RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PATRIZIA LONGOBARDI
MERCEDE MAJ

Epimorfismi $\bigvee$-completi tra reticoli di sottogruppi normali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 79 (1988), p. 275-280

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__275_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 79 (1988)

Epimorfismi $\vee$-completi tra reticoli di sottogruppi normali.

PATRIZIA LONGOBARDI - MERCEDE MAJ (*)

1. Introduzione.

Sia G un gruppo e si denoti con $n(G)$ il reticolo dei sottogruppi normali di G. Se H è un gruppo e φ un isomorfismo di $n(G)$ in $n(H)$, è a volte possibile ottenere informazioni sulla struttura di H a partire da proprietà di G.

In particolare molti autori (cfr. [2], [3], [5], [6], [7]) hanno studiato questo problema quando G è un p-gruppo nilpotente di classe 2; nel 1986 è stato infine dimostrato il teorema seguente (cfr. [8]):

TEOREMA A. *Siano G un p-gruppo nilpotente di classe 2 e H un gruppo con $n(G) \overset{\varphi}{\simeq} n(H)$. Allora*:

(i) *se $Z(G)$ non è localmente ciclico, H è un p-gruppo nilpotente di classe $\leqslant 3$;*

(ii) *se $Z(G)$ è localmente ciclico, detto N l'unico sottogruppo normale minimale di G, è H/N^{φ} un p-gruppo nilpotente di classe $\leqslant 3$.*

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica e Applicazioni « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli, Italy.

Lavoro eseguito col contributo M.P.I.

Questo lavoro ha avuto origine da un soggiorno degli autori presso l'Università di Warwick in qualità di professori visitatori; essi desiderano ringraziare il Dipartimento di Matematica e in particolare il Prof. S. Stonehewer per la splendida ospitalità ricevuta.

Inoltre, se H è risolubile, H è un p-gruppo nilpotente di classe $\leqslant 3$ e, in particolare, di classe 2, se G' ha esponente infinito.

Sia ora φ un epimorfismo $\vee$-completo di $n(G)$ in $n(H)$, ossia un epimorfismo tale che $\left(\bigvee_{i\in I} K_i\right)^{\varphi} = \bigvee_{i\in I} (K_i)^{\varphi}$, per ogni famiglia $(K_i)_{i\in I}$ di elementi di $n(G)$. Nel 1982 è stato dimostrato (cfr. [5]) che se G è un p-gruppo nilpotente di classe 2, H un gruppo risolubile e φ un tale epimorfismo, allora H è un p-gruppo ipercentrale o un gruppo di ordine primo.

In questo lavoro si prova che se φ non è iniettivo, cioè non un isomorfismo, è possibile ottenere maggiori informazioni su H, come mostrato dal teorema seguente:

TEOREMA B. *Siano G un p-gruppo nilpotente di classe 2, $H \neq 1$ un gruppo e $\varphi: n(G) \to n(H)$ un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo. Allora:*

(i) *se $Z(G)$ non è localmente ciclico, H è un p-gruppo abeliano elementare, $G' = Z(G)$ ha esponente p e per ogni sottogruppo K normale in G si ha $K \geqslant G'$ o $K \leqslant G'$;*

(ii) *se $Z(G)$ è localmente ciclico e N è l'unico sottogruppo normale minimale di G, è H semplice o $n(H) \simeq n(G/N)$ con $Z(G/N)$ non localmente ciclico.*

Nel caso (i) non ci sono ulteriori restrizioni sulla struttura di H, come mostrato dagli esempi in 3. Pertanto il Teorema B, insieme con il succitato Teorema A e il Lemma 6 in [3], completa lo studio degli epimorfismi $\vee$-completi di $n(G)$ in $n(H)$, con G p-gruppo nilpotente di classe 2.

Notazioni e nomenclatura sono per lo più quelle usuali (cfr. ad es. [9]); in particolare $Z(G)$ è il centro del gruppo G.

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. G. Zacher per aver proposto loro il problema e per molte stimolanti discussioni.

2. Dimostrazione del Teorema B.

(i) Sia $Z(G)$ non localmente ciclico.

φ induce un epimorfismo $\vee$-completo φ_1 di $l(G/Z(G))$ in $n(H/Z(G)^{\varphi})$, e un epimorfismo $\vee$-completo φ_2 di $l(Z(G))$ nel reticolo $\mathfrak{L}_1$ dei sotto-

gruppi normali di H contenuti in $Z(G)^\varphi$.

(1) $$\text{È } \varphi_1 = 0 \text{ o } \varphi_2 = 0.$$

Per assurdo si supponga $\varphi_1 \neq 0$ e $\varphi_2 \neq 0$. $G/Z(G)$ non è localmente ciclico, poichè G non è abeliano; pertanto 1.1 di [4] comporta che φ_1 e φ_2 sono isomorfismi. Allora, ragionando come in 2.2 di [12], si ha che φ è iniettivo, contro le ipotesi.

(2) *È* $H \simeq Z(G)$ *o* $H \simeq G/Z(G)$; *in ogni caso* H *è abeliano.*

Per (1) si ha $\varphi_1 = 0$ e quindi $\varphi_2 \neq 0$ è iniettivo, oppure $\varphi_2 = 0$ e quindi $\varphi_1 \neq 0$ è iniettivo. Si ha allora, nel primo caso

$$Z(G)^\varphi = H, \quad l\big(Z(G)\big) \overset{\varphi_2}{\simeq} n(H) \quad \text{e} \quad Z(G) \simeq H;$$

nel secondo

$$Z(G)^\varphi = 1, \quad l\big(G/Z(G)\big) \overset{\varphi_1}{\simeq} n(H) \quad \text{e} \quad G/Z(G) \simeq H$$

(cfr. Lemma 6 di [3]).

(3) $$\text{È } G' = Z(G).$$

Per assurdo, sia $G' \neq Z(G)$. Allora è $H/(G')^\varphi \neq 1$; infatti, se è $\varphi_2 = 0$, si ha $(G')^\varphi = Z(G)^\varphi = 1 < H$; se invece è $\varphi_1 = 0$ e quindi $\varphi_2 \neq 0$ è iniettivo, da $G' < Z(G)$, si ottiene $(G')^\varphi < Z(G)^\varphi = H$. Pertanto, per 1.1 di [4], φ induce un isomorfismo $\bar{\varphi}$ di $l(G/G')$ in $n\big(H/(G')^\varphi\big)$, contro l'essere

$$\big(Z(G)/G'\big)^{\bar{\varphi}} = \big(Z(G)^\varphi\big)/(G')^\varphi = G^\varphi/(G')^\varphi = (G/G')^{\bar{\varphi}}, \quad \text{se } \varphi_1 = 0,$$

e

$$\big(Z(G)/G'\big)^{\bar{\varphi}} = \big(Z(G)^\varphi\big)/(G')^\varphi = 1, \quad \text{se } \varphi_2 = 0.$$

(4) $$\text{Se } K \lhd G, \text{ si ha } K \geqslant G' \text{ o } K \leqslant G'.$$

Per (3) è $G' = Z(G)$.

Per assurdo, esista $K \lhd G$ tale che $K \not\geqslant G'$ e $K \not\leqslant G'$. Si ha allora $K \cap G' < G' < KG'$ e

$$(KG')/(K \cap G') = \big(K/(K \cap G')\big) \times \big(G'/(K \cap G')\big) \leqslant Z\big(G/(K \cap G')\big) .$$

Pertanto φ induce un epimorfismo φ_3 di $l\big((KG')/(K \cap G')\big)$ nel reticolo $\mathfrak{L}_2$ dei sottogruppi normali di $H/(K \cap G')^{\varphi}$ contenuti in $\big(K^{\varphi}(G')^{\varphi}\big)/(K \cap G')^{\varphi}$, con $(KG')/(K \cap G')$ non localmente ciclico.

Se fosse $\big(K^{\varphi}(G')^{\varphi}\big)/(K \cap G')^{\varphi} = 1$ si avrebbe $K^{\varphi}(G')^{\varphi} = (K \cap G')^{\varphi} \leqslant (G')^{\varphi}$, da cui $(KG')^{\varphi} = (G')^{\varphi} = (K \cap G')^{\varphi}$. Ma allora $(KG'/G')^{\varphi_1} = 1$ e $(K \cap G')^{\varphi_2} = (G')^{\varphi_2}$, contro l'essere φ_1 o φ_2 iniettivo. Pertanto è $\big(K^{\varphi}(G')^{\varphi}\big)/(K \cap G')^{\varphi} \neq 1$, cioè $\mathfrak{L}_2 \neq 1$; quindi 1.1 di [4] comporta φ_3 iniettivo, il che contraddice $(KG')^{\varphi} = (G')^{\varphi}$ se $\varphi_1 = 0$, e $(K \cap G')^{\varphi} = (G')^{\varphi}$, se $\varphi_2 = 0$.

(5) *G', G/G' e H sono p-gruppi abeliani elementari.*

Per assurdo, sia $\exp G' > p$.

Se $a \in G$ ha ordine p mod G', allora per (4) si ha $\langle a \rangle^G \geqslant G'$ da cui

$$G' = G' \cap \langle a \rangle^G = G' \cap \big(\langle a \rangle [\langle a \rangle, G]\big) =$$

$$= (G' \cap \langle a \rangle)[\langle a \rangle, G] = \langle a^p \rangle [\langle a \rangle, G] ,$$

con $[\langle a \rangle, G]$ di esponente p. È poi $\Omega_2(G) \leqslant G'$, altrimenti si avrebbe $G' = [\langle a \rangle, G]\langle a^p \rangle$ per un opportuno a di ordine p^2, e G' di esponente p. Quindi è $G'/\Omega_1(G)$ ciclico e $\Omega_1(G/\Omega_1(G)) = \Omega_2(G)/\Omega_1(G) \leqslant G'/\Omega_1(G)$ ha ordine primo, sicchè $G/\Omega_1(G)$ è localmente ciclico o localmente quaternionale.

$G/\Omega_1(G)$ non è localmente ciclico, altrimenti da $\Omega_1(G) \leqslant G' \leqslant Z(G)$ seguirebbe G abeliano, un assurdo. Allora è $G/\Omega_1(G)$ localmente quaternionale.

Si ha $G/\Omega_1(G) \simeq Q_8$, essendo G di classe 2, e quindi $|G'/\Omega_1(G)| = 2$ e $\exp G' = 4$. Pertanto è $G' = \langle b \rangle \times T$ con $|b| = 4$ e $T < \Omega_1(G)$. Da $\Omega_1(G/T) \leqslant \Omega_2(G)/T \leqslant G'/T \simeq \langle b \rangle$ segue, come prima, che è G/T localmente ciclico o $G/T \simeq Q_8$. Ma è $|(G/T)'| = |G'/T| = 4$ sicchè $G/T \not\simeq Q_8$. Pertanto è G/T localmente ciclico, e da $T \leqslant Z(G)$ segue G abeliano, assurdo. È quindi $\exp G' = p$.

Sia ora $x \in G$. Si ha $1 = [x, g]^p = [x^p, g]$ per ogni $g \in G$, il che comporta $|xZ(G)| \leqslant p$; da (3) segue allora $\exp G/G' = p$ e, per (2), $\exp H = p$.

(ii) Si supponga ora $Z(G)$ localmente ciclico, e si denoti con N l'unico sottogruppo normale minimale di G. φ induce un epimorfismo $\vee$-completo $\psi: n(G/N) \to n(H/N^\varphi)$ e, per il Lemma 3 di [7], è $Z(G/N)$ non localmente ciclico.

Se $N^\varphi = H$, H è semplice.

Se $N^\varphi \neq H$ e G/N è abeliano, ψ è iniettivo per 1.1 di [3]. Se G/N non è abeliano, è ancora ψ iniettivo, altrimenti per (i) (3) si avrebbe $Z(G/N) = (G/N)' = G'/N \leqslant Z(G)/N$ e $Z(G/N) = Z(G)/N$ localmente ciclico, un assurdo. Per le ipotesi, φ è non iniettivo; quindi è $N^\varphi = 1$ e $n(H) \simeq n(G/N)$, come volevasi.

In particolare, se G/N è abeliano, si ha $H \simeq G/N$ per il Lemma 6 di [3].

3. Esempi.

Siano H un p-gruppo abeliano elementare finito di ordine p^n $(n > 1)$ e G un p-sottogruppo di Sylow di $SL(3, p^n)$. G è un gruppo ultraspeciale [1] (cfr. [1] e anche [10]); pertanto G' ha ordine p^n, $G' = Z(G)$ ha esponente p e per ogni sottogruppo normale N di G, si ha $N \leqslant G'$ o $N \geqslant G'$. Allora G soddisfa le ipotesi del Teorema B (i) e, essendo $G' \simeq H$, è possibile definire in maniera ovvia un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo $\varphi: n(G) \to n(H)$.

Si supponga ora H un p-gruppo abeliano elementare di cardinalità α. Sia poi P un p-sottogruppo di Sylow di $SL(3, p^n)$ $(n > 1)$ e G il prodotto centrale di α copie di P (con i centri amalgamati).

Ovviamente G soddisfa le ipotesi del Teorema B (i) ed è $G/G' \simeq H$. Pertanto è possibile definire in modo ovvio un epimorfismo $\vee$-completo non iniettivo $\varphi: n(G) \to n(H)$.

[1] Un p-gruppo finito G è detto semiextraspeciale se, per ogni sottogruppo massimale M di $Z(G)$, il gruppo G/M è extraspeciale. Un p-gruppo ultraspeciale è un gruppo semiextraspeciale G con rang $G = 2$ rang G'.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Beisiegel, *Semiextraspezielle p-Gruppen*, Math. Z., **156** (1977), pp. 247-254.

[2] R. Brandl, *On groups with certain lattices of normal subgroups*, Arch. Math., **47** (1986), pp. 6-11.

[3] M. CURZIO, *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani*, Rend. Mat. e Appl., (5) **24** (1965), pp. 1-10.

[4] F. DE GIOVANNI - S. FRANCIOSI, *Alcuni epimorfismi tra reticoli di sottogruppi e reticoli di sottogruppi normali*, Rend. di Matematica, **13** (1980), pp. 531-540.

[5] F. DE GIOVANNI - S. FRANCIOSI, *Alcuni epimorfismi tra reticoli di sottogruppi normali*, Istituto Lombardo (Rend. Sci.), A **116** (1982), pp. 45-53.

[6] H. HEINEKEN, *Über die Charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände*, J. Reine Angew. Math., **220** (1965), pp. 30-36.

[7] P. LONGOBARDI - M. MAJ, *Su di un teorema di Heineken*, Riv. Mat. Univ. Parma, **2** (1976), pp. 315-320.

[8] P. LONGOBARDI - M. MAJ, *On the nilpotence of groups with a certain lattice of normal subgroups*, Proceed. Intern. Group Theory Conference, Bressanone, May 1986, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, in corso di stampa.

[9] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[10] L. VERARDI, *Due sottoclassi di gruppi semiextraspeciali*, Boll. U.M.I., **4** D (1985), pp. 85-121.

[11] L. VERARDI, *Gruppi semiextraspeciali di esponente p*, Ann. Mat. Pura Appl., in corso di stampa.

[12] G. ZACHER, *Sottogruppi normali e r-omomorfismi completi tra gruppi*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **139** (1985), pp. 83-106.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 maggio 1987.