

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Probabilités cylindriques, type et ordre. Applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A1_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBABILITES CYLINDRIQUES, TYPE ET ORDRE.

APPLICATIONS RADONIFIANTES

par B. MAUREY

Exposé N° I

25 Octobre 1972

1. PROBABILITES CYLINDRIQUES

Soit E un e.l.c.s. Si N est un sous-espace fermé de E , on notera π_N la projection canonique de E sur E/N . Si M est un autre sous-espace fermé tel que $N \subset M$, il existe une projection $\pi_{M,N}$ de E/N sur E/M telle que : $\pi_M = \pi_{M,N} \circ \pi_N$.

On appelle probabilité cylindrique λ sur E la donnée d'un système projectif de probabilités (nécessairement de Radon) sur les quotients de dimension finie E/N . Autrement dit on se donne pour tout sous-espace fermé N de codimension finie une probabilité $\pi_N(\lambda)$ sur E/N de façon que :

$$N \subset M \Rightarrow \pi_{M,N}(\pi_N(\lambda)) = \pi_M(\lambda)$$

Soient maintenant F un evts, et u un opérateur linéaire continu de E dans F , de rang fini. Le noyau $N = \text{Ker } u$ est un sous-espace fermé de codimension finie, et u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\pi_N} E/N \xrightarrow{\bar{u}} F$$

Nous poserons $u(\lambda) = \bar{u}(\pi_N(\lambda))$. C'est une probabilité de Radon sur F .

Soient E et F deux e.l.c.s, u un opérateur linéaire continu de E dans F et λ une probabilité cylindrique sur E . Si N est un sous-espace fermé de codimension finie de F , $\pi_N \circ u$ est de rang fini. Nous définirons une probabilité cylindrique λ' sur F par

$$\pi_N(\lambda') = \pi_N \circ u(\lambda)$$

(On vérifie facilement les relations de compatibilité). Nous dirons que λ' est l'image de λ par u , et nous noterons $\lambda' = u(\lambda)$. Si $\xi \in F'$, on aura évidemment :

$$\xi(u(\lambda)) = t_u(\xi)(\lambda)$$

Soient E un elcs et μ une probabilité de Radon sur E . On déduit de μ une probabilité cylindrique $\tilde{\mu}$ sur E en posant :

$$\pi_N(\tilde{\mu}) = \pi_N(\mu)$$

Nous dirons qu'une probabilité cylindrique λ sur E "est de Radon" s'il existe une probabilité de Radon μ sur E telle que $\lambda = \tilde{\mu}$.

Si μ_1 et μ_2 sont deux probabilité de Radon sur E telles que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$, il résulte du théorème de Prokhorov ([1], exposé 1) que $\mu_1 = \mu_2$. Nous pourrions donc encore noter μ la probabilité cylindrique déduite d'une probabilité de Radon μ .

Rappelons la notion de fonction de type positif. Soient E un espace vectoriel et f une fonction sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est de type positif si :

$$\forall n ; \quad \forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E :$$

$$\sum c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Par exemple $f(x) = e^{ix}$ est une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. Rappelons le théorème de Bochner. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; pour qu'une distribution tempérée T sur E soit une probabilité, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier $\tilde{T}$ soit une fonction de type positif continue sur E' , avec $\tilde{T}(0) = 1$.

Théorème 1 : Soit E un elcs. La donnée d'une probabilité cylindrique λ sur E équivaut à la donnée d'une fonction de type positif f sur E' dont la restriction aux sous-espaces de dimension finie est continue, et telle que $f(0) = 1$. (La correspondance entre λ et f étant donnée par

$$f(\xi) = \int e^{it\xi} d\xi(\lambda)(t)$$

Démonstration : Si λ est une probabilité cylindrique, on définit sa transformée de Fourier $\tilde{\lambda}$, fonction sur E' , par :

$$\tilde{\lambda}(\xi) = \int e^{it\xi} d\xi(\lambda)(t)$$

Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E . On sait que $(E/N)'$ s'identifie à $N^0 = \{\xi \in E' \mid \langle x, \xi \rangle = 0, \forall x \in N\}$, sous-espace de dimension finie de E' . On voit que la restriction de $\mathfrak{J}\lambda$ à N^0 est la transformée de Fourier de $\pi_N(\lambda)$ au sens usuel, donc $\mathfrak{J}\lambda$ est continue et de type positif sur N^0 d'après Bochner. On en déduit le résultat puisque tout sous-espace de dimension finie de E' est de la forme N^0 .

Inversement soit f de type positif sur E' , dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie est continue. Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E . D'après Bochner, la restriction de f à N^0 est la transformée de Fourier d'une probabilité $\pi_N(\lambda)$ sur E/N , et il n'est pas difficile de voir que :

$$N \subset M \Rightarrow \pi_{M,N}(\pi_N(\lambda)) = \pi_M(\lambda),$$

donc f est la transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique λ sur E .

Corollaire : Soient E un elcs, λ_1 et λ_2 deux probabilités cylindriques sur E . Si $\xi(\lambda_1) = \xi(\lambda_2)$ pour tout $\xi \in E'$, on a $\lambda_1 = \lambda_2$.

Démonstration : On a alors $\mathfrak{J}\lambda_1 = \mathfrak{J}\lambda_2$.

Nous allons donner un exemple important de probabilité cylindrique. Soit H un espace de Hilbert de dimension finie. On a évidemment la notion de mesure de Lebesgue dx sur H . Considérons la probabilité :

$$\gamma_H = e^{-\pi \|x\|^2} dx$$

Si H_1 est un autre Hilbert de même dimension et u une isométrie de H sur H_1 , il est clair d'après la forme de γ_H que $u(\gamma_H) = \gamma_{H_1}$. Supposons que $H = F_1 \oplus F_2$, avec F_1 et F_2 orthogonaux, et soient p_1, p_2 les projections sur F_1 et F_2 . On a

$$\begin{aligned} \gamma_H &= e^{-\pi \|x\|^2} dx = e^{-\pi (\|p_1(x)\|^2 + \|p_2(x)\|^2)} dx \\ &= (e^{-\pi \|p_1(x)\|^2} p_1(dx)) (e^{-\pi \|p_2(x)\|^2} p_2(dx)) \\ &= \gamma_{F_1} \otimes \gamma_{F_2} \end{aligned}$$

Soit maintenant H un Hilbert de dimension infinie, et soit N un sous-espace fermé de codimension finie. L'espace H/N est un Hilbert pour la norme quotient. Posons :

$$\pi_N(\gamma) = \gamma_{H/N}$$

Soit $M \supset N$. On peut écrire $H/N = F_1 \oplus F_2$, avec F_1 et F_2 orthogonaux, $F_1 = \text{Ker } \pi_{M,N}$. Soient p_1 et p_2 les projections. On a :

$$\pi_{M,N} = \pi_{M,N} \circ p_2 ,$$

donc :

$$\pi_{M,N}(\gamma_{H/N}) = \pi_{M,N}(p_2(\gamma_{F_1} \otimes \gamma_{F_2})) = \pi_{M,N}(\gamma_{F_2})$$

Mais la restriction de $\pi_{M,N}$ à F_2 est une isométrie, donc :

$$\pi_{M,N}(\gamma_{F_2}) = \gamma_{H/M} , \quad \text{soit } \pi_{M,N}(\pi_N(\gamma)) = \pi_M(\gamma).$$

On a ainsi défini une probabilité cylindrique γ sur H , que l'on appelle probabilité cylindrique de Gauss. La transformée de Fourier de γ est $\mathcal{F}_\gamma(\xi) = e^{-1/2\|\xi\|^2}$. En vertu du théorème 1, nous aurions pu définir γ en remarquant que $e^{-1/2\|\xi\|^2}$ est de type positif sur H' .

Introduisons maintenant quelques notions de topologie : soient E un evts et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des probabilités de Radon sur E . On définit la topologie étroite sur $\mathcal{P}(E)$ comme la moins fine qui rend continues les applications $\mu \rightarrow \mu(f)$, où f est continue bornée sur E , à valeurs réelles. Si g est sci bornée sur E , $\mu \rightarrow \mu(g)$ est donc sci pour la topologie étroite.

Rappelons le théorème de Paul Lévy : si E est de dimension finie, un filtre (μ_i) de probabilités sur E converge étroitement vers μ si et seulement si les transformées de Fourier $\mathcal{F}_{\mu_i}$ convergent uniformément sur tout compact de E' vers $\mathcal{F}_\mu$.

Soient maintenant E un elcs, et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des probabilités cylindriques sur E . On définit la topologie cylindrique sur $\mathcal{P}(E)$ comme la moins fine rendant continues les applications $\lambda \mapsto u(\lambda)$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, pour tout espace de dimension finie F et tout $u \in L(E, F)$. (Il suffit évidemment de considérer le cas $u = \pi_N$, où N est un sous-espace fermé de codimension finie.)

On voit facilement que si un filtre de probabilités de Radon (μ_i) sur E converge étroitement vers μ , il converge a fortiori cylindriquement.

Proposition 1 : Soit E un elcs. Un filtre (λ_i) de probabilités cylindriques sur E converge cylindriquement vers λ si et seulement si les transformées de Fourier $\mathcal{F}\lambda_i$ convergent vers $\mathcal{F}\lambda$ uniformément sur tout compact de dimension finie de E' .

Démonstration : En appliquant la même méthode que pour le théorème 1, on se ramène à l'application du théorème de Paul Lévy.

2. TYPE DES PROBABILITES CYLINDRIQUES.

Nous appellerons elcs à dual quasi-normé E la donnée d'un elcs E et d'une quasi-norme $\xi \mapsto \|\xi\|$ sur E' telle que $\{\xi \mid \|\xi\| \leq 1\}$ soit borné pour $\sigma(E', E)$. (Rappelons que $\xi \mapsto \|\xi\|$ est une quasi-norme s'il existe $q \in]0, 1]$ tel que $\forall \xi, \eta, \|\xi + \eta\|^q \leq \|\xi\|^q + \|\eta\|^q$, $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$).

Donnons un exemple de cette situation. Considérons l'espace l^q , $0 < q \leq 1$. Son dual est l^∞ . Prenons pour E l'espace l^∞ , muni de la topologie (l^∞, l^q) . Son dual est alors l^q , que nous munissons de sa quasi-norme naturelle. En résumé, l^∞ muni de $\sigma(l^\infty, l^q)$ est un elcs à dual quasi-normé.

Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé. Les "morphismes" de E dans F sont les applications linéaires u continue de E dans F , et telles que la transformée ${}^t u$ soit continue de F' dans E' pour les topologies définies par les quasi-normes. Nous poserons :

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|\xi\|_{F'} \leq 1} \|{}^t u(\xi)\|_{E'}$$

Soient E un elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E et $p \in]0, +\infty[$. Nous dirons que λ est de type p s'il existe une constante C telle que :

$$\forall \xi \in E' \quad \left(\int |t|^p d(\xi(\lambda))(t) \right)^{1/p} \leq C \|\xi\|$$

On notera $\|\lambda\|_p^*$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Nous dirons que λ est de type zéro si pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe $R > 0$ tel que :

$$(1) \quad \|\xi\| \leq 1 \Rightarrow \int_{|t| > R} d(\xi(\lambda))(t) \leq \alpha$$

On en déduit par homothétie, pour $\varepsilon > 0$ quelconque :

$$(2) \quad \|\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \int_{|t| > \varepsilon} d(\xi(\lambda))(t) \leq \alpha$$

On notera $J_\alpha^*(\lambda)$ la plus petite constante R telle que (1) soit réalisée. Si λ est de type p , avec $p > 0$, elle est de type zéro, et :

$$J_\alpha^*(\lambda) \leq \alpha^{-1/p} \|\lambda\|_p^*.$$

Proposition 2 : Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique de type p sur E , et u une application linéaire continue de E dans F . On a :

$$\|u(\lambda)\|_p^* \leq \|u\| \|\lambda\|_p^* \quad \text{pour } p > 0, \text{ et pour } p = 0 :$$

$$J_\alpha^*(u(\lambda)) \leq \|u\| J_\alpha^*(\lambda) \quad \text{pour tout } \alpha \in]0, 1[.$$

La démonstration est immédiate, en utilisant $\xi(u(\lambda)) = ({}^t u(\xi))(\lambda)$.

Lemme : Soient E un elcs à dual quasi-normé, et λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E . On a :

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \leq \alpha / J_\alpha^*(\lambda) \Rightarrow |\mathcal{F}_\lambda(\xi_1) - \mathcal{F}_\lambda(\xi_2)| \leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha$$

Démonstration : Posons $N = \{x \mid \langle x, \xi_1 \rangle = \langle x, \xi_2 \rangle = 0\}$, et posons $\mu = \pi_N(\lambda)$. On aura :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_\lambda(\xi_1) - \mathcal{F}_\lambda(\xi_2)| &= \left| \int_{E/N} e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_2 \rangle} d\mu(x) \right| = \\ &= \left| \int e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} [1 - e^{i\langle x, \xi_2 - \xi_1 \rangle}] d\mu(x) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \int |1 - e^{i\langle x, \xi_2 - \xi_1 \rangle}| d\mu(x) \leq \int_{|t| \leq \alpha} |1 - e^{it}| d(\xi_2 - \xi_1)(\lambda)(t) + 2 \int_{|t| > \alpha} d(\xi_2 - \xi_1)(\lambda)(t)$$

$$\leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha, \text{ d'après la relation (2).}$$

Proposition 3 : Soient E et F deux elcs à dual quasi-normé, et λ une probabilité cylindrique sur E de type zéro. On suppose que F est de dimension finie. Si (u_i) est un filtre sur $L(E, F)$ tel que $\lim \|{}^t(u - u_i)\| = 0$, la probabilité $u(\lambda)$ est limite étroite du filtre $(u_i(\lambda))$.

Démonstration : D'après le théorème de Paul Lévy, il faut voir que $\mathcal{F}(u_i(\lambda))$ tend vers $\mathcal{F}(u(\lambda))$ uniformément sur toute quasi-boule de F'. Or, si $\|{}^t(u - u_i)\| \leq \alpha / R J_\alpha^*(\lambda)$, on a d'après le lemme :

$$\begin{aligned} \|\xi\| \leq R \Rightarrow |\mathcal{F}(u_i(\lambda))(\xi) - \mathcal{F}(u(\lambda))(\xi)| &= |\mathcal{F}_\lambda({}^t u_i(\xi)) - \mathcal{F}_\lambda({}^t u(\xi))| \leq \\ &\leq |1 - e^{i\alpha}| + 2\alpha, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. ORDRE DES PROBABILITES DE RADON. APPLICATIONS RADONIFIANTES

Nous aurons à considérer par la suite des probabilités sur des espaces de Banach qui ne seront pas de Radon pour la topologie normée, mais seulement pour une topologie localement convexe moins fine. Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante :

Nous appellerons elcs bitopologique la donnée d'un espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{C}$ d'elcs et d'une quasi-norme s.c.i. pour $\mathcal{C}$. Si de plus les quasi-boules fermées sont compactes pour $\mathcal{C}$, nous dirons que E est un elcs bitopologique à quasi-boules compactes. Nous dirons qu'une probabilité μ est de Radon sur elcs bitopologique si elle est de Radon pour la topologie $\mathcal{C}$.

Soient E un elcs bitopologique, et μ une probabilité de Radon sur E. Puisque la quasi-norme sur E est supposée s.c.i. pour $\mathcal{C}$, on peut considérer pour $p \in]0, +\infty[$:

$$\|\mu\|_p = \left(\int \|x\|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

Nous dirons que μ est d'ordre p si $\|\mu\|_p$ est fini.

Considérons maintenant la situation suivante : soient E et F deux elcs, u un opérateur de E dans F , et λ une probabilité cylindrique sur E . Nous voudrions savoir si $u(\lambda)$ est de Radon sur F . Pour cela, nous voulons employer le processus suivant : supposons que λ soit limite cylindrique d'un filtre de probabilités de Radon (λ_i) . Alors $u(\lambda)$ est évidemment limite cylindrique des $(u(\lambda_i))$. S'il existe une partie $A \subset \mathcal{V}(F)$, cylindriquement compacte et formée de probabilités de Radon, telle que $u(\lambda_i) \in A$ pour chaque i , nous aurons à la limite $u(\lambda) \in A$, donc $u(\lambda)$ sera de Radon sur F . D'où l'intérêt du résultat suivant :

Proposition 4 : Soit E un elcs bitopologique à quasi-boules compactes. L'ensemble A des mesures de Radon μ sur E telles que $\|\mu\|_p \leq 1$ ($0 < p < +\infty$) est étroitement compact, donc a fortiori cylindriquement compact. (Les topologies étroite et cylindrique considérées sont relatives à la topologie $\mathcal{C}$ d'elcs sur E).

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ la topologie d'elcs sur E , et soit $\check{E}$ le compactifié de Čech de E muni de $\mathcal{C}$. Si (μ_i) est un ultrafiltre sur A , il admet une limite étroite μ dans $\mathcal{P}(\check{E})$ qui est compact. Pour savoir que μ est portée par E , nous devons montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact } \subset E, \text{ tel que } \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit R tel que $1/R^p \leq \varepsilon$. Soit B_R la quasi-boule fermée de rayon R . On a pour tout i :

$$\mu_i(\bigcup B_R) \leq 1/R^p \leq \varepsilon, \text{ soit aussi : } \mu_i(B_R) \geq 1 - \varepsilon.$$

Mais puisque B_R est fermé pour $\mathcal{C}$, on a par convergence étroite

$$\mu(B_R) \geq \limsup_i \mu_i(B_R) \geq 1 - \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que μ est portée par E puisque B_R est compact pour $\mathcal{C}$ par hypothèse. D'autre part puisque la quasi-norme est s.c.i. pour $\mathcal{C}$:

$$\int \|x\|^p d\mu(x) \leq \liminf_i \int \|x\|^p d\mu_i(x) \leq 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Conformément à ce que nous avons dit avant la proposition 4 nous sommes conduits à poser la définition suivante : soient E un elcs à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E , et $p \in]0, +\infty[$. Nous dirons que λ est de type p approximable s'il existe une constante C et un filtre de probabilités de Radon (λ_i) , portées par des sous-espaces de dimension finie de E , qui converge cylindriquement vers λ , et tel que :

$$\forall i, \|\lambda_i\|_p^* \leq C$$

On notera $\|\lambda\|_p^{*a}$ la borne inférieure des constantes C telles que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Il serait encore plus agréable d'avoir, au lieu de probabilités de Radon portées par des sous-espaces de dimension finie, des probabilités à support fini. C'est effectivement possible d'après la proposition suivante:

Proposition 5 : Soit E un elcs à dual quasi-normé. Toute probabilité de Radon λ portée par un sous-espace de dimension finie de E , et telle que $\|\lambda\|_p^* \leq 1$, ($0 < p < \infty$) est cylindriquement adhérente à l'ensemble des probabilités de Radon μ à support fini, telles que $\|\mu\|_p^* \leq 1$. En conséquence, on peut remplacer dans la définition du type p approximable "portée par un sous-espace de dimension finie" par : "à support fini".

Démonstration : Définissons une norme sur E par :

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |\langle x, \xi \rangle|$$

Si λ est une probabilité de Radon sur E portée par un sous-espace de dimension finie, on voit facilement que $\lambda_R = \chi_{B_R} \lambda + (1 - \lambda(B_R)) \delta_0$ converge étroitement, donc cylindriquement vers λ quand $R \rightarrow \infty$, et que $\|\lambda_R\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$. Il suffit donc de montrer le résultat lorsque λ est portée par une boule. Dans ce cas on peut trouver une suite (g_n) de fonctions étagées telle que :

$$\left(\int \|x - g_n(x)\|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \leq 1/n$$

Posons $v_n = \left(\frac{g_n}{1 + 1/n} \right) (\mu)$. Il est clair que v_n est à support fini, et converge étroitement vers μ . D'autre part, pour $p \geq 1$ et $\|\xi\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left(\int |\langle x, \xi \rangle|^p dv_n(\xi) \right)^{1/p} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(\int |\langle g_n(x), \xi \rangle|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left[\left(\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} + \left(\int |\langle x - g_n(x), \xi \rangle|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} \right] \leq 1. \end{aligned}$$

(Pour $p < 1$, la démonstration est analogue en utilisant :

$$\int |\langle g_n(x), \xi \rangle|^p d\lambda(x) \leq \int |\langle x, \xi \rangle|^p d\lambda(x) + \int |\langle x - g_n(x), \xi \rangle|^p d\lambda(x).)$$

Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un elcs bitopologique et u un opérateur linéaire continu de E dans F . Nous dirons que u est p -radonifiant (resp : approximativement p -radonifiant) de E dans F , $0 < p < \infty$, si pour toute probabilité cylindrique λ de type p sur E (resp : de type p -approximable) $\mu(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur F .

Théorème 2 : Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un elcs bitopologique à quasi-boules compactes, et u un opérateur linéaire continu de E dans F . Pour que u soit approximativement p -radonifiant de E dans F , il suffit qu'il existe une constante C telle que pour toute probabilité λ à support fini, on ait :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq C \|\lambda\|_p^*$$

On en déduit pour λ de type p -approximable :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq C \|\lambda\|_p^{*a}$$

Démonstration : Soient λ de type p -approximable sur E et $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 5, il existe un filtre de probabilités à support fini (λ_i) qui converge cylindriquement vers λ et tel que :

$$\forall i \quad \|\lambda_i\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon$$

Les images $u(\lambda_i)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$, et vérifient par hypothèse :

$$\forall i \quad \|u(\lambda_i)\|_p \leq C(\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon)$$

D'après la proposition 4, $u(\lambda)$ est de Radon et vérifie :

$$\|u(\lambda)\|_p \leq C(\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon), \text{ d'où le résultat puisque } \varepsilon \text{ est arbitraire.}$$

4. L'HYPOTHESE D'APPROXIMATION

Soit E un elcs à dual quasi-normé. Nous dirons que le couple (E, E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si l'identité de E' est limite simple (pour la topologie quasi-normée) d'un filtre (π_i) d'opérateurs de rang fini, continus pour $\sigma(E', E)$ et tels que $\|\pi_i\| \leq 1$.

Proposition 6 : Soit E un elcs à dual quasi-normé. Si le couple (E, E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, toute probabilité cylindrique λ de type p sur E est de type p -approximable, et $\|\lambda\|_p^{*a} = \|\lambda\|_p^*$. En conséquence, toute application approximativement p -radonifiante de E dans un elcs bitopologique F est p -radonifiante.

Démonstration : Soit (π_i) un filtre d'opérateurs de rang fini sur E' vérifiant les conditions de la définition. Par hypothèse $\sigma_i = {}^t\pi_i$ opère de E dans E . Posons $\lambda_i = \sigma_i(\lambda)$. On a :

$$\|\lambda_i\|_p^* \leq \|\pi_i\| \|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* \quad (\text{Proposition 2})$$

Montrons que λ_i converge cylindriquement vers λ .

Pour cela, nous devons montrer que si F est de dimension finie, et si $v \in L(E, F)$, $v(\lambda_i)$ converge étroitement vers $v(\lambda)$. Mais puisque tv est de rang fini, $\lim_i \|{}^t(v \circ \sigma_i - v)\| = 0$, donc $v(\lambda_i) = v(\sigma_i(\lambda))$ converge étroitement vers $v(\lambda)$ d'après la proposition 3. Ceci achève la démonstration, puisque λ_i est de Radon, portée par un sous-espace de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Séminaire L. Schwartz 1969-70, Ecole Polytechnique.
- [2] L. Schwartz : Probabilités cylindriques et applications radonifiantes,
Jour. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec 1A, vol.18 n°2 p.139-286 (1970).
