

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

Une formalisation de l'analyse en composantes principales de variables complexes

Statistique et analyse des données, tome 11, n° 3 (1986), p. 1-18

[<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_3_1_0>](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_3_1_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE FORMALISATION DE L'ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES
DE VARIABLES COMPLEXES

CHAKAK Abderrahmane —Faculté des Sciences, Université de TETOUAN (MAROC).
DOSSOU-GBETE Simplicie et POUSSE Alain —Département de Mathématiques,
U.A. 1204 C.N.R.S., Faculté des Sciences, 64000 PAU (FRANCE).

Résumé

On propose une formalisation de l'extension de l'Analyse en Composantes Principales au cas de variables complexes. On montre que cette A.C.P. n'est pas équivalente à celle des variables réelles obtenues en transformant les variables complexes en couples de variables réelles. Elle peut néanmoins s'obtenir à partir de l'A.C.P. d'un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert réel. Ce point est détaillé dans le cas usuel d'un nombre fini de variables complexes.

Abstract

This paper deals with the linear and step-by-step Principal Component Analysis (P.C.A.). We discuss the complex extension of the linear and step-by-step P.C.A. of real Hilbertian operators. The results of this discussion yield us to propose a synthetic definition of linear and step-by-step P.C.A. of statistical variables with values in a complex Hilbert-space. We end up with the comparison between real P.C.A. and complex P.C.A..

Manuscrit reçu le 24 mai 1985

Révisé le 10 juin 1987

1. INTRODUCTION

Dans la modélisation des phénomènes aléatoires, il est parfois plus judicieux de considérer des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est donc naturel de penser à généraliser aux variables statistiques complexes les méthodes d'analyses factorielles qui, depuis plusieurs années, sont très utilisées pour l'étude des variables statistiques réelles. Le problème a été abordé dans [1] par D.R. BRILLINGER et dans [7] par J.C. DEVILLE pour ce qui concerne les fonctions aléatoires complexes, en partant de l'étude de leur fonction de covariance. Dans [9], A. GRORUD s'est intéressé à l'analyse des tableaux de nombres complexes qui généralement représentent les observations de variables complexes sur une population finie. Il nous a semblé néanmoins nécessaire d'effectuer une synthèse des différents points de vue concernant la généralisation des analyses factorielles en clarifiant certains aspects de la question. Au-delà de cette synthèse, A. CHAKAK a résolu dans [4] un certain nombre de problèmes asymptotiques liés, dans ce cadre, aux échantillons de grande taille. L'approximation par discrétisation sur le temps lorsque ce paramètre appartient à un intervalle $[a,b]$, qui n'est pas abordée ici, est très voisine de ce qui est connu pour un processus réel.

Dans le paragraphe 2 nous présentons, en l'étendant aux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$, la notion d'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) pas à pas d'opérateurs hilbertiens développée par J. DAUXOIS et A. POUSSE dans [5] pour les espaces de Hilbert réels. Nous commentons à cette occasion le schéma de dualité introduit par F. CAILLEZ et J.P. PAGES dans [2] ainsi que son extension aux espaces complexes. A partir des résultats obtenus nous proposons au paragraphe 3 une définition synthétique de l'A.C.P. pas à pas d'un vecteur aléatoire complexe. Une version "duale" de cette définition nous redonne celle de [7]. Le cas particulier assez courant de l'A.C.P. d'un tableau de nombres complexes est traité en exemple dans ce paragraphe 3 et nous donne l'occasion de clarifier certains résultats de [9]. Dans la mesure où l'on peut définir sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (cf. J. DIEUDONNE [8] p. 121), ce qui amène à doubler sa dimension algébrique, on pourra construire un vecteur aléatoire réel à partir d'un vecteur aléatoire complexe suivant une procédure décrite au paragraphe 4. Si l'A.C.P. d'un vecteur aléatoire complexe pouvait s'obtenir à partir de celle du vecteur aléatoire réel qu'on en a déduit par la procédure évoquée ci-dessus, il ne serait pas nécessaire d'avoir recours à des variables complexes lorsqu'on utilise les méthodes factorielles comme moyen d'analyse statistique. Nous montrons au paragraphe 4 que ces deux A.C.P. ne se déduisent pas l'une de l'autre en général. Le succès connu par les méthodes factorielles, auprès des statisticiens français en particulier, est dû en partie à la possibilité de visualiser sur des graphiques plans les résultats obtenus, ce qui facilite leurs interprétations.

Cette question a été abordée par A. GRORUD en [9]. La projection du nuage des individus sur chaque axe principal de l'analyse complexe conduit à la visualisation de cette projection dans un espace réel de dimension 2.

2. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES D'UN OPERATEUR HILBERTIEN.

La notion d'analyses factorielles d'opérateurs hilbertiens a été introduite dans [5] et a permis de ramener dans un cadre unique l'étude des analyses factorielles de variables statistiques numériques ou vectorielles réelles. En la généralisant aux opérateurs hilbertiens complexes, nous obtenons un moyen pour aborder commodément l'étude de l'extension des analyses factorielles aux variables statistiques hilbertiennes complexes.

Considérons deux espaces de Hilbert complexes séparables H_1 et H_2 ; leurs produits scalaires sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ et les normes associées $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Soit Φ un opérateur linéaire continu de H_1 dans H_2 ; on désigne par Φ^* l'opérateur adjoint de Φ ; par définition Φ^* dépend des produits scalaires considérés sur H_1 et H_2 .

2.1. Définition. On appelle analyse en composantes principales pas à pas de Φ toute suite $((\lambda_i, u_i))_{i \in I}$ où :

- I désigne $\mathbb{N}^*$ ou une section commençante de $\mathbb{N}^*$;
- $(u_i)_{i \in I}$ est une suite orthonormée d'éléments de H_2 ;
- $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une suite numérique positive et décroissante telle que :

$$\forall i \in I, \lambda_i = \sup \left\{ \frac{\|\Phi^* u\|_1}{\|u\|_2}, u \in H_2, \langle u, u_j \rangle_2 = 0 \quad \forall j < i \right\}.$$

Pour tout i de I , λ_i est appelé valeur principale de rang i et u_i est le vecteur principal associé ; si λ_i est une valeur principale non nulle, on appelle composante principale associée l'élément c_i de H_1 tel que

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \Phi^* u_i = \frac{1}{\|\Phi^* u_i\|_1} \Phi^* u_i.$$

On trouvera dans [5], p. 148-151, l'étude des conditions d'existence de l'A.C.P. pas à pas d'un opérateur hilbertien. Nous rappellerons simplement que si Φ est un opérateur compact, alors $(\lambda_i)_{i \in I}$ est la suite pleine, ordonnée en décroissant, des valeurs propres de l'opérateur autoadjoint positif et compact $V = \Phi \cdot \Phi^*$ et $(u_i)_{i \in I}$ est une suite de vecteurs propres associés. De plus les composantes principales associées à des valeurs propres

non nulles sont vecteurs propres unitaires de $W = \Phi \cdot \Phi^*$. On a alors :

$$\Phi = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} c_i \otimes u_i \quad (\text{au sens de la convergence en norme des opérateurs linéaires, } x \otimes y \text{ désignant l'opérateur : } z \rightarrow \langle z, x \rangle y).$$

La définition 2.1. fait apparaître clairement, à travers Φ^* , une liaison entre l'A.C.P. pas à pas de Φ et les structures hilbertiennes considérées sur H_1 et H_2 . Considérons sur H_1 (resp. H_2) un homéomorphisme linéaire M_1 (resp. M_2) autoadjoint positif. M_1^{-1} (resp. M_2^{-1}) est aussi un homéomorphisme linéaire autoadjoint et positif sur H_1 (resp. H_2). Le produit scalaire engendré sur H_1 (resp. H_2) par M_1 (resp. M_2) ou M_1^{-1} (resp. M_2^{-1}) ne modifie pas la structure topologique de H_1 (resp. H_2). On écrira (H, M) pour signifier que l'on considère H avec la structure hilbertienne engendrée par M , homéomorphisme linéaire et autoadjoint sur H ; le produit scalaire sera alors noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ et la norme associée $\| \cdot \|_M$. En considérant H_1 et H_2 avec les produits scalaires engendrés respectivement par M_1 et M_2 , l'opérateur adjoint de Φ change; si on le note $\hat{\Phi}$, il s'exprime en fonction de Φ^* (opérateur adjoint de Φ relativement aux produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) par :

$\hat{\Phi} = M_1^{-1} \Phi^* M_2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite finie et M_2 -orthonormée d'éléments de H_2 . Alors $u_i = M_2 v_i$, $i=1, \dots, n$ est une suite M_2^{-1} -orthonormée dans H_2 . On peut vérifier que :

$$\sup \left\{ \frac{\| \hat{\Phi} v \|_1}{\| v \|_2}^2, v \in H_2, \langle v, v_k \rangle_2 = 0, k=1, \dots, n \right\} = \sup \left\{ \frac{\| \Phi^* u \|_{M_1^{-1}}}{\| u \|_{M_2^{-1}}}^2, u \in H_2, \langle u, u_k \rangle_{M_2^{-1}} = 0, k=1, \dots, n \right\}$$

Il en résulte que l'on pourra définir l'A.C.P. pas à pas de Φ lorsque H_1 et H_2 sont munis des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M_2}$ de la manière suivante :

2.2. Définition.

L'A.C.P. pas à pas de Φ relativement aux produits scalaires définis par M_1 et M_2 est la donnée d'une suite $((\lambda_i, u_i))_{i \in I}$ où :

- I désigne $\mathbb{N}^*$ ou une section commençante de $\mathbb{N}^*$;
- $(u_i)_{i \in I}$ est une suite M_2^{-1} -orthonormée d'éléments de H_2 ;
- $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une suite numérique positive et décroissante telle que :

$$\forall i \in I \quad \lambda_i = \sup \left\{ \frac{\| \Phi^* u \|_{M_1^{-1}}}{\| u \|_{M_2^{-1}}}^2, u \in H_2, \langle u, u_k \rangle_{M_2^{-1}} = 0 \quad \forall j < i \right\}$$

Si de plus Φ est un opérateur compact, on peut montrer le résultat suivant ([5] pages 154-158) :

2.3. Proposition.

Φ admet une A.C.P. pas à pas relativement aux produits scalaires définis par M_1 et M_2 . Cette A.C.P. est obtenue par l'analyse spectrale de l'opérateur M_2 -autoadjoint compact et positif $\hat{V} = \Phi \cdot M_1^{-1} \cdot \Phi^* \cdot M_2$.

2.4. Facteurs principaux et schéma de dualité.

Nous allons discuter ici de l'extension des notions de facteurs principaux et de schéma de dualité. La base de cette discussion sera la dualité entre espaces de Hilbert, dont nous commencerons par rappeler quelques éléments ([12],[3]).

2.4.1. Éléments de dualité entre espaces de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. H^* désigne le dual topologique de H ; H^* est un espace vectoriel sur le même corps que H ; en tant qu'ensemble, H^* ne dépend que de la structure topologique de H . La structure hilbertienne de H entraîne l'existence d'une bijection de H sur H^* (cf. [12], p.33) que nous noterons J . J est un isomorphisme linéaire (resp. antilinéaire) lorsque H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). On montre aussi que la structure hilbertienne de H induit sur H^* une structure d'espace de Hilbert telle que J soit une isométrie (i.e. J conserve la norme), et, pour tout x et tout y de H :

$$\langle J(x), J(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\text{resp. } \langle \overline{x}, y \rangle) \text{ si } H \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}).$$

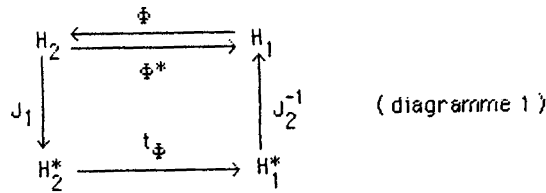
Soit M un homéomorphisme linéaire autoadjoint et positif sur H . Nous écrirons (H, M) pour signifier que nous considérons H muni du produit scalaire associé à l'opérateur M . (H, M) est encore un espace de Hilbert puisque la structure topologique n'est pas modifiée. $J \cdot M$ est un isomorphisme linéaire (resp. antilinéaire) lorsque H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). En munissant H^* du produit scalaire associé à l'opérateur ${}^tM^{-1}$, $J \cdot M$ devient une isométrie de (H, M) dans $(H^*, {}^tM^{-1})$.

Par ailleurs, M est un isomorphisme isométrique de (H, M) sur (H, M^{-1}) . Il s'ensuit que $J = J \cdot M \cdot M^{-1}$ est une isométrie surjective de (H, M^{-1}) sur $(H^*, {}^tM^{-1})$. Ainsi, lorsque H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, J est un isomorphisme linéaire et isométrique de (H, M^{-1}) sur $(H^*, {}^tM^{-1})$; on peut alors identifier $(H^*, {}^tM^{-1})$ à (H, M^{-1}) en identifiant Mx à la forme linéaire qui est associée à l'élément x de H par l'application linéaire $J \cdot M$.

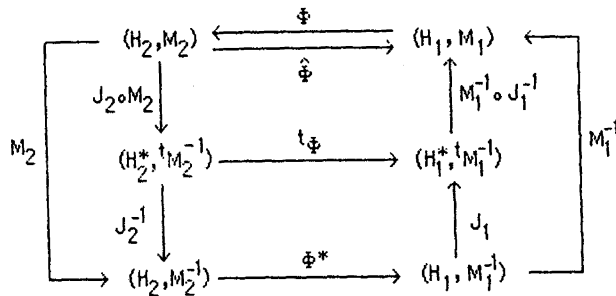
Par contre, si H est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, J est un isomorphisme isométrique, mais antilinéaire, de (H, M^{-1}) sur $(H^*, {}^tM^{-1})$. On ne pourra donc pas identifier $(H^*, {}^tM^{-1})$ à (H, M^{-1}) en identifiant Mx à la forme linéaire qui est associée à x , élément de H , par l'application $J \cdot M$ car J est ici antilinéaire.

2.4.2. Dualité en A.C.P.

Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables sur $\mathbb{R}$. Considérons Φ , application linéaire continue de H_1 sur H_2 . Soit ${}^t\Phi$ l'opérateur transposé de Φ . Contrairement à celle de Φ^* , la définition de ${}^t\Phi$ ne dépend pas des produits scalaires sur H_1 et H_2 mais uniquement des topologies. On associe généralement à chaque vecteur principal u de l'A.C.P. pas à pas de Φ la forme linéaire engendrée par u sur H_2 . Cette forme linéaire est appelée "facteur principal associé à u ". En notant J_1 (resp. J_2) l'isomorphisme isométrique de H_1 (resp. H_2) sur H_1^* (resp. H_2^*), on obtient le diagramme ci-dessous appelé "schéma de dualité" :



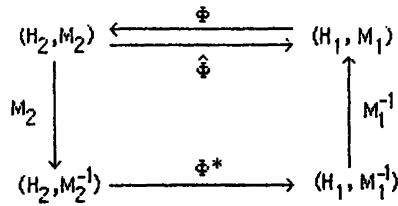
Si on considère sur H_1 (resp. H_2) un homéomorphisme linéaire autoadjoint positif M_1 (resp. M_2), on a alors compte tenu de ce qui précède le diagramme suivant :



(diagramme 2)

Puisqu'on a des espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, on peut identifier $(H_1^*, {}^tM_1^{-1})$ à (H_1, M_1^{-1}) et $(H_2^*, {}^tM_2^{-1})$ à (H_2, M_2^{-1}) de la manière que nous avons indiquée en 2.4.1.; on identifie alors le facteur principal associé à un vecteur principal u au vecteur $M_2 u$ de H_2 ; le diagramme 2 ci-dessus se simplifie pour donner le diagramme 3 suivant :

.7.



(diagramme 3)

Les diagrammes 1 et 2 ci-dessus sont encore justifiés lorsque H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On peut continuer de définir le facteur principal associé à un vecteur principal u par la forme linéaire continue engendrée par u sur H_2 ; mais on n'aura plus le droit de représenter cette forme linéaire par l'élément $M_2 u$ de H_2 . Néanmoins on pourra continuer d'utiliser le diagramme 3 comme schéma de dualité par souci de simplicité, en gardant à l'esprit que les facteurs principaux ne peuvent plus être représentés dans (H_2, M_2^{-1}) .

3. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE HILBERTIENNE

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé tel que $\mathcal{A}$ soit une tribu à base dénombrable. $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne l'espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ des variables aléatoires complexes centrées et dont le carré du module est intégrable. Soit Z un vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ séparable, noté H ; on suppose que

$$E(\|Z\|^2) < +\infty \quad \text{et} \quad E(Z) = \int_{\Omega} Z(\omega) dP(\omega) = 0$$

On note $Z \otimes Z$ le vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\sigma_2(H)$, espace de Hilbert séparable des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H , et tel que $Z \otimes Z(\omega) = Z(\omega) \otimes Z(\omega)$ pour tout ω de Ω . $Z \otimes Z$ est un vecteur aléatoire de norme (de $\sigma_2(H)$) P -intégrable, et $E(Z \otimes Z) = \int_{\Omega} Z(\omega) \otimes Z(\omega) dP(\omega)$ est un élément de $\sigma_2(H)$ appelé opérateur de covariance de Z .

Considérons l'application linéaire continue Φ de $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans H définie par : $\Phi(f) = \int_{\Omega} f(\omega) Z(\omega) dP(\omega) = E(fZ)$. On peut montrer que Φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt ; Φ^* étant l'opérateur adjoint de Φ , on a pour tout u de H : $\Phi^*(u) = \langle u, Z(\omega) \rangle$ P -presque partout sur Ω . De plus $\Phi \cdot \Phi^* = E(Z \otimes Z)$.

3.1. Définition. On appelle A.C.P. pas à pas de Z l'A.C.P. pas à pas de l'opérateur Φ .

Φ étant un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact, l'A.C.P. pas à pas de Z s'obtient par l'analyse spectrale de l'opérateur $\Phi \cdot \Phi^* = E(Z \otimes Z)$. Par ailleurs Φ est un opérateur intégral de noyau Z ; on a alors : $Z(\omega) = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} \frac{c_i(\omega)}{c_i(\omega)} u_i$ P-presque partout.

L'A.C.P. de la variable Z pouvant être obtenue à partir de l'analyse spectrale de l'opérateur de covariance de Z , il apparaît que si H est de dimension finie la définition précédente fournit les mêmes résultats que celle proposée par M.OKAMOTO et M.KANAZAWA dans [10], qui consiste à minimiser $\|E[(X-AY)^t(X-AY)]\|_S$ sur A et Y , où A est une matrice $p \times k$ et Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$, et où $\|\cdot\|_S$ est une norme unitairement invariante quelconque. Cette définition fut étendue par D.R.BRILLINGER aux variables complexes. La théorie de l'A.C.P. de processus aléatoires vectoriels développée par D.R.BRILLINGER est obtenue à partir de la définition de [10] et de la notion de filtre linéaire; elle s'obtient à partir des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur de densité spectrale du processus multivarié et stationnaire considéré. La définition de [10] peut se généraliser au cas où H est de dimension infinie en considérant par exemple l'idéal à norme symétrique des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H (cf.[13]); elle conduit aux mêmes résultats que notre définition.

3.2. A.C.P. pas à pas de la variable aléatoire "duale" de Z .

Soit J l'isométrie antilinéaire de H dans H^* telle que, pour tout u de H , $J(u)$ soit le dual topologique de u . Posons $Z^* = J \cdot Z$; nous dirons que Z^* est la "variable aléatoire duale" de Z . L'A.C.P. pas à pas de Z^* se définit à partir de l'opérateur linéaire et continu Ψ de $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans H^* tel que, pour tout f de $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$\Psi(f) = \int_{\Omega} f(\omega) Z^*(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} J(\overline{f(\omega)} Z(\omega)) dP(\omega) = J \left[\int_{\Omega} \overline{f(\omega)} Z(\omega) dP(\omega) \right].$$

On a donc $\Psi(f) = J \cdot \Phi(\overline{f})$. L'espace de Hilbert $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ peut être identifié à son dual topologique en considérant l'opérateur antilinéaire et involutif noté J_p , qui à tout f de $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associe son conjugué $\overline{f}$ (i.e. $\overline{\overline{f}(\omega)} = f(\omega)$ P-presque partout sur Ω); il en résulte que $\Psi = J \cdot \Phi \cdot J_p$, d'où $\Psi^* = J_p \cdot \Phi^* \cdot J^{-1}$. Ψ étant, comme Φ , un opérateur de Hilbert-Schmidt, l'A.C.P. pas à pas de Z^* est donnée par l'analyse spectrale de l'opérateur $E(Z^* \otimes Z^*) = \Psi \cdot \Psi^* = J \cdot \Phi \cdot \Phi^* \cdot J^{-1}$. Il en résulte que Z et Z^* admettent les mêmes valeurs principales, et u , élément de H , est vecteur principal de Z associé à une valeur principale λ si et seulement si $J(u)$ est vecteur principal de Z^* associé à λ ; de plus les composantes principales respectives associées à la même valeur principale sont conjugu-

guées l'une de l'autre. Il en résulte que l'A.C.P. pas à pas de Z^* conduit à la même décomposition de Z que celle fournie par Φ .

L'intérêt de l'A.C.P. pas à pas de la variable "duale" est qu'elle nous permet de retrouver la définition de l'A.C.P. d'une fonction aléatoire $(X_t)_{t \in T}$, avec T compact, proposée en [7] à partir de la fonction de covariance de cette fonction aléatoire.

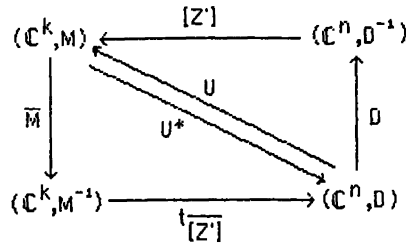
3.3. A.C.P. d'un tableau de nombres complexes.

Pour tout entier ℓ de $\mathbb{N}^*$, nous écrivons $(\mathbb{C}^\ell, Q)$ pour signifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^\ell$ est muni du produit scalaire dont Q est la matrice relativement à la base canonique. Ce produit scalaire est défini par l'opérateur linéaire autoadjoint et défini positif dont la matrice est $\bar{Q}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^\ell$.

La réalisation d'une variable statistique Z à valeurs dans $\mathbb{C}^k$ sur une population Ω de n individus $\omega_1, \dots, \omega_n$ est généralement représentée par un tableau $[Z] = \{Z_{ij}\}_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n}$ à k lignes et n colonnes ; Z_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de la réalisation $Z(\omega_j)$ de Z sur l'individu ω_j . Si chaque ω_j , $1 \leq j \leq n$, est muni d'une probabilité p_j , l'espace de Hilbert $L^2_0(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ peut être identifié à $(\mathbb{C}^n, D)$ où D est la matrice diagonale de diagonale $(p_j)_{j=1, \dots, n}$.

Lorsque la variable Z n'est pas centrée, on considère la variable centrée $Z' = Z - E(Z)$, avec $m = E(Z) = \sum p_j Z(\omega_j)$. Alors Z' est représentée matriciellement par le tableau "centré" $[Z'] = \{Z'_{ij}\}_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n}$ avec $Z'_{ij} = Z_{ij} - m_i$.

Par définition, l'A.C.P. du tableau centré $[Z']$ est l'A.C.P. pas à pas de la variable Z' qu'il représente. En identifiant $L^2_0(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à $(\mathbb{C}^n, D)$, l'opérateur Φ associé à Z' par la définition 3.1. devient l'opérateur linéaire U de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^k$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est $[Z']D$; si $\mathbb{C}^k$ est muni du produit scalaire défini par la matrice hermitienne et définie positive M , alors Φ^* , opérateur adjoint de Φ , devient l'opérateur linéaire U^* de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est ${}^t[Z']\bar{M}$. On vérifie que $\Phi \cdot \Phi^*$ se transforme en l'opérateur linéaire $U \cdot U^*$ de $\mathbb{C}^k$ dans lui-même dont la matrice est $[Z']D {}^t[Z']\bar{M}$. L'A.C.P. pas à pas de Z' , donc l'A.C.P. du tableau centré $[Z']$, est obtenue par l'analyse spectrale de la matrice $[Z']D {}^t[Z']\bar{M}$, ce qui d'après la proposition 2.3. équivaut à l'A.C.P. pas à pas de l'application linéaire de matrice $[Z']$ relativement aux produits scalaires de matrices D^{-1} et M respectivement. D'où le schéma simplifié suivant, compte tenu de la convention exposée au paragraphe précédent :



4. A.C.P. COMPLEXE ET A.C.P. REELLE

Il est bien connu qu'on peut définir un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ à partir d'un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de telle manière qu'on ait deux espaces métriques homéomorphes (cf. DIEUDONNE J. [8] p. 121). Z étant une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, on pourra lui faire correspondre une variable aléatoire $\tilde{Z}$ à valeurs dans un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ en considérant l'image de Z par l'homéomorphisme évoqué précédemment. Il est nécessaire de savoir si on peut obtenir ou non l'A.C.P. pas à pas de Z à partir de celle de $\tilde{Z}$, dans la mesure où l'A.C.P. d'une variable aléatoire hilbertienne réelle est de pratique plus courante.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On peut considérer H comme un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On le notera alors $\tilde{H}$, pour le distinguer de H , espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note Λ_H la bijection canonique de H sur $\tilde{H}$; pour tout λ de $\mathbb{R}$ et tout x de H , $\Lambda_H(\lambda x) = \lambda \Lambda_H(x)$. Soit i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On peut montrer que, pour tout x non nul de H , $\Lambda_H(x)$ et $\Lambda_H(ix)$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\tilde{H}$.

Considérons la forme bilinéaire symétrique sur $\tilde{H}$ définie par :

$$(x, y) \longrightarrow \operatorname{Re} [\langle \Lambda_H^{-1}(x), \Lambda_H^{-1}(y) \rangle].$$

Cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $\tilde{H}$. Muni de ce produit scalaire, $\tilde{H}$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et Λ_H est un homéomorphisme d'espaces métriques entre H et $\tilde{H}$ car, pour tout x de H , on a $\|x\| = \|\Lambda_H(x)\|$. Par ailleurs on obtient sans difficulté les lemmes suivants (cf. [4] par exemple).

4.1. Lemme

Pour tout x et tout y de H , on a :

- (i) $\langle \Lambda_H(ix), \Lambda_H(iy) \rangle = \langle \Lambda_H(x), \Lambda_H(y) \rangle$;
- (ii) $\langle \Lambda_H(x), \Lambda_H(iy) \rangle = \operatorname{Im} (\langle x, y \rangle)$;
- (iii) $\Lambda_H(x \otimes y) \cdot \Lambda_H^{-1} = \Lambda_H(x) \otimes \Lambda_H(y) + \Lambda_H(ix) \otimes \Lambda_H(iy)$

Il résulte de la propriété (ii) de ce lemme 4.1. que, pour tout x , $\Lambda_N(x)$ et $\Lambda_N(ix)$ sont des éléments orthogonaux dans $\tilde{H}$.

4.2. Lemme

Soit Z un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans H . Si Z est de norme intégrable, alors :

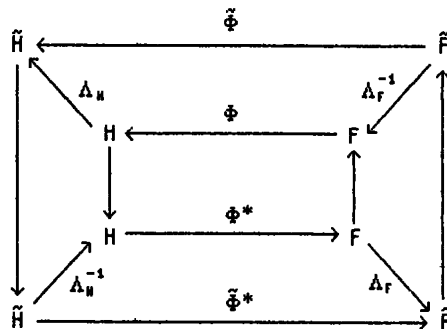
$$E(\Lambda_N \cdot Z) = \Lambda_N [E(Z)] .$$

Soit F un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $\tilde{F}$ l'espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ associé à F par la procédure décrite ci-dessus. On considère Φ , application linéaire continue de F dans H . Alors $\Lambda_N \cdot \Phi \cdot \Lambda_F^{-1} = \tilde{\Phi}$ est une application linéaire continue de $\tilde{F}$ dans $\tilde{H}$. On peut montrer (cf. [4]) le résultat suivant.

4.3. Lemme

- (i) $\|\Phi\| = \|\tilde{\Phi}\|$;
- (ii) $\tilde{\Phi}^* = \Lambda_F \cdot \Phi^* \cdot \Lambda_N^{-1}$;
- (iii) $\tilde{\Phi}$ est un opérateur compact si et seulement si Φ l'est ;
- (iv) si $F=H$, $\tilde{\Phi}$ est autoadjoint si et seulement si Φ l'est.

Soit Z un vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans H et tel que $E(\|Z\|^2) < +\infty$. Posons $F = L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$; comme au paragraphe 3, Φ est l'opérateur linéaire de F dans H tel que, pour tout f de F , $\Phi(f) = E(fZ)$.



On a vu au paragraphe 3 que, Φ étant un opérateur compact, l'A.C.P. pas à pas de Z s'obtient par analyse spectrale de $\Phi \cdot \Phi^*$. Or $\tilde{\Phi} = \Lambda_N \cdot \Phi \cdot \Lambda_F^{-1}$ est un opérateur linéaire continu et compact de l'espace de Hilbert réel $\tilde{F}$ dans l'espace de Hilbert réel $\tilde{H}$. La proposition qui suit va nous permettre de montrer que l'A.C.P. pas à pas de Z est équivalente à celle de l'opérateur $\tilde{\Phi}$.

4.4. Proposition

Un vecteur u de H est vecteur propre de $\Phi \cdot \Phi^*$ associé à une valeur propre α si et seulement si $\Lambda_H(u)$ et $\Lambda_H(iu)$ sont vecteurs propres de $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*$ associés à α .

Démonstration :

Soit $u \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que $\Phi \cdot \Phi^*(u) = \alpha u$; on a alors : $\Lambda_H \cdot \Phi \cdot \Phi^* \cdot \Lambda_H^{-1}[\Lambda_H(u)] = \alpha \Lambda_H(u)$, d'où : $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*[\Lambda_H(u)] = \alpha u$.

Puisque $\Phi \cdot \Phi^*(u) = \alpha u$ implique $\Phi \cdot \Phi^*(iu) = \alpha iu$, on a comme ci-dessus :

$$\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*[\Lambda_H(iu)] = \alpha \Lambda_H(iu).$$

Réciproquement, si pour $v \in \tilde{H}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*(v) = \alpha v$, alors :

$$\Phi \cdot \Phi^*[\Lambda_H^{-1}(v)] = \alpha \Lambda_H^{-1}(v), \text{ puisque } \tilde{\Phi} = \Lambda_H \cdot \Phi \cdot \Lambda_F^{-1} \text{ et } \tilde{\Phi}^* = \Lambda_F \cdot \Phi^* \cdot \Lambda_H^{-1}.$$

4.5. Corollaire :

Toute valeur propre de $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*$ est de multiplicité paire.

En effet, le sous-espace propre correspondant à α contient $\Lambda_H(u)$ et $\Lambda_H(iu)$, qui sont orthogonaux dans $\tilde{F}$, pour tout vecteur propre u de $\Phi \cdot \Phi^*$ associé à α .

Il résulte de la proposition ci-dessus que u , élément de H , est un vecteur principal de l'A.C.P. pas à pas de Z associé à la valeur principale $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\Lambda_H(u)$ et $\Lambda_H(iu)$ sont vecteurs principaux de l'A.C.P. pas à pas de l'opérateur $\tilde{\Phi}$ associé à la valeur principale α . On peut donc dire que l'A.C.P. pas à pas de Z est équivalente à celle de $\tilde{\Phi}$.

$\tilde{Z} = \Lambda_H \cdot Z$ étant une variable statistique hilbertienne réelle à valeurs dans $\tilde{H}$ et centrée, on pourra dire que l'A.C.P. pas à pas de Z est équivalente à celle de $\tilde{Z}$ si $\tilde{Z}$ admet les mêmes suites de valeurs principales et de vecteurs principaux que $\tilde{\Phi}$. Or les vecteurs principaux de $\tilde{Z}$ sont des vecteurs propres de $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ associés aux valeurs principales.

4.6. Proposition

Pour tout u de $\tilde{H}$, $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*(u) = [E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})](u) + [E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))](u)$

Démonstration :

Puisque $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^* = \Lambda_H \cdot E(Z \otimes Z) \cdot \Lambda_H^{-1}$, alors :

$$\forall u \in \tilde{H}, \quad \tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*(u) = \Lambda_H[E(Z \otimes Z) \Lambda_H^{-1}(u)] = \Lambda_H[E(\langle \Lambda_H^{-1}(u), Z \rangle Z)];$$

$$\operatorname{Re}[\langle \Lambda_H^{-1}(u), Z \rangle] = \langle u, \Lambda_H(Z) \rangle \text{ et } \operatorname{Im}[\langle \Lambda_H^{-1}(u), Z \rangle] = \langle u, \Lambda_H(iZ) \rangle.$$

On a donc :

$$\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*(u) = \Lambda_H[E(\langle u, \Lambda_H(Z) \rangle Z + i \langle u, \Lambda_H(iZ) \rangle Z)]$$

$$\begin{aligned} &= E[\langle u, \Lambda_H(Z) \rangle \Lambda_H(Z) + \langle u, \Lambda_H(iZ) \rangle \Lambda_H(iZ)] \\ &= E(\Lambda_H(Z) \otimes \Lambda_H(Z)) (u) + E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ)) (u). \end{aligned}$$

On en déduit qu'une condition nécessaire pour qu'un vecteur u de $\tilde{H}$ soit vecteur propre de $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*$ et $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ associé à la même valeur propre est que u appartienne au noyau de l'opérateur $E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))$. Nous établissons dans la proposition qui suit un lien entre l'analyse spectrale de $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ et celle de $E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))$.

4.7. Proposition

$E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ et $E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))$ ont les mêmes valeurs propres ; si u est vecteur propre de $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ associé à la valeur propre λ , alors $\Lambda_H[i \Lambda_H^{-1}(u)]$ est vecteur propre de $E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))$ associé à la même valeur propre.

Démonstration :

Soit $u \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})(u) = \lambda u$. Alors $E[\langle u, \Lambda_H(Z) \rangle \Lambda_H(Z)] = \lambda u$.

Posons $v = \Lambda_H^{-1}(u)$; on a :

$$\langle \Lambda_H(v), \Lambda_H(Z) \rangle = \langle \Lambda_H(iv), \Lambda_H(iZ) \rangle ,$$

$$\text{d'où : } \lambda u = E(\langle \Lambda_H(iv), \Lambda_H(iZ) \rangle \Lambda_H(iZ)) = \Lambda_H[E(\langle \Lambda_H(iv), \Lambda_H(iZ) \rangle Z)],$$

ce qui implique $\lambda v = E(\langle \Lambda_H(iv), \Lambda_H(iZ) \rangle Z)$.

Il en résulte :

$$\lambda \Lambda_H(iv) = E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ)) \Lambda_H(iv) .$$

On déduit de la proposition 4.6. que si $E(\tilde{Z} \otimes \tilde{Z})$ est un isomorphisme de $\tilde{H}$, ses vecteurs propres ne seront vecteurs propres de $\tilde{\Phi} \cdot \tilde{\Phi}^*$ que si l'opérateur $E(\Lambda_H(iZ) \otimes \Lambda_H(iZ))$ est identiquement nul, ce qui est impossible compte tenu de la proposition 4.7.. On en conclut que l'A.C.P. pas à pas de Z n'est pas équivalente à celle de $\tilde{Z}$.

Cependant, l'A.C.P. pas à pas de $\tilde{Z}$ étant équivalente à celle de l'opérateur hilbertien réel $\tilde{\Phi}$, nous allons montrer comment expliciter $\tilde{\Phi}$ afin de s'en servir dans la mise en oeuvre de l'A.C.P. pas à pas de Z .

4.8. Lemme

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Il existe dans H un ensemble fermé H_1 tel que :

- (i) $\tilde{H}$ est la somme hilbertienne de $\Lambda_H(H_1)$ et $\Lambda_H(iH_1)$;
- (ii) pour tout u de H , il existe u_1 et u_2 dans H_1 tel que $u = u_1 + iu_2$.

Démonstration :

Soit $(u_k)_{k \in K}$ une base hilbertienne de H . On désigne par H_1 la fermeture dans H du sous-ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des $u_k, k \in K$; $\Lambda_H(H_1)$ est alors le sous-espace de $\tilde{H}$ engendré par $(\Lambda_H(u_k))_{k \in K}$, et $\Lambda_H(iH_1)$ est le sous-espace de Hilbert de $\tilde{H}$ engendré par $(\Lambda_H(iu_k))_{k \in K}$. Donc $\Lambda_H(H_1)$ et $\Lambda_H(iH_1)$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\tilde{H}$.

Soit $u \in H$. On a :

$$\forall k \in K, \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(u_k) \rangle = \operatorname{Re}(\langle u, u_k \rangle) \text{ et } \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(iu_k) \rangle = \operatorname{Im}(\langle u, u_k \rangle)$$

d'où :

$$u = \sum_{k \in K} \langle u, u_k \rangle u_k = \sum_{k \in K} \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(u_k) \rangle u_k + i \sum_{k \in K} \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(iu_k) \rangle u_k.$$

Posons $u_1 = \sum_{k \in K} \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(u_k) \rangle u_k$ et $u_2 = \sum_{k \in K} \langle \Lambda_H(u), \Lambda_H(iu_k) \rangle u_k$; u_1 et u_2 sont des éléments de H_1 , $u = u_1 + iu_2$, $\Lambda_H(iu_2) \in \Lambda_H(iH_1)$ et $\Lambda_H(u_1) \in \Lambda_H(H_1)$, d'où le lemme.

Il faut remarquer que la décomposition établie dans le lemme 4.8. n'est pas canonique dans la mesure où le sous-ensemble H_1 n'est pas unique.

Par ailleurs si $u = u_1 + iu_2$ est une décomposition de $u \in H$, vérifiant les conditions du lemme 4.8., $\Lambda_H(u_1)$ et $\Lambda_H(iu_2)$ sont, dans $\tilde{H}$, les projections orthogonales de $\Lambda_H(u)$ sur $\Lambda_H(H_1)$ et $\Lambda_H(iH_1)$ respectivement; il en résulte que u_1 et iu_1 sont les projections orthogonales de u sur les sous-ensembles fermés H_1 et iH_1 de H .

4.9. Explicitation de $\tilde{\Phi}$ en vue de la mise en oeuvre de l'A.C.P.

Considérons F , espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et Φ , opérateur linéaire continu de F dans H . Soit F_1 un sous-ensemble de F vérifiant les conditions du lemme 4.8.. On note Π (resp. Π_H) le projecteur orthogonal de $\tilde{F}$ (resp. $\tilde{H}$) sur $\Lambda_F(F_1)$ (resp. $\Lambda_H(H_1)$). On peut vérifier que $\Lambda_F^{-1} \cdot \Pi_F \cdot \Lambda_F$ (resp. $\Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H$) et $\Lambda_F^{-1} \cdot (I - \Pi_F) \cdot \Lambda_F$ (resp. $\Lambda_H^{-1} \cdot (I - \Pi_H) \cdot \Lambda_H$) sont les projecteurs orthogonaux de F (resp. H) sur F_1 (resp. H_1) et iF_1 (resp. iH_1). Or :

$$\forall u \in H, \Lambda_H^{-1} \cdot (I - \Pi_H) \cdot \Lambda_H(u) = i \Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H(-iu).$$

Il en résulte que pour tout f de F :

$$\Phi(f) = \Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H \cdot \Phi(f) + i \Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H \cdot (-i\Phi)(f).$$

Posons : $A = \Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H \cdot \Phi$ et $B = \Lambda_H^{-1} \cdot \Pi_H \cdot \Lambda_H \cdot (-i\Phi)$; On a : $\Phi = A + iB$.

Puisque $f = f_1 + if_2$, il vient :

$$\Phi(f) = A(f_1) - B(f_2) + i(A(f_2) + B(f_1)).$$

Compte tenu du lemme 4.8., il nous paraît naturel d'utiliser la notation matricielle pour représenter les éléments de F , H , $\tilde{F}$ et $\tilde{H}$. Si F_1 (resp. H_1) est un sous-ensemble fermé de F (resp. H) vérifiant la condition (i) du lemme 4.8., alors pour tout u de F_1 (resp. H_1) on pose :

$$u = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad iu = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad \Lambda_F(u) = \begin{bmatrix} \Lambda_F(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_F(iu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_F(u) \end{bmatrix}$$

$$(\text{resp. } \Lambda_H(u) = \begin{bmatrix} \Lambda_H(u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_H(iu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda_H(u) \end{bmatrix}).$$

On en déduit que pour tout f de F : $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_F(f) = \begin{bmatrix} \Lambda_F(f_1) \\ \Lambda_F(f_2) \end{bmatrix},$

$$\Phi(f) = \begin{bmatrix} A(f_1) - B(f_2) \\ A(f_2) - B(f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix};$$

d'où la représentation de Φ sous la forme :

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

De plus : $\forall \tilde{f} \in \tilde{F}, \quad \tilde{f} = \Pi_F(\tilde{f}) + (I - \Pi_F)(\tilde{f}), \quad \text{d'où : } \Lambda_F^{-1}(\tilde{f}) = \Lambda_F^{-1} \circ \Pi_F(\tilde{f}) + i \Lambda_F^{-1} \circ (I - \Pi_F)(\tilde{f}).$

On peut donc écrire $\Lambda_F^{-1}(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \Lambda_F^{-1} \circ \Pi_F(\tilde{f}) \\ \Lambda_F^{-1} \circ (I - \Pi_F)(\tilde{f}) \end{bmatrix},$ et on obtient

$$\tilde{\Phi} = \Lambda_H \circ \Phi \circ \Lambda_F^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_H \circ A \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Pi_F & -\Lambda_H \circ B \circ \Lambda_F^{-1} \circ (I - \Pi_F) \\ \Lambda_H \circ B \circ \Lambda_F^{-1} \circ (I - \Pi_F) & \Lambda_H \circ A \circ \Lambda_F^{-1} \circ \Pi_F \end{bmatrix}$$

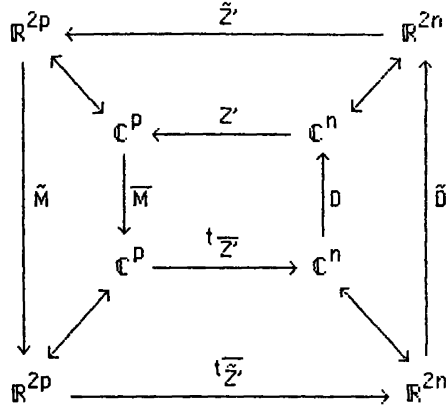
L'utilisation de $\tilde{\Phi}$, opérateur hilbertien réel, permettra alors la mise en oeuvre de l'A.C.P. de variables complexes par l'exploitation des programmes courants (cf. § 4.10).

4.10. Mise en oeuvre en dimension finie

Si on considère p variables complexes z_ℓ , $\ell=1, \dots, p$, observées sur n individus (chacun muni d'un poids p_j), les données, après centrage des variables, forment une matrice complexe $Z' = (z_{\ell j})_{p \times n}$ où $z_{\ell j}$ est la valeur de z_ℓ pour l'individu j . En posant $z_{\ell j} = x_{\ell j} + iy_{\ell j}$ on obtient $Z' = A + iB$ où A est la matrice $p \times n$ des parties réelles $x_{\ell j}$, et B celle des parties imaginaires $y_{\ell j}$. On considère sur $\mathbb{C}^p$ un produit hermitien de matrice M . Tout naturellement, on prend ici $H_1 = \mathbb{R}^p$ et $\tilde{H} = \mathbb{R}^{2p}$. Si $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}^p$, où z_1 (resp. z_2) est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ des parties réelles (resp. imaginaires) des composantes de z , alors :

$$\Lambda_M(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p}.$$

En utilisant le schéma du § 3.3., le schéma du § 4.3. devient ici :



On vérifie alors à partir des résultats ci-dessus que l'A.C.P. complexe des variables $z_1, \dots, z_p$ pour la métrique M s'obtient comme A.C.P. réelle de la matrice $2p \times 2n$:

$$\tilde{Z}' = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

pour la "métrique des poids" sur $\mathbb{R}^{2n}$: $\tilde{D} = \begin{bmatrix} D & | & 0 \\ \hline 0 & | & D \end{bmatrix}$, où $D = \text{diag}(p_i)$,

et avec pour métrique sur "l'espace des individus" : $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ {}^tM_2 & M_1 \end{bmatrix}$,

où $M = M_1 + iM_2$, avec $M_1 = {}^tM_1$ et $M_2 = -{}^tM_2$.

Comme on l'a vu, les valeurs propres obtenues pour cette A.C.P. réelle sont de multiplicité paire.

Remarque : On retrouve, par le choix des isométries utilisées ici entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$, et entre $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{R}^{2p}$, la mise en oeuvre proposée par A.GRORUD ([9]). Cependant, ce choix d'isométries est arbitraire, et on peut obtenir d'autres formes d'A.C.P. réelles équivalentes à l'A.C.P. complexe.

5. CONCLUSION

Lorsqu'on veut faire l'A.C.P. d'un processus $(X_t)_{t \in [a,b]}$ à temps continu, on se ramène systématiquement en dimension finie par discrétisation sur $[a,b]$. L'étude des problèmes de convergence justifiant cette approximation, comme on l'a dit, sort du cadre actuel de la formalisation de l'A.C.P. complexe. Nous n'avons pas non plus développé ici les problèmes de représentations liés à cette A.C.P., ainsi que les comparaisons avec les A.C.P. réelles utilisables dans ce cas. Les questions liées à l'échantillonnage (convergence, étude asymptotique...) sont étudiées en [4]. Les résultats obtenus diffèrent de ceux connus dans le cas réel, en particulier du fait de certaines propriétés des vecteurs aléatoires gaussiens complexes.

Les éléments de l'A.C.P. jouissent de propriétés d'optimalité nombreuses. Ces propriétés ont été étudiées pour un espace de Hilbert séparable dans le cas réel en [6] et [13], et reprises dans ce cadre très général dans le cas complexe en [4]. En dimension finie, une partie de ces propriétés est exposée en [11].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BRILLINGER D.R. : Time series : Data analysis and theory. Holt , Rinehart and Winston, Inc.(1975).
- [2] CAILLIEZ F. et PAGES J.P. : Introduction à l'analyse des données. SMASH (1976).
- [3] CAILLIEZ F. : Analyse des données. Presses de l'Université de Montreal (1984).
- [4] CHAKAK A. : Analyses factorielles de variables hilbertiennes complexes ; stabilité, étude asymptotique. Thèse de 3^e cycle, Université de Pau et des Pays de l'Adour (1983).
- [5] DAUXOIS J. et POUSSE A. : Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse (1976).
- [6] DAUXOIS J., POUSSE A. et TECHENE J.J. : Quelques propriétés d'optimisation sous contraintes. Application à l'analyse factorielle d'une fonction aléatoire. Pub. du Labo. de Statistique et Probabilités, Toulouse (1979).
- [7] DEVILLE J.C. : Décomposition des processus aléatoires : une comparaison entre les méthodes factorielles et l'analyse spectrale. Statistique et Analyse des données, vol.6, n° 3 (1981).
- [8] DIEUDONNE J. : Eléments d'analyse, tome 1. Gauthier-Villars, Paris (1968).
- [9] GRORUD A. : Analyses factorielles de données complexes. Thèse de 3^eme cycle, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier (1978).
- [10] OKAMOTO M. et KANAZAWA M. : Minimization of eigenvalues of a matrix and optimality of principal components. Annals of Math. Statistics, p.859-863 (1968).

- [11] SABATIER R., JAN Y. et ESCOUFIER Y. : Approximations d'applications linéaires et Analyses en Composantes Principales. Data Analysis and Informatics III, E.Diday and al. ed., Elsevier Science Publishers B.V.(North Holland) (1984).
- [12] SCHWARTZ L. : Analyse hilbertienne. Hermann, Paris (1979).
- [13] TECHENE J.J. : Réductions optimales d'opérateurs. Application aux analyses factorielles. Thèse de 3ème cycle, Université de Pau et des Pays de l'Adour (1980).