REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 122 (2009)

Relèvements de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalences et de pleine fidélité II

JEAN-YVES ETESSE (*)

Sommaire.

0. Introduction.

Cet article qui fait suite à [Et 1] en étend les résultats.

Pour faciliter l'exposé, on supposera dans cette introduction que $\mathcal{V}$ est un anneau excellent de caractéristique 0, $I \subsetneq \mathcal{V}$ un idéal et A est une $\mathcal{V}$-algèbre lisse.

Au § 1 on développe un formalisme qui aboutira au § 2 :

• à préciser les liens entre le complété faible $A^{\dagger}$ de A et le séparé complété I-adique $\hat{A}$ de A ;

• et à généraliser l'équivalence de catégories de [Et 1] entre $A^{\dagger}$-schémas finis étales et $\hat{A}$-schémas finis étales.

Par exemple, en s'appuyant sur le caractère hensélien du couple $(A^{\dagger}, IA^{\dagger})$, on montre [théo (2.2)] que $A^{\dagger}$ est intégralement fermé dans $\hat{A}$, ce qui est l'analogue d'un théorème de Bosch, Dwork et Robba [Bo-Dw-Ro].

(*) Indirizzo dell'A.: (CNRS - IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex France).
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Parmi les généralisations de [Et 1] citons les suivantes :

• On étend la pleine fidélité du foncteur naturel $\{A^\dagger$-schémas étales$\} \longrightarrow \{\hat{A}$-schémas étales$\}$ du cas A normal, de dimension $\leqslant 1$ de [Et 1, théo 15] au cas d'une $\mathcal{V}$-algèbre A de type fini quelconque [théo (2.4)] grâce encore au caractère hensélien du couple $(A^\dagger, IA^\dagger)$;

• par restriction, le foncteur précédent induit une équivalence de catégories $\{A^\dagger$-schémas finis étales$\} \longrightarrow \{\hat{A}$-schémas finis étales$\}$ prouvée dans [Et 1, théo 15]. Ici nous explicitons un foncteur quasi-inverse : si C est une $\hat{A}$-algèbre finie étale il suffit, grâce au [théo (2.2)] précédent, de prendre la fermeture intégrale de $A^\dagger$ dans C [théo (2.4)] ;

• lorsque $\mathcal{V}$ est normal et que $(\mathcal{V}, I\mathcal{V})$ est un couple hensélien, on étend entre autres [cor (3.1.4)] cette dernière équivalence de catégories à une équivalence de catégories $\{A^\dagger$-schémas finis et formellement lisses sur $\mathcal{V}\} \longrightarrow \{\hat{A}$-schémas finis et formellement lisses sur $\mathcal{V}\}$.

Le § 3 rassemble des résultats de relèvements de schémas, de la caractéristique $p > 0$ à la caractéristique 0. Sur une base affine, les cas les plus importants pour les applications (cf plus bas) seront celui d'un morphisme fini [théo (3.1.3)], d'un morphisme fini étale [théo (3.1.1)] (resp. et galoisien [cor (3.1.6)]), d'un morphisme projectif lisse [théo (3.2.1)] et son corollaire [cor (3.2.6)] pour les intersections complètes.

En plus des généralisations de [Et 1] mentionnées ci-dessus, les relèvements du § 3 nous servent dans deux contextes :

• les relèvements de morphismes projectifs lisses dans le cas des intersections complètes [cor (3.2.6)] permettent d'établir la surconvergence d'images directes en cohomologie rigide [Et 3] (cf [Et 6, chap II]) ;

• les relèvements de morphismes finis permettent de relever le Frobenius pour les F-isocristaux surconvergents et de prouver la surconvergence d'images directes de ceux-ci [Et 5] (cf [Et 6, chap IV]).

1. Généralités.

1.0. Notations.

Tous les anneaux considérés dans cet article sont (sauf mention du contraire) commutatifs et unitaires.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau noethérien, $I \subsetneq \mathcal{V}$ un idéal, A une $\mathcal{V}$-algèbre telle que l'anneau A soit noethérien et $IA \neq A$. On note $\hat{A}$ le séparé complété I-adique de A, $A_n = A/I^{n+1}A$ et $A^\dagger \subset \hat{A}$ le complété faible de A au-dessus de la paire $(\mathcal{V}, I)$ [M-W, § 1] : on désignera toujours par un indice $(\ )_0$ la réduction mod I d'une $\mathcal{V}$-algèbre ou d'un $\mathcal{V}$-morphisme.

Si B est une $\mathcal{V}$-algèbre, on dit que B est faiblement complète de type fini (f.c.t.f. en abrégé) si B est la complétée faible d'une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini ; une telle algèbre B est appelée "w.c.f.g." dans la terminologie de [M-W, § 2].

Considérons la partie multiplicative $T = 1 + IA$ de A ; notons $A_T = T^{-1}A$ et $(\tilde{A}, \tilde{I})$ le hensélisé de (A, IA) au sens de Raynaud [R, déf 4 p. 24] : rappelons qu'on a supposé $IA \neq A$, si bien que $0 \notin T$; sinon les anneaux $A_T, \tilde{A}, \hat{A}$ et $A^\dagger$ seraient égaux à $\{0\}$.

On rappelle [Et 1] que si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini, alors il existe des morphismes canoniques $A_T \to \tilde{A} \to A^\dagger \to \hat{A}$ tous fidèlement plats et que tous ces anneaux ont même séparé complété I-adique égal à $\hat{A}$.

Proposition (1.1). *Soient $A, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ des anneaux noethériens munis de morphismes*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi_3} \hat{A}$$

avec φ_3 fidèlement plat. On suppose que Spec $\hat{A} \longrightarrow$ Spec A est un morphisme normal (resp. régulier) [EGA IV, (6.8.1)] : *cette dernière hypothèse est vérifiée si A est excellent. Alors :*

(1) *Le morphisme*

$$h = Spec\ (\varphi_2 \circ \varphi_1) : Spec\ \mathcal{B} \to Spec\ A$$

est normal (resp. régulier).

(2) *Si de plus φ_2 est plat, alors*

$$f = Spec\ (\varphi_2) : Spec\ \mathcal{B} \to\ Spec\ \mathcal{A}$$

est un morphisme normal.

(3) *Si φ_2 est plat et $(\mathcal{A}, I\mathcal{A})$ est un couple hensélien tel que $\hat{\mathcal{A}} \simeq \hat{A}$, alors*

$$f : Spec\ \mathcal{B} \to\ Spec\ \mathcal{A}$$

est un morphisme normal à fibres géométriquement intègres.

(4) *Si φ_2 est plat, $(\mathcal{A}, I\mathcal{A})$ est un couple hensélien tel que $\hat{\mathcal{A}} \simeq \hat{A}$ et $\mathcal{A}$ est réduit, alors $\mathcal{A}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{B}$ et dans $\hat{A}$.*

Démonstration. Le (1) résulte de [EGA IV, (6.5.4) (i) (resp. (6.5.2) (i))].

Pour le (2) notons $g = \text{Spec}\ \varphi_1 : \text{Spec}\ \mathcal{A} \to \text{Spec}\ A$. Soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec}\ \mathcal{A}$ et k' une extension finie du corps résiduel $k(\mathfrak{q})$: il s'agit de montrer que

$$f^{-1}(\mathfrak{q})_{k'} = \text{Spec}\ (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$$

est normal [EGA IV, (6.8.1)]. Comme Spec k' est normal et h un morphisme normal, on sait par [EGA IV, (6.14.1)] que Spec $(k' \otimes_A \mathcal{B})$ est normal. Considérons les applications

$$\begin{array}{lllll} k' \otimes_A \mathcal{B} & \xrightarrow{\psi} & k' \otimes_A \mathcal{B} \simeq k' \otimes_A (\mathcal{A} \ \otimes_A \mathcal{B}) & \xrightarrow{\varphi} & k' \otimes_A \mathcal{B} \\ x \otimes b & \longmapsto & x \otimes (1_{\mathcal{A}} \otimes b) & & \\ & & x \otimes (a \otimes b) & \longmapsto & x \otimes (\varphi_2(a).b)\,; \end{array}$$

clairement $\varphi \circ \psi = Id$. Pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(k' \otimes_A \mathcal{B})$, $\mathfrak{m} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ on a $\mathfrak{p} = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) = \psi^{-1}(\mathfrak{m})$ et ψ et φ induisent des morphismes

$$(k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi'} (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi'} (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}}$$

dont le composé est encore l'identité.

Par hypothèse $\mathcal{D} := (k' \otimes_A \mathcal{B})_{\mathfrak{m}}$ est intégralement clos, de corps des fractions noté L ; en particulier $\mathcal{C} := (k' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathfrak{p}}$ est intègre : notons K son corps des fractions. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}$ est intégralement clos : soit $x \in K$ un élément entier sur $\mathcal{C}$, annulé par le polynôme $R(X) = = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, X^i$, $a_i \in \mathcal{C}$. L'injection ψ' induit une injection :

$$\psi'' : K \hookrightarrow L\ ;$$

puisque $\mathcal{D}$ est intégralement clos on a $\psi''(x) \in \mathcal{D}$ et $x_1 := \varphi'(\psi''(x)) \in \mathcal{C}$ est racine de $R(X)$: en effet ψ'' induit $\tilde{\psi}'' : K[X] \to L[X]$, $R(X) \mapsto \tilde{R}(X) \in \in \mathcal{D}[X]$ et φ' induit $\tilde{\varphi}' : \mathcal{D}[X] \to \mathcal{C}[X]$, $\tilde{R}(X) \mapsto R(X)$. D'où $R(X) = = (X - x_1)R_1(X)$ avec $R_1(X) \in \mathcal{C}[X]$. Si $x = x_1$ on a terminé, sinon x est racine de $R_1(X)$ et on itère : finalement $x \in \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est intégralement clos, i.e. $f^{-1}(\mathfrak{q})_{k'}$ est normal.

Pour le (3), on sait par le (2) que le morphisme g : Spec $\hat{\mathcal{A}}$ = Spec $\hat{A} \to \to$ Spec $\mathcal{A}$ est normal, donc ses fibres sont géométriquement intègres par un théorème de Raynaud [R, théo 3, p. 126]. Or $\hat{A}$ est une $\mathcal{B}$-algèbre fidèlement plate, donc les fibres de f sont aussi géométriquement intègres.

Pour le (4), le théorème de Raynaud [loc. cit.] prouve que $\mathcal{A}$ est intégralement fermé dans $\hat{A}$: comme φ_3 est injectif, $\mathcal{A}$ est aussi intégralement fermé dans $\mathcal{B}$. □

Pour la commodité des références nous avons rassemblé ci-après quelques lemmes qui résultent des EGA.

Lemme (1.2). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux anneaux noethériens tels que $\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{A}$-algèbre. Les propriétés (i) et (ii) ci-après sont équivalentes :*

(i) *Spec* $\mathcal{B} \to$ *Spec* $\mathcal{A}$ *est un morphisme régulier.*
(ii) *Pour tout* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ *et tout* $\mathfrak{p} \in$ *Spec* $\mathcal{B}$ *au-dessus de* $\mathfrak{q}$, *le morphisme* $\mathcal{A}_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ *est formellement lisse pour les topologies préadiques respectives (i.e. définies par* $\mathfrak{q}\,\mathcal{A}_{\mathfrak{q}}$ *et* $\mathfrak{p}\,\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ *respectivement).*

DÉMONSTRATION. En utilisant la définition d'un morphisme régulier [EGA IV, (6.8.1)], l'équivalence résulte de [EGA O_{IV}, (22.5.8) et (19.7.1)]. □

LEMME (1.3). *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux anneaux noethériens tels que* $\mathcal{B}$ *soit une* $\mathcal{A}$*-algèbre. Si Spec* $\mathcal{B} \to$ *Spec* $\mathcal{A}$ *est formellement lisse pour les topologies discrètes, alors c'est un morphisme régulier.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes [EGA O_{IV}, (19.3.1)], alors pour tout $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ et tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{B}$ au-dessus de $\mathfrak{q}$, le morphisme

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$$

est formellement lisse pour les topologies discrètes [EGA O_{IV}, (19.3.5)(*iv*)], donc aussi pour les topologies préadiques sur $\mathcal{A}_{\mathfrak{q}}$ et $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ [EGA O_{IV}, (19.3.8)] ; d'où la conclusion par le lemme (1.2). □

LEMME (1.4). *Soient* $\mathcal{A}$ *un anneau,* $\mathcal{B}$ *une* $\mathcal{A}$*-algèbre et* $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ *un idéal. Si Spec* $\mathcal{B} \to$ *Spec* $\mathcal{A}$ *est formellement lisse pour les topologies discrètes, alors c'est un morphisme formellement lisse pour les topologies* $\mathcal{J}$*-adiques sur* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION. Via [EGA O_{IV}, (19.3.8)]. □

LEMME (1.5). *Soient* $\mathcal{A}$ *un anneau et* $S \subset \mathcal{A}$ *une partie multiplicative. Alors*

(i) *Le morphisme* $f : X = \mathit{Spec}\,(S^{-1}\mathcal{A}) \to \mathit{Spec}\,\mathcal{A} = Y$ *est formellement étale pour les topologies discrètes.*
(ii) *En particulier* f *est régulier si* $\mathcal{A}$ *est noethérien.*
(iii) *De plus :*
$*$ *si* $y \in Y \setminus f(X)$, *alors* $f^{-1}(y) = \phi$
$*$ *si* $y \in f(X)$, *alors* f *induit un isomophisme*

$$f^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \mathit{Spec}\ k(y).$$

Démonstration. La première assertion n'est autre que [EGA O_{IV}, (19.10.3) (ii)] ; la deuxième en résulte grâce au lemme (1.3). La dernière assertion est conséquence de [Bour, AC II, § 2, n° 5, prop 11]. □

Lemme (1.6). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux anneaux noethériens tels que $\mathcal{B}$ soit une $\mathcal{A}$-algèbre ; notons*

$$f : Spec\ \mathcal{B} \to Spec\ \mathcal{A}$$

le morphisme canonique. Alors :

(1) *On a les implications :*
  (i) *f est réduit et $\mathcal{A}$ réduit $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ réduit.*
  (ii) *f normal et $\mathcal{A}$ normal $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ normal.*
  (iii) *f régulier et $\mathcal{A}$ régulier $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ régulier.*

(2) *Si f est fidèlement plat, on a les implications :*
  (i) *$\mathcal{B}$ réduit $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ réduit.*
  (ii) *$\mathcal{B}$ normal $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ normal.*
  (iii) *$\mathcal{B}$ régulier $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ régulier.*

Démonstration. (1) (i) On utilise la définition d'un morphisme réduit [EGA IV, (6.8.1)] et la caractérisation des schémas noethériens réduits de [EGA IV, (5.8.5)] via les propriétés $\ll R_0$ et $S_1 \gg$: comme $\mathcal{A}$ vérifie $\ll R_0$ et $S_1 \gg$, il en est de même de $\mathcal{B}$ via [EGA IV, (6.5.3) (ii) et (6.4.2)], donc $\mathcal{B}$ est réduit.

Pour (ii) (resp. (iii)) on utilise [EGA IV, (6.5.4) (ii)] (resp. [EGA IV, (6.5.2) (ii)]).

(2) (i) Le fait qu'un schéma X est réduit s'exprime via les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ [EGA 0_I, (4.1.4)] : le (i) résulte de [EGA IV, (2.1.13)].

Le (ii), c'est [EGA IV, (6.5.4) (i)] et le (iii) c'est [EGA IV, (6.5.2) (i)]. □

La proposition suivante généralise des assertions de [Et 1, prop 2, prop 11].

Proposition (1.7). *Soient A une $\mathcal{V}$-algèbre (resp. une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini) telle que A soit un anneau noethérien. Notons $\mathcal{B}$ l'un des anneaux $\tilde{A}, \hat{A}$ (resp. $A^\dagger$). Alors*

(1) *A_T et $\mathcal{B}$ sont des anneaux de Zariski.*

(2) *On a les implications :*

(i) *A réduit $\Rightarrow A_T$ réduit $\Leftrightarrow \tilde{A}$ réduit.*
(ii) *A normal $\Rightarrow A_T$ normal $\Leftrightarrow \tilde{A}$ normal.*
(iii) *A régulier $\Rightarrow \hat{A}$ régulier (resp. $\Rightarrow A^\dagger$ régulier) $\Rightarrow \tilde{A}$ régulier $\Rightarrow$ $\Rightarrow A_T$ régulier.*
(iv) *A intégralement clos $\Rightarrow A_T$ intégralement clos.*

(3) *Si f_T : Spec $\hat{A} \to$ Spec A_T est le morphisme canonique et f le composé f : Spec $\hat{A} \underset{f_T}{\longrightarrow}$ Spec $A_T \longrightarrow$ Spec A, on a l'implication : f réduit (resp. normal ; resp. régulier) $\Rightarrow f_T$ réduit (resp. normal ; resp. régulier).*

(4) (i) *Si f est réduit on a les implications :*
A réduit $\Rightarrow A_T$ réduit $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ réduit.
(ii) *Si f est normal on a les implications :*
A normal $\Rightarrow A_T$ normal $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ normal.
(iii) *Si f est régulier on a les implications :*
A régulier $\Rightarrow A_T$ régulier $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ régulier.
(iv) *Si f est normal on a les implications :*
A intégralement clos $\Rightarrow A_T$ intégralement clos $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ intégralement clos.

DÉMONSTRATION.

(1) A_T est noethérien [Bour, AC II, § 2, n° 4, cor 2 de prop 10], de même que $\tilde{A}$ [R, p. 125] et $\hat{A}$ [Bour, AC III, § 3, n° 4, prop 8]. De plus si A est de type fini sur $\mathcal{V}$, alors $A^\dagger$ est noethérien [M-W, theo 2.1]. De plus par [Et 1, § 1] on a les inclusions $IA_T \subset \operatorname{Rad} A_T$, $I\tilde{A} \subset \operatorname{Rad} \tilde{A}$, $IA^\dagger \subset \operatorname{Rad} A^\dagger$, $I\hat{A} \subset \operatorname{Rad} \hat{A}$; donc les anneaux A_T, $\tilde{A}$, $A^\dagger$ et $\hat{A}$ sont de Zariski.

(2) Grâce aux lemmes (1.5) et (1.3), l'implication

$$A \text{ réduit (resp. normal ; resp. régulier)} \Rightarrow A_T \text{ de même,}$$

résulte du [lemme (1.6), (1)] et l'équivalence

$$A_T \text{ réduit (resp. normal)} \Leftrightarrow \tilde{A} \text{ de même,}$$

c'est [R, p. 125].

Si A est régulier, alors $\hat{A}$ l'est [EGA 0_{IV}, (17.3.8.1)] : par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$, $\tilde{A}$ et A_T, ces derniers sont aussi réguliers [EGA IV, (6.5.2)(i)].

Si A est intégralement clos, rappelons que $0 \notin T$, donc A_T est intègre de même corps des fractions que A, par suite A_T est intégralement clos [Bour, AC V, § 1, n° 5, prop 16].

(3) Résulte du [lemme (1.5) (iii)] et de [EGA IV, (6.8.1)].

(4) D'après le (2) et le (3) on est ramené à prouver le (4) en remplaçant A par A_T et f par le morphisme fidèlement plat f_T.

Les assertions (i) à (iii) sont fournies par le lemme (1.6).

Pour le (iv) supposons d'abord $\mathcal{B}$ intégralement clos : par fidèle platitude de $\mathcal{B}$ sur A_T on en déduit que Spec A_T est connexe, normal [EGA IV, (2.1.13)] et noethérien, donc A_T est intègre [EGA I, (4.5.6)] et intégralement clos par [Bour, AC II, § 3, n° 3, cor 4 du théo 1 et AC V, § 1, n° 2, cor de prop 8].

Réciproquement supposons $\mathcal{A} := A_T$ intégralement clos : par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $\mathcal{B}$ il nous suffit de montrer que $\hat{A} = \hat{\mathcal{A}}$ est intégralement clos. Puisque $\mathcal{A}$ est intègre, l'idéal $I\mathcal{A}$ est sans torsion, par suite $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ et $I\mathcal{A} = \bigcap_{\mathfrak{p}} I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble M des idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ [Bour, AC II, § 3, n° 3, cor 4 du théo 1] ; comme $\mathcal{A}/I\mathcal{A} \simeq A/IA \neq \{0\}$ par hypothèse, il existe donc $\mathfrak{p} \in M$ tel que $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \subsetneqq \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$. Soit $\mathfrak{p} \in M$ tel que $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \subsetneqq \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$: l'idéal $I\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ est contenu dans le seul idéal maximal $\mathfrak{p}\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$. Or l'inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ donne l'inclusion $\varphi : \hat{\mathcal{A}} \hookrightarrow \widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})} := \varprojlim_n \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}/I^n\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$, où $\widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}\widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})}$ [Bour, AC III, § 3, n° 4, prop 8 (ii)] : le schéma *Spec* $\widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})}$ est connexe et son image par le morphisme dominant

$$Spec\ \varphi : Spec\ \widehat{(\mathcal{A}_{\mathfrak{p}})} \to Spec\ \hat{\mathcal{A}}$$

est un connexe dense, donc *Spec* $\hat{\mathcal{A}}$ est connexe ; comme $\hat{\mathcal{A}}$ est noethérien (cf (1)) et normal (cf (4) (ii)), il en résulte que $\hat{\mathcal{A}}$ est intègre [EGA I, (4.5.6)] et intégralement clos. □

2. Des équivalences de catégories.

THÉORÈME (2.1). *Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre telle que l'anneau A soit noethérien. On suppose que le morphisme canonique Spec $\hat{A} \to$ Spec A est normal (vrai par exemple si A est excellent). Alors*

(1) *Le morphisme canonique*

$$f : Spec\ \hat{A} \to Spec\ \tilde{A}$$

est normal, fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres.

(2) (i) *Si $\tilde{A}$ est réduit alors $\tilde{A}$ est intégralement fermé dans $\hat{A}$.*

(ii) *Le* (i) *est vérifié si A est réduit.*

(iii) *On a les équivalences :*
$\tilde{A}$ *intègre (resp. intégralement clos)*
$\Leftrightarrow \hat{A}$ *intègre (resp. intégralement clos).*

DÉMONSTRATION. Pour le (1), $\hat{A}$ est le séparé complété I-adique de $\tilde{A}$, et $\tilde{A}$ est de Zariski [prop (1.7) (1)], donc f est fidèlement plat [Bour, AC III, § 3, n° 5, prop 9]. L'hypothèse entraîne alors que f est normal à fibres géométriquement intègres via [prop (1.1) (3)], car $(\tilde{A}, \tilde{I})$ est un couple hensélien [R, théo 3, p. 126].

Le (2) (i) résulte de [prop (1.1) (4)], car $(\tilde{A}, \tilde{I})$ est un couple hensélien, et le (2) (ii) provient de [prop (1.7) (2) (i)].

Dans le (2) (iii) l'assertion dans le cas "intégralement clos" est prouvée dans [prop (1.7), (4) (iv)]. Pour le cas "intègre", comme $\tilde{A} \hookrightarrow \hat{A}$ est fidèlement plat, il suffit de prouver que si $\tilde{A}$ est intègre, alors $\hat{A}$ l'est : supposons $\tilde{A}$ intègre, alors $\hat{A}$ est réduit [prop (1.7) (4) (i)] ; or les fibres de f sont géométriquement intègres, ainsi Spec $\hat{A}$ est irréductible [EGA IV, (2.3.5) (iii)] et réduit, donc $\hat{A}$ est intègre. □

THÉORÈME (2.2). *Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini ; on suppose que le morphisme canonique Spec $\hat{A} \to$ Spec A est normal (vrai par exemple si $\mathcal{V}$ est excellent). Alors :*

(1) *Les morphismes canoniques*

$$g : Spec\ \hat{A} \longrightarrow Spec\ A^{\dagger}\ ,\ \ h : Spec\ A^{\dagger} \longrightarrow Spec\ \tilde{A}$$

sont normaux, fidèlement plats, à fibres géométriquement intègres.

(2) (i) *Si $\tilde{A}$ est réduit, $\tilde{A}$ est intégralement fermé dans $A^{\dagger}$ et dans $\hat{A}$.*
(ii) *Si $A^{\dagger}$ est réduit, $A^{\dagger}$ (resp. $A^{\dagger}_K$) est intégralement fermé dans $\hat{A}$ (resp. dans $\widehat{A}_K$).*
(iii) *Les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites si A est réduit.*
(iv) *On a les équivalences :*
$\tilde{A}$ *intègre (resp. intégralement clos)*
$\Updownarrow$
$A^{\dagger}$ *intègre (resp. intégralement clos)*
$\Updownarrow$
$\hat{A}$ *intègre (resp. intégralement clos).*

DÉMONSTRATION.

(1) La preuve pour g est identique à celle du théorème précédent en remarquant que $(A^{\dagger}, IA^{\dagger})$ est un couple hensélien [Et 1, théo 3].

Le cas de h a été traité dans [prop (1.1) (3)].

(2) Le (i) et le (ii) ont été vus dans le (4) de [prop (1.1)].
Le (iii) provient du (4) (i) de [prop (1.7)].
Dans le (iv) l'assertion dans le cas “intégralement clos” est prouvée dans [prop (1.7) (4) (iv)]. Pour le cas “intègre” les inclusions $\tilde{A} \subset A^\dagger \subset \hat{A}$ ramènent la preuve au (2) (iii) du théorème (2.1). $\square$

REMARQUE (2.2.1). Lorsque $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet et A une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini, A est excellent [EGA IV, (7.8.3)]. Si $A^\dagger$ est réduit, le (2) (ii) du théorème (2.2) prouve que $A^\dagger$ est intégralement fermé dans $\hat{A}$: on retrouve ainsi l'analogue du théorème 2 de Bosch, Dwork, Robba de [Bo-Dw-R] lorsque la valuation de K de [loc. cit.] est discrète ; cf. aussi [Bo].

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les théorèmes (2.3) et (2.4) qui suivent, et qui améliorent le théorème 15 de [Et 1].

THÉORÈME (2.3). *Soit A une $\mathcal{A}$-algèbre telle que l'anneau A soit noethérien. On suppose que le morphisme canonique Spec $\hat{A} \to$ Spec A est normal (vrai si A est excellent). Alors*

(1) *Le foncteur $\mathcal{E}$ de la catégorie des $\tilde{A}$-schémas étales dans la catégorie des $\hat{A}$-schémas étales défini par*

$$f : Spec\ \hat{A} \to Spec\ \tilde{A}$$

est pleinement fidèle.

(2) (i) *Le foncteur $\mathcal{F} : B \mapsto B \otimes_{\tilde{A}} \hat{A}$ de la catégorie des $\tilde{A}$-algèbres finies étales dans la catégorie des $\hat{A}$-algèbres finies étales défini par f est une équivalence de catégories.*

(ii) *Si $\tilde{A}$ est réduit (c'est le cas par exemple si A est réduit), le foncteur $\mathcal{G}$ qui à une $\hat{A}$-algèbre finie étale C associe la fermeture intégrale de $\tilde{A}$ dans C est un foncteur quasi-inverse de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Le (1) et le (2) (i) se démontrent comme le (1) du théorème 15 de [Et 1].

Pour (2) (ii) il suffit, grâce au fait que $\mathcal{F}$ est une équivalence de catégories, de prouver que si B est une $\tilde{A}$-algèbre finie étale, alors B est la fermeture intégrale de $\tilde{A}$ dans $B \otimes_{\tilde{A}} \hat{A} \simeq \hat{B}$.

Supposons $\tilde{A}$ réduit et soit B une $\tilde{A}$-algèbre finie étale : alors (B, IB) est un couple hensélien [R, prop 2 (1) p. 124], B est réduit par le (1) (i) du [lemme (1.6)] et Spec $\hat{B} \to$ Spec B est un morphisme normal [EGA IV, (6.8.3) (iii)] ; par le (4) de la [prop (1.1)] on en déduit que B est intégralement fermé dans $\hat{B}$. Comme B est fini sur $\tilde{A}$, B est bien la fermeture intégrale de $\tilde{A}$ dans $\hat{B}$. □

THÉORÈME (2.4). *Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini ; on suppose que le morphisme canonique Spec $\hat{A} \to$ Spec A est normal (vrai par exemple si $\mathcal{V}$ est excellent) et on désigne par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'un des couples $(\tilde{A}, A^\dagger)$, $(A^\dagger, \hat{A})$. Alors*

(1) *Le foncteur $\mathcal{E}$ de la catégorie des $\mathcal{A}$-schémas étales dans la catégorie des $\mathcal{B}$-schémas étales défini par*

$$f : Spec\ \mathcal{B} \to Spec\ \mathcal{A}$$

est pleinement fidèle.

(2) (i) *Le foncteur : $\mathcal{F} : B \mapsto B \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ de la catégorie des $\mathcal{A}$-algèbres finies étales dans la catégorie des $\mathcal{B}$-algèbres finies étales défini par f est une équivalence de catégories.*

(ii) *Si $\mathcal{A}$ est réduit (c'est le cas par exemple si A est réduit), le foncteur $\mathcal{G}$ qui à une $\mathcal{B}$-algèbre finie étale C associe la fermeture intégrale de $\mathcal{A}$ dans C est un foncteur quasi-inverse de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION.

(1) Ici f est fidèlement plat et quasi-compact, donc universellement submersif [EGA I, (3.9.4) (ii) et (7.3.5)] ; de plus les fibres de f sont géométriquement intègres [théo (2.2)]. En vertu de [SGA 1, IX, cor 3.4] le foncteur $\mathcal{E}$ défini par f est pleinement fidèle.

(2) Le (i) se montre comme [Et 1, théo 15, 2 (i) et (ii)]. La preuve du (ii) est la même que celle du (2) (ii) du [théorème (2.3)] si l'on rappelle que toute $A^\dagger$-algèbre finie B est "f.c.t.f" [Et 1, prop 1] et que (B, IB) est un couple hensélien [loc. cit, théo 3]. □

REMARQUE (2.4.1). La partie (1) des théorèmes (2.3) et (2.4) précédents est une généralisation de [EGA IV, (18.9.5)].

3. Schémas formels et relèvements de schémas.

3.1 – *Cas des morphismes finis.*

THÉORÈME (3.1.1). *Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre normale de caractéristique zéro telle que A soit un anneau noethérien ; on suppose A excellent et $0 \notin T := 1 + IA$. On note $A_0 = A/IA$. Alors*

(1) *Si $\varphi : S' \to Spec\ A_0 =: S$ est un morphisme fini étale, il existe un morphisme fini*

$$\psi : Spec\ B \to Spec\ A$$

relevant φ, où B est normal (resp. B est intégralement clos si A l'est) et tel que

$$\psi_T : Spec\ B_T \to Spec\ A_T$$

soit un relèvement fini étale de φ.

(2) *De plus il existe $g_0 \in A_0$ et $g \in A$ relevant g_0 tels que*

$$\psi_g : Spec\ B_g \to Spec\ A_g$$

soit un relèvement fini étale de

$$\varphi_{g_0} : S'_{g_0} \to Spec\ (A_{0_{g_0}}).$$

(3) *Supposons de plus $\mathcal{V}$ excellent, A de type fini sur $\mathcal{V}$ et fixons une présentation*

$$A = \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]/(f_1, \ldots, f_r).$$

Notons P la fermeture projective de Spec A dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, P' le normalisé de P et P'' la fermeture intégrale de P dans l'anneau $\mathcal{R}$ (Spec B) des fonctions rationnelles sur Spec B. Les morphismes structuraux $P'' \to P'$ et $P' \to P$ sont finis, leur composé $\theta : P'' \to P$ aussi, et on a des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} Spec\ B & \hookrightarrow & P'' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \theta \\ Spec\ A & \hookrightarrow & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Spec\ B & \hookrightarrow & P'' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \theta' \\ Spec\ A & \hookrightarrow & P' \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes fournissant par passage aux séparés complétés des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}' := Spf\hat{B} & \overset{j'}{\hookrightarrow} & \hat{P}'' =: \overline{\mathcal{S}'} \\ \hat{\psi} \downarrow & & \downarrow \hat{\theta} \\ \mathcal{S} := Spf\hat{A} & \underset{\tilde{j}}{\hookrightarrow} & \hat{P} =: \tilde{\mathcal{S}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Spf\ \hat{B} & \hookrightarrow & \hat{P}'' = \overline{\mathcal{S}'} \\ \hat{\psi} \downarrow & & \downarrow \hat{\theta}' \\ Spf\ \hat{A} & \underset{j}{\hookrightarrow} & \hat{P}' = \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

où $\hat{\psi}$ est un relèvement fini étale de φ,$\hat{\theta}$ et $\widehat{\theta'}$ sont finis, $\widehat{P'}$ est normal et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

De plus $\mathcal{O}_{\widehat{P''}}$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{\widehat{P}}$ (resp. de $\mathcal{O}_{\widehat{P'}}$) dans $\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}$ [EGA II, (6.3.2)*].*

Enfin, $\hat{\theta}$ *(resp.*$\widehat{\theta'}$*) est plat si et seulement si sa réduction modulo I est plate.*

Donnons tout de suite un corollaire et sa démonstration avant de prouver le théorème.

Corollaire (3.1.2). *Soit* $\mathcal{V}$ *un anneau de valuation discrète complet de caractéristique zéro, d'idéal maximal* I *et de corps résiduel* k*. Si* A_0 *est une* k*-algèbre lisse et* $\varphi : Spec\ B_0 \to Spec\ A_0$ *est un morphisme fini étale, alors il existe une* $\mathcal{V}$*-algèbre lisse* A *et un morphisme fini* $\psi : Spec\ B \to Spec\ A$ *relevant* φ *et satisfaisant aux propriétés du théorème* (3.1.1).

Démonstration du corollaire (3.1.2). L'existence d'une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A relevant A_0 résulte du théorème 6 de Elkik [Eℓ]. Le $\mathcal{V}$ du corollaire est régulier [EGA O_{IV}, (17.1.4) (ii)] et excellent [EGA IV, (7.8.3)] : comme A est lisse sur $\mathcal{V}$, A est régulier [EGA IV, (17.5.8)] et excellent [EGA IV, (7.8.3)]. Il suffit alors d'appliquer le théorème (3.1.1). □

Démonstration du théorème (3.1.1).

(1) et (2). D'après [EGA IV, (18.3.2)] il existe une $\hat{A}$-algèbre finie étale C telle que $Spec\ C \to Spec\ \hat{A}$ relève φ. Puisque A est noethérien normal on peut décomposer $Spec\, A$ en somme de ses composantes connexes $\coprod_i Spec\ A_i$, avec A_i intégralement clos, et $\coprod_i Spec\ \hat{A}_i$ est une décomposition de $Spec\ \hat{A}$ en somme de ses composantes connexes, avec $\hat{A}_i$ intégralement clos [prop (1.7) (4) (iv)] : C est aussi normal noethérien et on le décompose de même. Comme $Spec\ C \to Spec\ \hat{A}$ est fini et plat, on est ramené au cas où ce morphisme est surjectif avec C et $\hat{A}$ intégralement clos.

Soient L le corps des fractions de $\hat{A}$ et L_1 celui de C : d'après [EGA II, (6.1.8)] $L \hookrightarrow L_1$ est une extension finie de corps de caractéristique nulle (donc l'extension est séparable) et C est la fermeture intégrale de $\hat{A}$ dans L_1. Par le théorème de l'élément primitif il existe $x \in L_1$ tel que $L_1 = L[x]$: x est séparable sur L [Bour, A V, prop 6 p. 38], son polynôme minimal $f(X) \in L[X]$ est séparable [Bour, A V, prop 5 p. 38], donc $f \wedge f' = 1$ dans $L[X]$ [Bour, A V, prop 3 p. 36] ; appliquant Bézout dans $L[X]$, il existe $g_1 \in \hat{A}$ tel que $f,\ f' \in (\hat{A})_{g_1}[X]$ et tel qu'il existe $u, v \in (\hat{A})_{g_1}[X]$ vérifiant l'identité $uf + vf' = 1$ dans $(\hat{A})_{g_1}[X]$. Ainsi le morphisme canonique

$$\mu : (\hat{A})_{g_1} \longrightarrow (\hat{A})_{g_1}[X] \,/\, (f)$$

est fini étale [Mi, I, 3.4] et s'insère dans le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
(\hat{A})_{g_1} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & (\hat{A})_{g_1}[X]/(f) =: D \arrow[d] \\
Frac(\hat{A})_{g_1} = L \arrow[r, hook] & L_1 = L[X]/(f) = L \otimes_{(\hat{A})_{g_1}} D \ ;
\end{tikzcd}$$

par suite μ est fidèlement plat puisqu'il est injectif. La platitude de μ fournit l'injectivité de $D \hookrightarrow L_1$, donc D est intègre (de corps des fractions L_1) et normal [EGA IV, (17.5.7)], donc intégralement clos ; donc D est la fermeture intégrale de $(\hat{A})_{g_1}$ dans L_1. Par changement de base, μ fournit le morphisme fini étale fidèlement plat

$$\rho : \widehat{(\hat{A})_{g_1}} \hookrightarrow \widehat{(\hat{A})_{g_1}}[X] \,/\, (\hat{f}),$$

où $\hat{f}$ est l'image de f dans $\widehat{(\hat{A})_{g_1}}[X]$.

Soit $g_2 \in A$ un relèvement de (g_1 mod I) $\in A_0$: comme $\widehat{(\hat{A})_{g_1}}$ est une A-algèbre formellement étale par les topologies I-adiques il existe un unique A- morphisme (en fait un $\hat{A}$-morphisme)

$$\nu : \widehat{(\hat{A})_{g_1}} \longrightarrow (\widehat{A_{g_2}})$$

relevant l'identité de $A_{g_2} \,/\, IA_{g_2}$ et ν est un isomorphisme [EGA O_I, (6.6.21)]. Notons $f_1(X) \in A_{g_2}[X]$ un polynôme unitaire relevant

$$f(X) \bmod I \in (\hat{A})_{g_1}\ [X] \,/\, I(\hat{A})_{g_1}[X] \simeq A_{g_2}[X] \,/\, IA_{g_2}[X] \ ;$$

alors, si $\hat{f}_1$ désigne l'image de f_1 dans $(\widehat{A_{g_2}})[X]$, $(\widehat{A_{g_2}})[X] \,/\, (\hat{f}_1)$ est fini et plat sur $(\widehat{A_{g_2}})$ car $\hat{f}_1$ est unitaire [Mi, I, 2.6 (a)]. Comme ρ est fini étale, que D et $\widehat{A_{g_2}}[X] \,/\, (\hat{f}_1)$ ont même réduction mod I et que $\widehat{(\hat{A})_{g_1}}$ s'identifie à $\widehat{A_{g_2}}$ via ν, il existe un unique $\widehat{A_{g_2}}$-morphisme

$$\widehat{A_{g_2}}[X] \,/\, (\nu(\hat{f})) \to \widehat{A_{g_2}}[X] \,/\, (\hat{f}_1)$$

qui est un isomorphisme [EGA O_I, (6.6.21)] relevant l'identité de D/ID. Puisqu'on a des injections

$$(\hat{A})_{g_1} \hookrightarrow (\hat{A})_{g_1,T} \hookrightarrow (\widehat{(\hat{A})_{g_1,T}}) = (\widehat{(\hat{A})_{g_1}}),$$

$$A_{g_2} \hookrightarrow A_{g_2 T} \hookrightarrow (\widehat{A_{g_2,T}}) = \widehat{A_{g_2}}$$

et que f et f_1 sont unitaires on en déduit que

$$\nu(\hat{f}) = \hat{f}_1,$$

i.e. que dans l'écriture $L_1 = L[X]/(f)$ on peut supposer $f = f_1 \in A_{g_2}[X]$: ainsi il existe $g_3 \in A$ tel que $f, f' \in A_{g_3}[X]$ et tel qu'il existe $u, v \in A_{g_3}[X]$ vérifiant l'identité $uf + vf' = 1$ dans $A_{g_3}[X]$. En particulier le morphisme canonique

$$\eta : A_{g_3} \to A_{g_3}[X]/(f)$$

est fini étale et s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_{g_3}[X]/(f) \arrow[r, "\tau"] & (\hat{A})_{g_3}[X]/(f) \arrow[r] & L_1 \\ A_{g_3} \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, hook] & (\hat{A})_{g_3} \arrow[u] \arrow[r, hook] & L \arrow[u] \end{tikzcd} \quad ;$$

par suite η est injectif, donc fidèlement plat. Par le même raisonnement que ci-dessus pour $D = (\hat{A})_{g_1}[X]/(f)$ on montre que $(\hat{A})_{g_3}[X]/(f)$ est intègre et intégralement clos de corps des fractions L_1. La platitude de η fournit l'injectivité de τ : donc $A_{g_3}[X]/(f)$ est intègre de corps des fractions noté K_1 ; on notera K le corps des fractions de A. On sait par [EGA IV, (18.10.12)] que K_1 est une extension finie étale de K et que $A_{g_3}[X]/(f)$ est la fermeture intégrale de A_{g_3} dans K_1 : comme f est irréductible dans $L[X]$, il l'est aussi dans $K[X] \subset L[X]$, d'où $K_1 = K[X]/(f)$.

Comme A est excellent, il est universellement japonais [EGA IV, (7.8.3) (vi)] : la fermeture intégrale B de A dans $K_1 = K[X]/(f)$ est une A-algèbre finie, $Spec\ B \to Spec\ A$ est surjectif et $B_{g_3} = A_{g_3}[X]/(f)$; B est aussi la fermeture intégrale de A dans $A_{g_3}[X]/(f)$, B_T est la fermeture intégrale de A_T dans $A_{g_{3,T}}[X]/(f)$, et le corps des fractions de B est K_1 (donc B est intégralement clos). Comme $Spec\ \hat{A} \to Spec\ A$ est un morphisme régulier [EGA IV, (7.8.3) (v)], donc normal, la fermeture intégrale de $\hat{A}$ dans $(\hat{A})_{g_3}[X]/(f)$ est égale à $\hat{B} = B \otimes_A \hat{A}$ [EGA IV, (6.14.4)] : or $(\hat{A})_{g_3}[X]/(f)$ est intégralement clos ; donc $\hat{B}$ est la fermeture intégrale de $\hat{A}$ dans L_1, d'où $\hat{B} = C$. On en déduit que B et C ont même réduction mod I, d'où l'existence du morphisme fini

$$\psi : Spec\ B \to Spec\ A$$

relevant φ et il suffit de prendre $g = g_3, g_0 = g \bmod I$.

De plus $Spec\ \hat{A} = Spec\ \widehat{A_T} \to Spec\ A_T$ est un morphisme normal puisque A_T est excellent : par suite la fermeture intégrale de $\hat{A} = \widehat{A_T}$ dans $(\hat{A})_{g_3}[X]/(f)$, qu'on sait être égale à $C = \hat{B}$, est aussi égale à $B_T \otimes_{A_T} \hat{A} = \widehat{B_T} = \hat{B}$ [EGA IV, (6.14.4)]. Par passage aux séparés complétés ψ induit

$$\hat{\psi} = Spec\ \hat{B} \to\ Spec\ \hat{A}$$

qui s'identifie à notre morphisme fini étale

$$Spec\ C \to Spec\ \hat{A}\,;$$

par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur A_T le morphisme

$$\psi_T = Spec\ B_T \to Spec\ A_T$$

est donc fini étale et c'est clairement un relèvement de $\varphi : S' \to Spec\ A_0$.

(3) On se ramène à A et B intégralement clos comme en (1) dont on reprend les notations. Le schéma P est intègre, car on a supposé A intègre [EGA I, (6.10.5)], d'où $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}\ (Spec\ A) = \mathrm{Frac}\ A = K$ est un corps [EGA I, (8.1.5)]. Le schéma P est excellent, donc pour chaque ouvert $U = Spec\ R \subset P$, R est japonais [EGA IV, (7.8.3)] : ainsi la fermeture intégrale P' (resp. P'') de P dans $\mathcal{R}\ (Spec\ A) = K$ (resp. dans $\mathcal{R}\ (Spec\ B) = K_1 = K[X]\,/\,(f)$) est un P-schéma fini et on a $\mathcal{R}(P') = K$ (resp. $\mathcal{R}(P'') = K_1$) [EGA II, (6.3.7)] : évidemment P'' est aussi la fermeture intégrale de P' dans K_1 et $P'' \to P'$ est fini. De plus P' est intégralement clos car noethérien normal et intègre [EGA II, (6.3.8)] ; comme A est intégralement clos, P' est aussi la fermeture intégrale de P dans $Spec\ A$: on a donc une immersion ouverte

$$Spec\ A \hookrightarrow P'$$

[R, cor 2, p. 42]. Par [EGA II, Rq entre (6.3.4) et (6.3.5)] ou [EGA IV, (6.14.4)] les carrés

$$\begin{tikzcd} Spec\ B \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi"'] & P'' \arrow[d, "\theta"] \\ Spec\ A \arrow[r, hook] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Spec\ B \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi"'] & P'' \arrow[d, "\theta'"] \\ Spec\ A \arrow[r, hook] & P' \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

On conclut la démonstration du théorème (3.1.1) par passage aux séparés complétés : que $\mathcal{O}_{\widehat{P''}}$ soit la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_{\hat{P}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\widehat{P'}}$) dans $\mathcal{O}_{S'}$ résulte de [EGA IV, (6.14.4)] compte tenu du fait que $\hat{P} \to P$ est un morphisme normal, car P est excellent. De même $\widehat{P'} \to P'$ est normal : ainsi $\widehat{P'}$ est normal car P' l'est [prop (1.7)].

Il nous reste à montrer que si $\hat{\theta}$ mod I (resp. $\widehat{\theta'}$ mod I) est plat, alors $\hat{\theta}$ (resp. $\widehat{\theta'}$) est plat : faisons la démonstration pour $\hat{\theta}$. Comme ci-dessus on peut supposer P intègre et se limiter à un ouvert affine $V = Spec\ R$ de P : alors l'ensemble U des points de V tels que la restriction de θ à $\theta^{-1}(U)$ soit plate est un ouvert non vide de V [EGA IV, (11.1.1), (2.4.6), (6.9.1)] et U

contient la réduction V_0 de V modulo I par hypothèse. En posant : $\tilde{U} := U \times_V Spec\ \hat{R}$ et $\tilde{P''} := \tilde{U} \times_P P''$, soit $\tilde{\theta} : \tilde{P''} \to \tilde{U}$ l'image inverse de θ par le changement de base $\tilde{U} \to P$: $\tilde{\theta}$ est plat. Or $\tilde{U}$ est un ouvert de $Spec\ \hat{R}$ qui contient V_0, donc $\tilde{U} = Spec\ \hat{R}$ via [EGA IV, (18.5.4.3)] car $(Spec\ \hat{R}, V_0)$ est un couple hensélien [Et 1, théo 3]. Par passage aux complétés formels, $\hat{\theta} : \widehat{P''} \to \hat{P}$ est plat. □

Dans le théorème qui suit on particularise les hypothèses faites sur l'anneau $\mathcal{V}$ dans le théorème (3.1.1) ce qui permet d'étendre celui-ci du cas "fini étale" au cas "fini":

THÉORÈME (3.1.3). *Soient $\mathcal{V}$ un anneau excellent normal de caractéristique zéro, $I \subset \mathcal{V}$ un idéal et $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}/I$ tel que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$ soit un couple hensélien au sens de* [EGA IV, (18.5.5)] . *Soient A_0 et C_0 deux $\mathcal{V}_0$-algèbres lisses et*

$$\varphi_0 : A_0 \to C_0$$

un $\mathcal{V}_0$-morphisme fini (resp. fini et plat ; resp. fini et fidèlement plat ; resp. fini étale) ; fixons deux $\mathcal{V}$-algèbres lisses A et C relevant respectivement A_0 et C_0 et notons $\hat{A}$, $\hat{C}$ leurs séparés complétés I-adiques.

Alors

(1) *Il existe un $\mathcal{V}$-morphisme*

$$\varphi : \hat{A} \to \hat{C}$$

fini (resp. fini et plat ; resp. fini et fidèlement plat ; resp. fini étale) relevant φ_0.

(2) (i) *Il existe une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini B normale (resp. intégralement close si A l'est) relevant C_0, un $\mathcal{V}$-morphisme fini*

$$\psi : A \to B$$

relevant φ_0 et un $\mathcal{V}$-isomorphisme $\hat{C} \simeq \hat{B}$ s'insérant dans un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[r, "\hat{\psi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \hat{B} \arrow[d, "\simeq"] \\ & \hat{C} \end{tikzcd} \quad .$$

(ii) *De plus les $\mathcal{V}$-morphismes*

$$\psi_T : A_T \to B_T \text{ et } \psi^\dagger = \psi \otimes_A A^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger \simeq B \otimes_A A^\dagger$$

sont finis (resp. finis et plats ; resp. finis et fidèlement plats ; resp. finis étales) et relèvent φ_0 ; les morphismes $\widehat{\psi}_T$ et $\widehat{\psi}^\dagger$ s'identifient à $\hat{\psi}$.

(3) *Fixons de plus une présentation de la $\mathcal{V}$-algèbre A*

$$A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$$

et reprenons les notations du (3) *du théorème* (3.1.1). *On a les mêmes carrés cartésiens, mais où cette fois $\hat{\psi}$ est un relèvement fini (resp. fini et plat ; resp. fini et fidèlement plat ; resp. fini étale) de φ_0 et où $\theta, \theta', \hat{\theta}, \widehat{\theta'}$ sont finis. De plus $\hat{\theta}$ (resp. $\widehat{\theta'}$) est plat si et seulement si sa réduction modulo I est plate.*

DÉMONSTRATION DE 3.1.3.

(1) L'existence de A et C résulte du théorème 6 de Elkik [Eℓ] et celle de φ se déduit de la lissité formelle de $\hat{A}$ sur $\mathcal{V}$: donc φ est un morphisme fini [Bour, AC III, § 2, n° 11, prop 14].
On conclut comme dans le théorème 17 de [Et 1].

(2) et (3) Décomposant les schémas normaux *Spec A*, *Spec C* en somme de leurs composantes connexes, on peut supposer A et C intégralement clos : alors $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont aussi intégralement clos [prop (1.7) (4) (iv)], car A et C sont excellents. Le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] prouve alors la surjectivité du morphisme fini $Spec(\varphi) : Spec\ \hat{C} \to Spec\ \hat{A}$.

Soient L le corps des fractions de $\hat{A}$ et L_1 celui de $\hat{C}$: la suite de la démonstration est alors identique à celle du théorème (3.1.1). □

COROLLAIRE (3.1.4). *Avec $\mathcal{V}$ comme dans le théorème* (3.1.3) *fixons une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A. Notons $\mathcal{C}_f^\dagger$ (resp. $\mathcal{C}_{fp}^\dagger$; resp.$\mathcal{C}_{ffp}^\dagger$ resp. $\mathcal{C}_{fét}^\dagger$) la catégorie des $A^\dagger$-algèbres finies B (resp. finies et plates ; resp. finies et fidèlement plates ; resp. finies étales) telles que B soit formellement lisse sur $\mathcal{V}$ pour la topologie I-adique : on notera $\hat{\mathcal{C}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}$ resp. $\mathring{\mathcal{C}}$) les catégories analogues obtenues en remplaçant $A^\dagger$ par $\hat{A}$ (resp. par $\tilde{A}$; resp. par A_0) ; ici on a omis les indices "f", "fp" .... Alors*

(1) *Le foncteur*

$$\mathcal{F} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ (resp.\ \mathcal{F} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} \otimes_{\tilde{A}} A^\dagger)$$

est une équivalence de catégories de la catégorie $\mathcal{C}_f^\dagger$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}_f$) dans la catégorie $\hat{\mathcal{C}}_f$ (resp. $\mathcal{C}_f^\dagger$) : on a les mêmes résultats avec les indices fp, ffp et fét.

(2) *Un foncteur quasi-inverse de $\mathcal{F}$ est fourni par le foncteur $\mathcal{G}$ qui à une $\hat{A}$-algèbre (resp. $A^\dagger$-algèbre) finie $\mathcal{D}$ associe la fermeture intégrale de $A^\dagger$ (resp. $\tilde{A}$) dans $\mathcal{D}$.*

(3) (i) *Le foncteur*

$$\tilde{\mathcal{H}}\ (\textit{resp. } \mathcal{H}^\dagger;\ \textit{resp. } \mathcal{H}^\wedge) : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}\,/\,I\mathcal{B}$$

est un foncteur plein et essentiellement surjectif de la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}_f$ (resp. $\mathcal{C}_f^\dagger$ resp. $\hat{\mathcal{C}}_f$) dans la catégorie $\mathring{\mathcal{C}}_f$: on a les mêmes résultats avec les indices fp et ffp.

(ii) *Le foncteur*

$$\mathcal{H}_{\acute{e}t} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}\,/\,I\mathcal{B}$$

est une équivalence de catégories de la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$ (resp. $\mathcal{C}_{f\acute{e}t}^\dagger$; resp. $\hat{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$) dans la catégorie $\mathring{\mathcal{C}}_{f\acute{e}t}$.

Démonstration. Le (3) (ii) est ici pour mémoire car montré dans [théo 2.4].

(1) et (2). On fait la démonstration pour l'indice "f", et $\mathcal{F} : \mathcal{C}_f^\dagger \to \hat{\mathcal{C}}_f$, les autres étant analogues.

Le foncteur $\mathcal{F}$ est fidèle d'après [EGA IV (2.2.16)].

Prouvons que $\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif. Soit : $\varphi : \hat{A} \to C$ un objet de $\hat{\mathcal{C}}_f$; la réduction mod I, C_0, de C est une $\mathcal{V}_0$-algèbre lisse que l'on relève par le théorème de Elkik en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse D : par lissité formelle de C sur $\mathcal{V}$ il existe un $\mathcal{V}$-morphisme $\hat{\theta}_1 : C \to \hat{D}$ et c'est un isomorphisme ; comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\hat{\theta}_1"'] \\
\hat{D} & \hat{A} \arrow[l, dashed] \arrow[u, "\varphi"'] \\
& \mathcal{V} \arrow[ul] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

on peut voir $\hat{\theta}_1$ comme un $\hat{A}$-isomorphisme au moyen de la flèche en pointillé $\hat{\theta}_1 \circ \varphi$. Le théorème (3.1.3) fournit alors une A-algèbre finie B, $\psi : A \to B$, et un $\hat{A}$-isomorphisme

$$\hat{\theta}_2 : \hat{D} \xrightarrow{\sim} \hat{B}$$

s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\hat{\psi}"'] \arrow[dr, dashed] & C \arrow[d, "\hat{\theta}_1", "\simeq"'] \\ \hat{B} & \hat{D} \arrow[l, "\simeq"', "\hat{\theta}_2"] \end{tikzcd}$$

donc $\varphi \tilde{\to} \mathcal{F}(\psi^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger)$ et $\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif.

Prouvons que $\mathcal{F}$ est plein. Soient $\varphi : \hat{A} \to C$ et $\varphi' : \hat{A} \to C'$ deux objets de $\hat{\mathcal{C}}_f$ et $\lambda : C \to C'$ un $\hat{A}$-morphisme. On vient de montrer qu'il existe des morphismes finis $\psi : A \to B, \psi' : A \to B'$ s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[dr, "\hat{\psi}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "\hat{\psi}'"'] & & \\ & \hat{B} \arrow[d, "\lambda'"'] & C \arrow[l, "\simeq"', "\theta"] \arrow[d, "\lambda"] \\ & \hat{B}' & C' \arrow[l, "\simeq"', "\theta'"] \end{tikzcd}$$

où l'on a posé $\lambda' = \theta' \circ \lambda \circ \theta^{-1}$. Il s'agit de trouver un $A^\dagger$-morphisme $\lambda^\dagger : B^\dagger \to B'^\dagger$ induisant λ' par passage aux complétés.

Comme dans le théorème (3.1.3) on se ramène au cas où $A, \hat{A}, C$ et C' sont intégralement clos. On a vu dans la démonstration du théorème (3.1.3) (semblable à celle de (3.1.1)) qu'il existe $a \in A$ et $f, g \in A_a[X]$ tels que ψ_a et ψ'_a soient finis étales et s'identifient aux morphismes canoniques :

$$\psi_a : A_a \to B_a = A_a[X] / (f)$$

$$\psi'_a : A_a \to B'_a = A_a[X] / (g) \; ;$$

$\hat{\psi}_a, \hat{\psi'_a}$ sont finis étales et s'identifient à

$$(\hat{\psi})_a : (\hat{A})_a \to (\hat{B})_a = (\hat{A})_a[X] / (f)$$

$$(\hat{\psi'})_a : (\hat{A})_a \to (\hat{B}')_a = (\hat{A})_a[X] / (g)$$

et font commuter le triangle dont les flèches sont finies étales

$$\begin{tikzcd} \widehat{(A_a)} = \widehat{((\hat{A})_a)} \arrow[r, "\widehat{((\hat{\psi})_a)}"] \arrow[dr, "\widehat{((\hat{\psi}')_a)}"'] & \widehat{((\hat{B})_a)} = \widehat{(B_a)} \arrow[d, "\widehat{(\lambda'_a)}"] \\ & \widehat{((\hat{B}')_a)} = \widehat{(B'_a)} \end{tikzcd} .$$

Par l'équivalence de (3) (ii) il existe un morphisme ρ fini étale, qui relève $(\widehat{\lambda'_a})$ et fait commuter le triangle

$$\begin{tikzcd}
(A_a)^\dagger \arrow[r, "(\psi_a)^\dagger"] \arrow[dr, "(\psi'_a)^\dagger"'] & (B_a)^\dagger \arrow[d, "\rho"] \\
& (B'_a)^\dagger
\end{tikzcd} .$$

D'après la proposition 2 de [Et 2] on a les égalités

$$A^\dagger = (A_a)^\dagger \cap \hat{A}, \quad B^\dagger = (B_a)^\dagger \cap \hat{B} \quad , \quad B'^\dagger = (B'_a)^\dagger \cap \hat{B}' \ ;$$

comme ρ et λ' induisent tous deux $(\widehat{\lambda'_a})$, la restriction de ρ et λ' à $B^\dagger = (B_a)^\dagger \cap \hat{B}$ fournit le $A^\dagger$-morphisme cherché

$$\lambda^\dagger : B^\dagger \to B'^\dagger \ .$$

(2) Se démontre comme le (2) (ii) du théorème (2.4).

(3) (i) Il suffit de le prouver pour $\mathcal{H}^\wedge$.

On prouve que $\mathcal{H}^\wedge$ est essentiellement surjectif par une méthode analogue à celle utilisée pour $\mathcal{F}$ dans le (1) : étant donnée une A_0-algèbre finie B_0, on trouve une A-algèbre finie B relevant B_0 et donc $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre finie répondant à la question.

Pour montrer que $\mathcal{H}^\wedge$ est plein on part d'un A_0-morphisme $\lambda_0 : B_0 \to B'_0$; avec B et B' comme ci-dessus et lissité formelle de $\hat{B}$ sur $\mathcal{V}$ on en déduit un $\mathcal{V}$-morphisme (en fait un $\hat{A}$-morphisme) $\lambda : \hat{B} \to \hat{B}'$ qui relève λ_0. □

COROLLAIRE (3.1.5). *Avec les hypothèses et notations du* (3) *du théorème* (3.1.3), *supposons de plus donné un carré cartésien de $\mathcal{V}$-schémas formels*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

où $\overline{h}$ est propre. Alors le $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{X}'$ défini par le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}' \arrow[r] \arrow[d, "h'"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{S}' \arrow[r, "\hat{\psi}"'] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

admet une compactification $\overline{\mathcal{X}'}$ définie par le cube à faces cartésiennes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted, "h"] & & \overline{\mathcal{X}} \arrow[dd, "\overline{h}"] \\
\mathcal{X}' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "h'"'] & & \overline{\mathcal{X}'} \arrow[ur, "\theta'"'] \arrow[dd] & \\
 & \mathcal{S} \arrow[rr, hook, dotted, "j"] & & \overline{\mathcal{S}} \\
\mathcal{S}' \arrow[ur, dotted, "\hat{\psi}"] \arrow[rr, hook, "j'"'] & & \overline{\mathcal{S}'} \arrow[ur, "\hat{\theta}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\hat{\theta}$ est fini.

De plus on a les mêmes résultats en remplaçant $\overline{\mathcal{S}}$ par $\tilde{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Comme j' est une immersion ouverte il en est de même de $\mathcal{X}' \to \overline{\mathcal{X}'}$. De plus $\overline{\mathcal{X}'} \to \overline{\mathcal{X}}$ est fini puisque $\hat{\theta}$ l'est [théo (3.1.3) (3)] ; d'où le corollaire. □

Corollaire (3.1.6). *Avec les hypothèses et notations du théorème* (3.1.3), *supposons de plus φ_0 fini étale galoisien de groupe G. Alors*

(1) *$\hat{\psi} : \mathcal{S}' = Spf\ \hat{B} \to \mathcal{S} = Spf\ \hat{A}$ est fini étale galoisien de groupe G.*

(2) *On a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd}
S'_0 \arrow[r, hook, "j'_0"] \arrow[d, "h_0"'] & \overline{S'_0} \arrow[d, "\overline{h}_0"] \\
S_0 \arrow[r, hook, "j_0"'] & \overline{S}_0
\end{tikzcd}$$

où $h_0 = Spec\ \varphi_0 = \hat{\psi}$ mod $I, \overline{S_0}$ et $\overline{S'_0}$ sont propres sur $\mathcal{V}_0$ et normaux, $\overline{h_0}$ est fini, et j_0, j'_0 sont des immersions ouvertes dominantes. De plus G agit sur $\overline{S'_0}$ par $\overline{S}_0$-automorphismes et on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\overline{S}_0} \xrightarrow{\sim} (\overline{h}_{0*}(\mathcal{O}_{\overline{S'_0}}))^G.$$

Démonstration. Le (1) est classique.

Dans le (2) on prend pour $\overline{S}_0$ le normalisé de $\widehat{P'}$ mod I, et pour $\overline{S'_0}$ la fermeture intégrale de $\overline{S}_0$ dans S'_0 ; d'où le carré cartésien ci-dessus, et un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} j_{0*}h_{0*}\mathcal{O}_{S'_0} = \overline{h}_{0*}j'_{0*}\mathcal{O}_{S'_0} & \overline{h}_{0*}\mathcal{O}_{\overline{S'_0}} \arrow[l, hook'] \\ j_{0*}\ \mathcal{O}_{s_0} \arrow[u, "\varphi_0"] & \mathcal{O}_{\overline{S_0}} \arrow[l, hook', "j_{\overline{S}}"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

à flèches horizontales injectives.

Pour l'action de G on peut supposer S_0 connexe, donc intégralement clos puisqu'il est lisse sur $\mathcal{V}_0$: alors $\overline{S_0}$ est intègre et normal, donc $\mathcal{O}_{\overline{S}_0}$ est un faisceau d'anneaux intégralement clos, de corps des fractions celui de $\mathcal{O}_{S_0}$.

Considérons $g \in G$ et une section x de $\overline{h}_{0*}\mathcal{O}_{\overline{S'_0}}$: alors $g(x)$ est une section de $j_{0*}h_{0*}\mathcal{O}_{S'_0}$ qui est entière sur $\mathcal{O}_{\overline{S}_0}$, donc $g(x)$ est en fait une section de $\overline{h}_{0*}\ \mathcal{O}_{\overline{S'_0}}$ car $\overline{S'}_0$ est la fermeture intégrale de $\overline{S}_0$ dans S'_0.

Si l'on suppose de plus x fixe par G, alors x est une section de $j_{0*}\mathcal{O}_{S_0}$ car φ_0 est galoisien de groupe G ; or x est entière sur $\mathcal{O}_{\overline{S}_0}$, donc x est une section de $\mathcal{O}_{\overline{S}_0}$ puisque $\mathcal{O}_{\overline{S}_0}$ est intégralement clos. D'où le corollaire. $\square$

3.2 – *Cas des morphismes projectifs et des intersections complètes.*

THÉORÈME (3.2.1). *Soient $\mathcal{V}$ un anneau excellent normal, $I \subset \mathcal{V}$ un idéal et $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}/I$ tel que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$ soit un couple hensélien au sens de [EGA IV, (18.5.5)]; on suppose $\mathcal{V}_0$ normal. Soient $S_0 = Spec\ A_0$ un $\mathcal{V}_0$-schéma affine et lisse, $A = \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_d]/J$ une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 et dont on a fixé une présentation et $S = Spec\ A$: on note $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie I-adique, $A^\dagger$ son complété faible, $\tilde{A}$ l'hensélisé de A au sens de Raynaud et $\hat{S} = Spec\ \hat{A}$, $S^\dagger = Spec\ A^\dagger$, $\tilde{S} = Spec\ \tilde{A}$. On désigne par $\overline{S}$ l'adhérence schématique de S dans $\mathbb{P}^d_{\mathcal{V}}$, et par $\mathcal{S}$ (resp. $\overline{\mathcal{S}}$) le complété formel I-adique de S (resp. de $\overline{S}$).*

Soit $f : X_0 \to S_0$ un $\mathcal{V}_0$-morphisme projectif. Alors

(1) *Il existe un carré cartésien*

(3.2.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{h}"] \\ S \arrow[r, hook] & \overline{S} \end{tikzcd}$$

dans lequel $\overline{h}$ est projectif, h est un relèvement projectif de f et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

(2) *Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens déduit de* (3.2.1.1)

(3.2.1.2)
$$\begin{tikzcd}
X_{\hat{S}} \arrow[r] \arrow[d, "h_{\hat{S}}"'] & X_{S^\dagger} \arrow[r] \arrow[d, "h_{S^\dagger}"'] & X_{\tilde{S}} \arrow[r] \arrow[d, "h_{\tilde{S}}"'] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
\hat{S} \arrow[r] & S^\dagger \arrow[r] & \tilde{S} \arrow[r] & S \arrow[r, hook] & \overline{S}
\end{tikzcd}$$

dans lequel $h, h_{\tilde{S}}, h_{S^\dagger}, h_{\hat{S}}$ *sont des relèvements projectifs de* f.
Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :
(i) X *est plat sur* $\mathcal{V}$ *et* f *est plat.*
(ii) $h_{\hat{S}}$ *est plat.*
(iii) $h_{S^\dagger}$ *est plat.*
(iv) $h_{\tilde{S}}$ *est plat.*

(3) *On a équivalence entre les propriétés suivantes :*
(i) X *est plat sur* $\mathcal{V}$ *et* f *est lisse.*
(ii) $h_{\hat{S}}$ *est lisse.*
(iii) $h_{S^\dagger}$ *est lisse.*
(iv) $h_{\tilde{S}}$ *est lisse.*

(4) *Le carré cartésien* (3.2.1.1) *fournit par passage aux complétés formels un carré cartésien de* $\mathcal{V}$*-schémas formels*

(3.2.1.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\hat{h}"'] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\hat{\overline{h}}"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\hat{h}$ *est un relèvement projectif de* f, $\hat{\overline{h}}$ *est projectif et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.*
De plus on a équivalence entre les propriétés suivantes :
(i) X *est plat sur* $\mathcal{V}$ *et* f *est plat (resp.* f *est lisse).*
(ii) $\hat{h}$ *est plat (resp.* $\hat{h}$ *est lisse).*

Démonstration. Quitte à décomposer les schémas normaux noethériens *Spec* $\mathcal{V}$ et S_0 en somme de leurs composantes connexes on supposera dans toute la suite que *Spec* $\mathcal{V}$ et S_0 sont connexes, donc intégralement clos.

Pour le (1). Le morphisme projectif f se factorise en $f : X_0 \overset{i_0}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_{A_0} \overset{s_0}{\to} S_0 = = Spec\ A_0$ où i_0 est une immersion fermée et s_0 est le morphisme canonique. Soient $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées projectives sur $\mathbb{P}^n_{A_0}$ (resp. sur $\mathbb{P}^n_S$): alors X_0 est isomorphe à $Proj(A_0[x_0, x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{J}^0)$ pour un certain idéal homogène $\mathcal{J}^0$ de l'anneau noethérien $A_0[x_0, x_1, \ldots, x_n]$: $\mathcal{J}^0$ est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes $f_0^1, \dots, f_0^r$. Pour $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ relevons f_0^α en un polynôme homogène $f^\alpha \in A[x_0, x_1, \dots, x_n]$ de même degré en relevant coefficient par coefficient de A_0 à A, et soit $\mathcal{J}$ l'idéal (homogène) engendré par $f^1, \dots, f^r$

$$\mathcal{J} = (f^1, \dots, f^r) \subset A[x_0, x_1, \dots, x_n] .$$

Désignons par

$$i : X = Proj(A[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$$

l'immersion fermée et par $p_S : \mathbb{P}^n_S \to S = Spec\ A$ la projection canonique. Alors le morphisme composé

$$h = p_S \circ i : X \to S$$

est un relèvement projectif de f. Notons $p_{\overline{S}} : \mathbb{P}^n_{\overline{S}} \to \overline{S}$ la projection canonique, $\overline{X}$ la fermeture intégrale de $\mathbb{P}^n_{\overline{S}}$ dans X, $\overline{i} : \overline{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\overline{S}}$ l'immersion fermée et $\overline{h} = p_{\overline{S}} \circ \overline{i} : \overline{h}$ est projectif. On dispose ainsi d'un carré cartésien

(3.2.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j_{\overline{Y}}"'] \arrow[d, "h"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{h}"] \\ S \arrow[r, hook, "j_{\overline{S}}"'] & \overline{S} \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

Pour le (2). On a le lemme suivant :

LEMME (3.2.2). *On a l'équivalence :*

$$X \textit{ est plat sur } \mathcal{V} \Longleftrightarrow X_{\hat{S}} \textit{ est plat sur } \mathcal{V} .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Notons v le morphisme composé $X \xrightarrow{h} S \to \to Spec\ \mathcal{V}$ et w le composé de v avec le morphisme plat $X_{\hat{S}} \to X$. Si v est plat, w l'est. Supposons que w soit plat : d'après le critère de platitude par fibres [EGA IV,(11.3.10)] v est plat sur sa fibre spéciale X_0, donc audessus de $\mathcal{V}_0$. Or par le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] il existe un ouvert non vide V de $Spec\ \mathcal{V}$ au-dessus duquel v est lisse ; comme cet ouvert V contient $Spec\ \mathcal{V}_0$ d'après le raisonnement fait cidessus, il résulte de [EGA IV, (18.5.4.3)] que $V = Spec\ \mathcal{V}$ puisque $(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$ est un couple hensélien. D'où le lemme. $\square$

On montre de la même façon le lemme suivant :

Lemme (3.2.3). *Avec $\mathcal{V}$ comme dans le théorème* (3.2.1), *soit B une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini, de séparé complété I-adique noté $\hat{B}$. Alors on a l'équivalence :*

$$B \text{ est plat sur } \mathcal{V} \Longleftrightarrow \hat{B} \text{ est plat sur } \mathcal{V} .$$

Par fidèle platitude des morphismes $\hat{S} \to S^{\dagger}$ et $S^{\dagger} \to \tilde{S}$ les propriétés $(ii), (iii), (iv)$ sont équivalentes.

Supposons (ii) vérifié : alors $X_{\hat{S}}$ est plat sur $\mathcal{V}$, donc par le lemme (3.2.2) X est plat sur $\mathcal{V}$ et (i) est clair. Il nous reste à prouver que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Supposons la propriété (i) vérifiée. Puisque $X_{\hat{S}}$ est plat sur $\mathcal{V}$ (car X est plat sur $\mathcal{V}$) et f est plat, le critère de platitude par fibres [EGA IV,(11.3.10)] prouve que $h_{\hat{S}}$ est plat en tous les points au-dessus de S_0. Or $Spec\ \hat{A}$ est connexe car $S_0 = Spec\ A_0$ l'est [Et 1, cor 2 du théo 3] ; comme A est normal et que le morphisme $A \to \hat{A}$ est normal, car régulier [EGA IV, (7.8.3) (v)], il résulte de la [prop (1.7) 4 (ii)] que $\hat{A}$ est normal, donc que $\hat{A}$ est intégralement clos. Par le théorème de platitude générique [EGA IV, (6.9.1)] il existe un ouvert non vide V de $Spec\ \hat{A}$ tel que la restriction $h_V : h_{\hat{S}}^{-1}(V) \to V$ de $h_{\hat{S}}$ soit plate. Or V contient $Spec\ A_0$ d'après le raisonnement fait ci-dessus, donc $V = Spec\ \hat{A} =: \hat{S}$ puisque $(\hat{S}, S_0)$ est un couple hensélien [EGA IV, (18.5.4.3)].

Pour le (3). Par fidèle platitude des morphismes $\hat{S} \to S^{\dagger}$ et $S^{\dagger} \to \tilde{S}$ les propriétés $(ii), (iii), (iv)$ sont équivalentes. Comme $(ii) \Rightarrow (i)$ est clair, il nous reste à prouver que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Supposons la propriété (i) vérifiée. D'après le (2) $h_{\hat{S}}$ est plat. Appliquons [EGA IV, (12.2.4)] au morphisme projectif et plat $h_{\hat{S}}$: l'ouvert W des $s \in \hat{S}$ où $h_s : (X_{\hat{S}})_s \to s$ est lisse contient $Spec\ A_0$ puisque f est lisse, donc $W = \hat{S}$ là encore en utilisant le caractère hensélien du couple $(\hat{S}, S_0)$. Ainsi on a obtenu un relèvement projectif et lisse $h_{\hat{S}} : X_{\hat{S}} \to \hat{S}$ de f.

Pour le (4). Il suffit de prendre le complété formel du carré (3.2.1.1) : on obtient un carré cartésien de $\mathcal{V}$-schémas formels

(3.2.1.4)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, hook, "j_{\overline{Y}}"] \arrow[d, "\hat{h}"'] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\hat{\overline{h}}"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, hook, "j_{\overline{S}}"'] & \overline{\mathcal{S}} \end{tikzcd} ,$$

dans lequel $\hat{h}$ et $\hat{\overline{h}}$ sont projectifs. Puisque $\hat{A}$ est un anneau de Zariski et que $\hat{h}$ est le complété de $h, h_{\hat{S}}$, il résulte de [Bour, AC III, § 5; n° 4, prop 2, et n° 2, théo 1] que la platitude (resp. la lissité) de $\hat{h}$ équivaut à celle de $h_{\hat{S}}$; d'où l'équivalence des propriétés (i) et (ii) . □

REMARQUES (3.2.4). Supposons que $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, I son idéal maximal, k son corps résiduel et π une uniformisante.

(i) L'hypothèse de platitude de X sur $\mathcal{V}$ dans [(3.2.1) (2), (3) et (4)] équivaut à $\mathcal{O}_X$ sans π-torsion.

(ii) Lorsque $S = Spec\ \mathcal{V}$, un exemple de Serre [S 1] prouve qu'il existe des cas où X n'est pas plat sur $\mathcal{V}$: dans ce cas h n'est pas plat. Nous allons voir ci-dessous en (3.2.6) une condition suffisante de platitude de h, celle où le morphisme projectif f identifie X à une intersection complète dans un espace projectif (cf. définition (3.2.5)).

En nous inspirant de la définition donnée par Deligne des intersections complètes dans un fibré projectif [SGA 7, II, exp.XI, 1.4] on adoptera la définition suivante :

DÉFINITION (3.2.5). *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dira que X est une intersection complète relativement à S dans des espaces projectifs sur S si il existe un recouvrement de S par des ouverts de Zariski S_α, $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$ et, en désignant par $f_\alpha : X_\alpha \to S_\alpha$ le morphisme déduit de f par le changement de base $S_\alpha \to S$, il existe, pour chaque α, un couple $(n_\alpha, r_\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et une S_α-immersion fermée i_α qui factorise f_α*

(3.2.5.1)
$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, hook, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \mathbb{P}^{n_\alpha}_{S_\alpha} \arrow[d, "p_\alpha"] \\ & S_\alpha \end{tikzcd}$$

où p_α désigne la projection canonique, telle que :

(i) *fibre à fibre, i_α est de codimension r_α, i.e. pour tout $s = Spec\ k(s) \in S_\alpha$, si $i_{\alpha,s} : X_{\alpha,s} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_\alpha}_s$ désigne la fibre de i_α au-dessus de s, on a $r_\alpha =$ codim $(X_{\alpha,s}, \mathbb{P}^{n_\alpha}_s)$*

(ii) *il existe un recouvrement de S_α par des ouverts de Zariski $S_{\alpha,\beta}$, $S_\alpha = \bigcup_\beta S_{\alpha,\beta}$ tels que, en désignant par*

(3.2.5.2)
$$\begin{tikzcd} X_{\alpha,\beta} \arrow[r, hook, "i_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "f_{\alpha,\beta}"'] & \mathbb{P}^{n_\alpha}_{S_{\alpha,\beta}} \arrow[d, "p_{\alpha,\beta}"] \\ & S_{\alpha,\beta} \end{tikzcd}$$

le diagramme déduit de (3.2.5.1) *par le changement de base* $S_{\alpha,\beta} \to S_\alpha$, *chaque* $X_{\alpha,\beta} = Proj(\mathcal{O}_{S_{\alpha,\beta}}[x_0, x_1, \ldots, x_{n_\alpha}]/\mathcal{J}_{\alpha,\beta})$ *est l'intersection de* r_α *hypersurfaces (de certains degrés) au sens schématique, i.e. l'idéal* $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}$ *est engendré par* r_α *éléments homogènes.*

On dit alors que X_α *est une intersection complète relativement à* S_α *dans* $\mathbb{P}^{n_\alpha}_{S_\alpha}$ *de codimension* r_α.

Nous allons établir le corollaire suivant du théorème (3.2.1):

Corollaire (3.2.6). *Soient* $\mathcal{V}$ *un anneau local normal d'idéal maximal* $I \subset \mathcal{V}$, *complet pour la topologie* I*-adique, de corps résiduel* $k = \mathcal{V}/I$. *Soient* S_0 *un* k*-schéma lisse et séparé,* $f : X_0 \to S_0$ *un* k*-morphisme projectif et lisse tel que* X_0 *est une intersection complète, relativement à* S_0, *dans des espaces projectifs sur* S_0, $S_{\alpha,\beta} = Spec\ A_0$ *un* k*-schéma affine et lisse tel qu'en* (3.2.5.2), $A = \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_d]/J$ *une* $\mathcal{V}$*-algèbre lisse relevant* A_0, *dont on a fixé une présentation, et* $S = Spec\ A$ *: on note* $\hat{A}$ *le séparé complété de* A *pour la topologie* I*-adique,* $A^\dagger$ *son complété faible,* $\tilde{A}$ *l'hensélisé de* A *au sens de Raynaud et* $\hat{S} = Spec\ \hat{A}$, $S^\dagger = Spec\ A^\dagger$, $\tilde{S} = Spec\ \tilde{A}$. *On désigne par* $\overline{S}$ *l'adhérence schématique de* S *dans* $\mathbb{P}^d_{\mathcal{V}}$, *et par* $\mathcal{S}$ *(resp.* $\overline{\mathcal{S}}$*) le complété formel* I*-adique de* S *(resp. de* $\overline{S}$*).*

Alors le X *construit en* [(3.2.1)(1)] *est plat sur* $\mathcal{V}$ *et les morphismes* $h_{\tilde{S}}, h_{S^\dagger}, h_{\hat{S}}$ *de* (3.2.1.2) *sont des relèvements projectifs et lisses du morphisme* $f_{\alpha,\beta} : X_{\alpha,\beta} \to S_{\alpha,\beta}$ *déduit de* f *par le changement de base* $S_{\alpha,\beta} \to S_0$. *De plus on dispose d'un diagramme tel que* (3.2.1.4) *dans lequel* $\hat{h}$ *est un relèvement projectif et lisse de* f.

Démonstration. L'anneau $\mathcal{V}$ est excellent [EGA IV, (7.8.3)(iii)]. Quitte à faire le changement de base $S_{\alpha,\beta} \to S_0$ on supposera dans la suite de la démonstration que $f_{\alpha,\beta} = f$. Quitte à décomposer les schémas normaux noethériens $Spec\ \mathcal{V}$, S_0 et X_0 en somme de leurs composantes connexes on supposera dans toute la suite que $Spec\ \mathcal{V}$, S_0 et X_0 sont connexes, donc intégralement clos. En utilisant alors les notations de la preuve de (3.2.1), avec $X_0 = Proj(A_0[x_0, x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{J}^0)$, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_{S_0} \arrow[d, "p_{S_0}"] \\ & S_0 \end{tikzcd} .$$

Comme f est plat et S_0 connexe, pour tout $s \in S_0$, la dimension de $X_{0,s} = f^{-1}(s)$ est constante [H, III, cor 9.10], donc la codimension Codim $(X_{0,s}, \mathbb{P}^n_{k(s)})$ aussi : notons r cette dernière. Puisque X_0 est une intersection complète, relativement à S_0, dans $\mathbb{P}^n_{S_0}$, l'idéal $\mathcal{J}^0$ possède une famille génératrice constituée de r éléments homogènes : notons ceux-ci $f_0^1, \ldots, f_0^r$, que l'on relève comme dans la preuve de (3.2.1) en $f^1, \ldots, f^r$; d'où un diagramme tel que (3.2.1.1). Notons $\mathbb{A}^n_{S,(j)}$, $j \in [\![0, n]\!]$, chacun des espaces affines qui recouvrent $\mathbb{P}^n_S$ et $X_{(j)} = = Spec\ (A[x_0, \ldots, x_n]/(x_j - 1, f^1, \ldots, f^r))$ le schéma induit sur $\mathbb{A}^n_{S,(j)}$ par X. Il s'agit de montrer que, pour tout j, $X_{(j)}$ est plat sur S. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, notons $X_{0,(j)}$ (resp $\mathbb{A}^n_{S_0,(j)}$) la réduction de $X_{(j)}$ (resp $\mathbb{A}^n_{S,(j)}$) mod I et $f^\ell_{0,(j)}(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f^\ell_0(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_j = = 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $\ell \in [\![1, r]\!]$. Pour prouver la platitude de $X_{(j)}$ sur S, il suffit d'après [Mi, I, Rk 2.6 (d)] de prouver que $(f^1_{0,(j)}, \ldots, f^r_{0,(j)})$ est une suite régulière, ce qui équivaut ici [*EGA* 0_{IV}, (15.2.2) et (15.2.3)] à prouver qu'elle est quasi-régulière. Or i_0 est une immersion fermée régulière d'après [EGA IV, (17.12.1)], i.e., pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'idéal $\mathcal{J}^0_{(j)} := (f^1_{0,(j)}, \ldots, f^r_{0,(j)})$ est régulier [EGA IV, (16.9.2)] : donc, d'après [*EGA* 0_{IV}, (15.2.2)] et [EGA IV, (16.1.2.2)], l'homomorphisme (*ii*) de [EGA IV, (16.9.3)] est bijectif. Comme i_0 est régulière, donc quasi-régulière, le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X_0/\mathbb{P}^n_{S_0}}$ est localement libre [EGA IV, (16.9.8)], i.e. pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ $\mathcal{J}^0_{(j)}/(\mathcal{J}^0_{(j)})^2$ est localement libre : or ici, fibre à fibre au-dessus de chaque point $s \in S_0$, il est de rang égal à rg $(\mathcal{J}^0_{(j)}/(\mathcal{J}^0_{(j)})^2) = \mathrm{Codim}\,(X_{0,s}, \mathbb{P}^n_{k(s)}) = r$. Donc, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{J}^0_{(j)}/(\mathcal{J}^0_{(j)})^2$ est localement libre de rang r. Or les images de $f^1_{0,(j)}, \ldots, f^r_{0,(j)}$ dans $\mathcal{J}^0_{(j)}/(\mathcal{J}^0_{(j)})^2$ l'engendrent en tant que $\mathcal{O}_{X_{0,(j)}}/\mathcal{J}^0_{(j)}$-module: étant au nombre de r c'en est une base [Bour, AC II, § 3, cor 5 du théo 1]; ainsi [EGA IV, (16.9.3)] la suite $(f^1_{0,(j)}, \ldots, f^r_{0,(j)})$ est quasi-régulière. Ceci achève la preuve du corollaire. □

RÉFÉRENCES

[Bo] S. Bosch, *A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations*, Math. Ann., **255** (1981), pp. 395–404.

[Bo-Dw-R] S. Bosch - B. Dwork - Ph. Robba, *Un théorème de prolongement pour des fonctions analytiques*, Math. Ann., **252** (1980), pp. 165–173.

[Bour] N. Bourbaki, *Algèbre* [A] chap. I à VII; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.

[EGA] A. Grothendieck - J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique*: Chap. I, Springer Grundlehren 166; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[Eℓ] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 6 (1973), pp. 553–604.

[Et 1] J.-Y. Etesse, *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer: théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, **107** (2002), pp. 111–138.

[Et 2] J.-Y. Etesse, *Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35 (2002), pp. 575–603.

[Et 3] J.-Y. Etesse, *Images directes I: Espaces rigides analytiques et images directes en cohomologie rigide*, arXiv:0910.4433 ; hal.00425909.

[Et 4] J.-Y. Etesse, *Images directes II: F-isocristaux convergents sur un schéma lisse, et images directes*, arXiv:0910.4434 ; hal.00425919.

[Et 5] J.-Y. Etesse, *Images directes III: Images directes de F-isocristaux surconvergents*, arXiv:0910.4435 ; hal.00425922.

[Et 6] J.-Y. Etesse, *Images directes et fonctions L en cohomologie rigide*, arXiv:0803.1580 ; hal.00262316.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., **52** (Springer, 1977).

[Mi] J.-S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).

[M-W] P. Monsky - G. Washnitzer, *Formal Cohomolgy I*, Annals of Math., 88, n° 2 (1968), pp. 181–217.

[R] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math., **169** (Springer, 1970).

[S] J.-P. Serre, *Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961), pp. 108–109: Oeuvres complètes (Serre), **2**, n° 50 (Springer, 1986-2000), p. 98.

[SGA 1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et goupe fondamental*, Lecture Notes in Math., **224** (Springer, 1971).

[SGA 7, II] P. Deligne - N. Katz, *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math., **340** (Springer, 1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 gennaio 2009.