilon_i x_i\| = \|u(\sum \varepsilon_i e_i)\| \leq 2 \|\sum \varepsilon_i e_i\| = 2n^{1/q'}.$$

Nous devons donc avoir pour tout n :

$$n^{1/q'} \leq 2C n^{1/p'},$$

ce qui est impossible puisque $1/p' < 1/q'$.

Remarque 1 : En général l'hypothèse du corollaire 2 n'implique pas que $q \in I_E$. Cependant, je ne connais pas de contre-exemple pour $q = 2$. (Alors que pour $1 \leq q < 2$, $l^{q'}$ fournit un contre-exemple).

Signalons aussi que l'on a toujours $I_E \subset]0, 2]$ pour un espace de Banach de dimension infinie. En effet, si $q \in I_E$, $q > 2$, on a $\pi_q(E, F) = \pi_1(E, F)$ pour tout F , donc d'après le théorème de l'exposé XVII, toute suite sommable (x_i) sur E (qui est en particulier une suite scalairement l^1) peut s'écrire :

$$x_i = \alpha_i y_i, \text{ avec } (\alpha_i) \in l^{q'},$$

et où (y_i) est une suite scalairement l^q , donc bornée. On a donc

$\sum \|x_i\|^{q'} < \infty$, et $q' < 2$. Or cela contredit le théorème de Dvoretzky-Rogers, qui indique que si E est un Banach de dimension infinie, on peut trouver pour tout $p < 2$ une suite sommable (x_i) dans E telle que $\sum \|x_i\|^p = +\infty$.

Corollaire 3 : Pour tout espace de Banach E de dimension infinie l'ensemble I_E est un segment ouvert, ou est égal à $]0,2]$.

Démonstration : Il est clair que I_E est un segment, contenu dans $]0,2]$ d'après la remarque 1. Supposons que $I_E =]0,q]$, avec $q < 2$. Soient $\varepsilon > 0$ et n entier donnés. On peut trouver un $\alpha > 0$ tel que l'injection j de $l_n^{q+\alpha}$ dans l_n^q ait une norme $\leq \sqrt{1+\varepsilon}$. Par hypothèse $q+\alpha \notin I_E$. On peut donc trouver deux opérateurs u et v , de $l_n^{(q+\alpha)'}$ dans E et de E dans l_n^∞ , tels que :

$$\|u\| \leq \sqrt{1+\varepsilon} ; \quad \|v\| \leq 1 ;$$

$v \circ u$ est l'injection de $l_n^{(q+\alpha)'}$ dans l_n^∞ .

Alors $u_1 = u \circ j$, $v_1 = v$ donne un couple d'opérateurs de $l_n^{q'}$ dans E , et de E dans l_n^∞ , tel que :

$$\|u_1\| \leq 1+\varepsilon ; \quad \|v_1\| \leq 1 ;$$

$v_1 \circ u_1$ est l'injection de $l_n^{q'}$ dans l_n^∞ . Puisque l'on peut trouver un tel couple pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n , on en déduit que $q \notin I_E$ d'après le théorème de l'exposé précédent, d'où une contradiction qui achève la démonstration.

Remarque 2 : Le cas où $I_E =]0,2[$ se présente effectivement. On peut prendre par exemple pour E l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}([0,1], dt)$, avec $\Phi(t) = t^2 \text{Log}(t+1)$.

Théorème 1 : Soient E un espace de Banach, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q$. Si on a pour tout espace quasi-normé F $\pi_q(E, F) = \pi_p(E, F)$, on en déduit : $q \in I_E$.

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque 3 de l'exposé XXI. Cependant nous allons donner un énoncé plus précis, et une démonstration qui n'utilise pas le lemme de Rosenthal.

Théorème 1 bis : Soient E un espace de Banach, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q$, et C une constante telle que l'on ait pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur $v \in \pi_q(E, F)$:

$$\pi_p(v) \leq C \pi_q(v)$$

Soit s un nombre réel tel que $0 < s < p < q$. Définissons un nombre $\theta \in]0, 1[$ par $1/p = (1 - \theta)/s + \theta/q$. On a alors pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur $v \in \pi_q(E, F)$:

$$\pi_s(v) \leq C^{1/(1-\theta)} \pi_q(v)$$

Nous démontrerons d'abord un lemme :

Lemme : Soient s, p, q, θ comme précédemment, F un espace quasi-normé, u un opérateur linéaire continu de F dans un espace $L^s(\Omega, \mu)$. On a :

$$C_{s,p}(u) \leq \|u\|^{1-\theta} (C_{s,q}(u))^\theta$$

Démonstration : Posons $1/s = 1/r + 1/q$, d'où

$$1/p = (1 - \theta)/r + 1/q \quad ; \quad 1/s = \theta/r + 1/p$$

Par définition de $C_{s,q}(u)$, on peut trouver une fonction $\varphi \geq 0$ telle que :

$$\int \varphi^r d\mu \leq 1 \quad ; \quad \forall x \in F \quad \left(\int \left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C_{s,q}(u) \|x\|$$

On peut écrire par ailleurs :

$$\left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^p = \left(\left| u(x) \right|^s \right)^{p \left(\frac{1-\theta}{s} \right)} \cdot \left(\left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^q \right)^{p\theta/q}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité de Hölder (puisque $p(1 - \theta)/s + p\theta/q = 1$), pour tout $x \in F$:

$$\begin{aligned} \left(\int \left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^p d\mu \right)^{1/p} &\leq \left(\int \left| u(x) \right|^s d\mu \right)^{(1-\theta)/s} \cdot \left(\int \left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^q d\mu \right)^{\theta/q} \\ &\leq \|u\|^{1-\theta} (C_{s,q}(u))^\theta \|x\|. \end{aligned}$$

Or $\int (\varphi^\theta)^{r/\theta} d\mu \leq 1$, et $1/s = \theta/r + 1/p$. On en déduit bien

$$C_{s,p}(u) \leq \|u\|^{1-\theta} (C_{s,q}(u))^\theta.$$

Démontrons maintenant le théorème 1 bis : d'après le théorème de l'exposé XVII, il suffit de montrer que toute suite $(x_1, \dots, x_n)$ sur E admet la décomposition $x_i = \alpha_i y_i$, avec :

$$\sum |\alpha_i|^r \leq 1 ; \quad \|(y_i)\|_q^* \leq C^{1/1-\theta} \|(x_i)\|_s^*$$

Il suffit donc de montrer que pour tout entier n et pour tout opérateur linéaire continu u de E' dans l_n^s , on a :

$$C_{s,q}(u) \leq C^{1/1-\theta} \|u\|$$

Soit donc u un opérateur linéaire continu de E' dans l_n^s . Nous noterons $l_n^s = L^s(\Omega, \mu)$ pour des commodités d'écriture. Par définition de $C_{s,p}(u)$, on peut trouver une fonction ψ telle que :

$$\int |\psi|^{r/\theta} d\mu \leq 1 ; \quad \forall x \in E' \quad \left(\int \left| \frac{u(x)}{\psi} \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leq C_{s,p}(u) \|x\|$$

Considérons maintenant l'opérateur u_1 de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$ défini par $u_1(x) = \frac{u(x)}{\psi}$. Puisque l'on a par hypothèse $\pi_p(v) \leq C \pi_q(v)$ pour tout F et tout $v \in \pi_q(E, F)$, on déduit* du théorème de l'exposé XVII :

$$C_{p,q}(u_1) \leq C \|u_1\| \leq C.C_{s,p}(u)$$

Il existe donc une fonction χ telle que :

$$\begin{aligned} \int |\chi|^{r/(1-\theta)} d\mu \leq 1 ; \quad \forall x \in E' \quad \left(\int \left| \frac{u_1(x)}{\chi} \right|^q d\mu \right)^{1/q} &\leq C_{p,q}(u_1) \|x\| \\ &\leq C.C_{s,p}(u) \|x\| \end{aligned}$$

* Dans ce théorème, on suppose que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique lorsque $p < 1$. Une distraction coupable nous a fait oublier de signaler que les conditions b) et c) de ce théorème sont toujours équivalentes, car l^p vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. C'est ce que nous utilisons ici dans le cas $p < 1$.

On a alors en posant $\varphi = \psi \chi$:

$$\int |\varphi|^r d\mu \leq 1 ; \quad \forall x \in E' \quad \left(\int \left| \frac{u(x)}{\varphi} \right|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C.C_{s,p}(u) \|x\| ,$$

d'où $C_{s,q}(u) \leq C.C_{s,p}(u)$, et d'après le lemme :

$$C_{s,q}(u) \leq C \|u\|^{1-\theta} (C_{s,q}(u))^\theta$$

Mais $C_{s,q}(u)$ est fini puisque u est de rang fini, et l'on obtient :

$$(C_{s,q}(u))^{1-\theta} \leq C \|u\|^{1-\theta}, \quad \text{d'où le résultat.}$$

Théorème 2 : Si E est un espace de Banach de cotype 2 (cf. exposé VII), on a $2 \in I_E$.

Démonstration : D'après le théorème 1, il suffit de montrer que l'on a $\pi_2(E, F) = \pi_p(E, F)$ pour tout $p \in]1, 2]$ et tout espace quasi-normé F . En fait il suffit de se restreindre au cas où F est un espace de Banach, et même si l'on veut un espace de Hilbert, puisque tout opérateur 2-sommant de E dans F admet la factorisation (cf. exposé II) :

$$E \xrightarrow{\bar{u}} H \longrightarrow F ,$$

où H est un espace de Hilbert et $\bar{u} \in \pi_2(E, H)$.

Nous avons démontré dans l'exposé VII, corollaire 2 du théorème 2 que si E est de cotype 2, on a pour tout espace de Banach F :

$$\pi_2(F, E) = \pi_q(F, E) \quad \text{pour tout } q \text{ tel que } 2 \leq q < \infty$$

On en déduit aussitôt, en utilisant l'adjonction des idéaux d'opérateurs (cf. exposé XIII et exposé XVI, remarque 1.6) :

$$\forall F \quad \mathcal{J}_{q'}(E, F) = \mathcal{J}_2(E, F).$$

Or on a toujours $\mathcal{J}_2 = \pi_2$ (cf. [2]) et $\mathcal{J}_{q'} \subset \pi_{q'}$, donc :

$$\forall F, \quad \forall q \in [2, \infty[, \quad \pi_2(E, F) = \pi_{q'}(E, F),$$

d'où le résultat.

Remarque 3 Nicole Tomczak-Jaegermann a donné dans [3] des exemples non triviaux d'espaces de cotype 2 :

1) Si E est une C^* -algèbre (non nécessairement commutative !), son dual E' est de cotype 2.

2) Soit H un espace de Hilbert, et soit $S_p(H)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(H, H)$ formé des opérateurs u tels que $\text{Tr}(uu^*)^{p/2} < \infty$. L'espace $S_p(H)$ est de cotype 2 pour $1 \leq p \leq 2$, et de type 2 pour $2 \leq p < \infty$.

Nous allons donner maintenant une forme du théorème de Grothendieck. Nous verrons d'autres formes dans l'exposé suivant.

Corollaire (cf.[1]) : On a pour tout espace quasi-normé F , et pour tout réel p tel que $-1 < p \leq 2$:

$$\pi_2(L^1, F) = \pi_p(L^1, F)$$

En effet, L^1 est de cotype 2 d'après l'exposé VII.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ -spaces and their applications, *Studia Math.* 29(1968) p. 275-326.
 - [2] A. Pietsch : Absolut- p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967) p.333-353.
 - [3] N. Tomczak-Jaegermann : On the moduli of smoothness and the Rademacher average of the trace classes S_p , Preprint.
-