RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO FAINA
GÁBOR KORCHMÁROS

Il sottogruppo generato dalle involuzioni regolari di un B-ovale 2-transitivo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 74 (1985), p. 139-145

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__74__139_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 74 (1985)

Il sottogruppo generato dalle involuzioni regolari di un B-ovale 2-transitivo.

GIORGIO FAINA - GÁBOR KORCHMÁROS (*)

SUMMARY - Let $B = (M, F)$ be a Buekenhout oval (B-oval) of even order with the automorphism group G doubly transitive. Let R be the set of regular involutions of B and let $\langle R \rangle$ denote the subgroup of G generated by R. The purpose of the present paper is to prove that one of the following holds:

(i) $|M| = p^h$, where p is odd prime, and $\langle R \rangle$ is a soluble group,

(ii) $|M| = 2^d + 1$, $\langle R \rangle$ is a 2-transitive simple group on M and either $\langle R \rangle \cong PSL(2, 2^d)$ or $\langle R \rangle \cong Sz(2^a)$, with $2a = d$, or $\langle R \rangle = PSU(3, 2^{2b})$, with $2b = 3d$.

Furthermore, we prove that if $\langle R \rangle$ is a regular normal subgroup of G then either (iii) $|M| = p$, p prime, and G acts on M as $AG(2, p)$ on $GF(p)$, or (iv) $|M| = 9$ and G acts on M as $3^2 \cdot SL(2, 3)$ in its usual doubly transitive representation.

1. Introduzione.

Un B-ovale (od ovale astratto nel senso di Buekenhout) $B = (M, F)$ è un insieme M di oggetti, $|M| \geqslant 3$, detti *punti*, dotato di una famiglia di permutazioni di ordine $\leqslant 2$, dette *involuzioni*, quasi strettamente

(*) Indirizzo degli AA.: G. FAINA: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, Via Vanvitelli 1, 06100 Perugia; G. KORCHMÁROS: Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, Via Nazario Sauro 85, 85100 Potenza.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

2-transitiva, su M, nel senso che per ogni due coppie (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in$ $\in M \times M$, con $a_i \neq b_j$ $(i, j = 1, 2)$, esiste una ed una sola involuzione $f \in F$ tale che $f(a_1) = a_2$ e $f(b_1) = b_2$.

Se $|M| = n + 1$, l'ovale si dice (finito) di ordine n. Se $B = (M, F)$ e $B' = (M', F')$ sono due B-ovali, un *isomorfismo* tra B e B' è una applicazione biunivoca $h: M \to M'$ tale che, per ogni $f \in F$, $h \circ f \circ h^{-1} \in F'$. Un *automorfismo* di un B-ovale B è un isomorfismo di B su sé stesso; una involuzione $f \in F$ si dice *regolare* se è anche un automorfismo di B.

Denotiamo con R l'insieme delle involuzioni regolari di B e con $\langle R \rangle$ il gruppo da esso generato. Un B-ovale $B = (M, F)$ si dice 2-transitivo se il suo gruppo degli automorfismi G è 2-transitivo su M.

Scopo del presente lavoro è di determinare $\langle R \rangle$ per i B-ovali 2-transitivi di ordine pari provando i seguenti Teoremi 1 e 2.

TEOREMA 1. Se $B = (M, F)$ è un B-ovale 2-transitivo di ordine pari, allora $\langle R \rangle$ è di uno dei seguenti tipi:

(i) $|M| = p^h$, con p primo dispari, ed $\langle R \rangle$ è risolubile;

(ii) $|M| = 2^d + 1$, $\langle R \rangle$ è semplice, 2-transitivo su M ed isomorfo ad uno dei seguenti gruppi: (j) $PSL(2, 2^d)$, (jj) $Sz(2^a)$, con $2a = d$, (jjj) $PSU(3, 2^{2b})$, con $2b = 3d$.

TEOREMA 2. Se $B = (M, F)$ è un B-ovale 2-transitivo di ordine pari ed $\langle R \rangle$ è di tipo (i), allora

(i_1) $|M| = p$, con p primo, e G opera su M allo stesso modo di $AG(2, p)$ su $GF(p)$, oppure

(i_2) $|M| = 9$ e G opera su M allo stesso modo di $3^2 \cdot SL(2, 3)$ nella sua usuale rappresentazione 2-transitiva.

Si conoscono esempi riguardanti i casi (j), (jj) ed (i_2); per la relativa descrizione rimandiamo al successivo n. 2. Non si conoscono, invece, esempi riguardanti i casi (i_1) e (jjj).

2. Premesse ed esempi.

Sia $B = (M, F)$ un B-ovale di ordine n. Allora (cfr. [2]):

(1) $|F| = n^2$;

(2) n è dispari se, e soltanto se, ogni involuzione fissa o zero o 2 punti;

(3) n è pari se, e soltanto se, la permutazione identica ε di M appartiene ad F ed ogni altra involuzione possiede uno, ed un solo, punto fisso.

a) B-ovali associati al gruppo lineare $PGL(2, K)$ o B-coniche.

Dato un campo K si consideri il gruppo proiettivo lineare PGL(2, K) nella sua usuale rappresentazione 3-transitiva su $K \cup \{\infty\}$. Gli elementi di ordine 2 di $PGL(2, K)$, con l'eventuale aggiunta dell'identità se K è di caratteristica pari, costituiscono una famiglia F quasi strettamente 2-transitiva su $K \cup \{\infty\}$. Il relativo gruppo $\langle R \rangle$ coincide con $PGL(2, K)$. Tale B-ovale fornisce un esempio per il caso (i) del Teorema 1, anzi (cfr. [6]) esso è l'unico esempio al riguardo.

b) B-ovale di ordine 8 associato al gruppo delle trasvezioni dello spazio vettoriale V di dimensione 2 sopra $GF(3)$.

Tale B-ovale è stato fornito dal primo autore in [4] (cfr. anche [5]).

Si denoti con H il gruppo di tutte le trasvezioni (shears) f_{vt} di V, ove $f_{vt}(x) := v + t(x)$, $v \in V$ e $t \in SL(2, V)$. Per ogni biiezione involutoria φ di V tale che:

(1) $\varphi(v_0) = v_0$, per il vettore nullo $v_0 \in V$;

(2) $\varphi(v) \notin \{\lambda v | \lambda \in GF(3)\}$,

si definisce una famiglia $\Phi = \{h\varphi h^{-1} | h \in H\}$ di involuzioni su V. Denotata con ε' l'applicazione di V in sé che trasforma ogni $v \in V$ nel suo opposto $-v$, la famiglia

$$F = \Phi \cup \{f_{v\varepsilon'} | v \in V\} \cup \{\varepsilon\}$$

è quasi strettamente 2-transitiva su V. Il gruppo G degli automorfismi di tale B-ovale (V, F) coincide con H e pertanto G è 2-transitivo su V e risulta essere il prodotto semidiretto di $SL(2, 3)$ per un gruppo abeliano elementare di ordine 9: $G \cong 3^2 \cdot SL(2, 3)$. Infine, R si riduce all'insieme $\{f_{v\varepsilon'} | v \in V\}$.

c) B-ovali associati ad ovali proiettivi.

Un sottoinsieme di punti Ω di un piano proiettivo π, $|\Omega| \geqslant 3$, si dice *ovale proiettivo* in π se una qualsiasi retta di π interseca Ω in al più

due punti e se per ogni punto x di Ω passa una, ed una sola, retta di π che interseca Ω solo in x. Un ovale proiettivo Ω di un piano proiettivo π possiede una struttura naturale di B-ovale (Ω, F) le cui involuzioni possono essere identificate in modo canonico con i punti di $\pi \setminus \Omega$ nel modo seguente: se $p \in \pi \setminus \Omega$ e $a, b \in \Omega$, l'involuzione j_p associata al punto p permuta a con b se, e soltanto se, p appartiene alla retta per a e b (se $a = b$, allora j_p muta a in sé se, e soltanto se, p appartiene alla tangente ad Ω in a).

Una B-conica è il B-ovale associato ad una conica irriducibile di un piano proiettivo $PG(2, K)$ sopra un campo K. Le B-coniche sono esattamente i B-ovali introdotti in a). Si conoscono ovali proiettivi che non sono coniche e tra essi si trovano quelli introdotti in [7] sul duale del piano di Lüneburg $L(2^{2b})$ di ordine 2^b. Ognuno di questi ultimi ovali, Ω, ammette un gruppo di automorfismi che opera su Ω allo stesso modo di $Sz(2^b)$ nella sua usuale rappresentazione 2-transitiva. Il B-ovale associato ad Ω fornisce un esempio per il caso (jj) del Teorema 1 ed esso è l'unico esempio finora noto al riguardo.

3. Richiami sui gruppi 2-transitivi.

Adotteremo la terminologia usuale e quindi rimandiamo il lettore a [12].

Teorema di Bender [1]. Sia G un gruppo di permutazioni 2-transitivo su un insieme finito M tale che ogni elemento di ordine 2 di G abbia un unico punto fisso su M stesso. Se N è il sottogruppo normale generato da tutti gli elementi di ordine 2 di G, allora si presenta uno dei seguenti casi:

(i) $|M| = p^h$, con p primo, N risolubile;

(ii) $|M| = 2^d + 1$, N è semplice e 2-transitivo su M ed inoltre, è isomorfo con uno dei seguenti tre gruppi: $PSL(2, 2^d)$, $Sz(2^a)$ con $2a = d$, $PSU(3, 2^{2b})$ con $2b = 3d$.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *fortemente immerso* (strongly embedded subgroup) in G se:

(1) il normalizzante di H in G è lo stesso H;

(2) H contiene il centralizzante di ogni suo elemento di ordine 2.

Un insieme I di involuzioni di un gruppo G si dice triangolare (o T-set) se i suoi elementi sono invarianti (per coniugazione) in G e contiene il prodotto di due qualsiasi suoi elementi che commutano tra loro.

TEOREMA DI SHULT [11]. Sia G un gruppo di permutazioni di un insieme M transitivo ed I un T-set di G. Se ogni elemento di I ha un solo punto fisso, allora $G_a \cap \langle I \rangle$ è fortemente immerso in $\langle I \rangle$, per ogni $a \in M$.

4. Dimostrazioni dei Teoremi.

LEMMA 1. Se $B = (M, F)$ è un B-ovale di ordine $n \geqslant 4$ pari, dotato di un gruppo G di automorfismi 2-transitivo, allora $R \neq \emptyset$.

DIM. Per $a \in M$, si denoti con $S_2(G_a)$ il 2-sottogruppo di Sylow dello stabilizzatore G_a di a in G. Poiché $2 \mid |G_a|$, essendo $|M|$ dispari, si ha che $S_2(G_a)$ è non banale. Proviamo che gli elementi di ordine 2 del centro $Z(S_2(G_a))$ sono involuzioni regolari. A tale scopo ricordiamo (cfr. [2]) che gli automorfismi di ordine 2 di un B-ovale di ordine pari possono avere 1 oppure $\sqrt{n} + 1$ punti uniti su M. Poichè G_a è transitivo su M, dal Lemma 15.4 di [10] discende che nessun elemento di ordine 2 appartenente a $Z(S_2(G_a))$ può avere $\sqrt{n} + 1$ punti uniti su M. Ne segue che gli automorfismi di ordine 2 appartenenti a $Z(S_2(G_a))$ hanno un solo punto fisso a. Tale proprietà caratterizza le involuzioni regolari, come provato in [2]. Ne segue l'asserto.

LEMMA 2. Se $B = (M, F)$ è un B-ovale di ordine $n \geqslant 4$ pari con un gruppo di automorfismi G 2-transitivo su M, allora G contiene un T-set formato da involuzioni dotate di un solo punto fisso su M.

DIM. Proviamo che $R' = G \cap R$ è un T-set. In virtù del Lemma 1, R' è non vuoto. Chiaramente R' è un insieme invariante in G, pertanto è sufficiente provare che se $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$, con $r_1, r_2 \in R$ e $r_1 \neq r_2$, allora $r_1 \circ r_2 \in R$.

Tenendo conto dei due risultati di Buekenhout già citati nella dimostrazione del Lemma 1, basta, a tale scopo, verificare che $r_1 \circ r_2$ non può avere $\sqrt{n} + 1$ punti fissi su M. Tale verifica è immediata, considerato che $R \subseteq F$ ed F è quasi strettamente 2-transitiva su M.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Per il Lemma 2, si può applicare il Teorema di Shult riportato nel precedente n. 3. Risulta, allora che, per ogni $a \in M$, $G_a \cap R'$ è un sottogruppo fortemente immerso in $\langle R' \rangle$. Proviamo che l'unica involuzione di $\langle R' \rangle$ con più di un punto fisso su M è l'idendità di M. A tale scopo si consideri $g \in \langle R' \rangle$ tale che $g^2 = \varepsilon$ e $g \in G_a \cap G_b$, con $a, b \in M$ e $a \neq b$. Sia $S_2(G_a)$ un 2-sottogruppo di Sylow di G_a contenente g. Come abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma 1, esiste una involuzione $r \in Z(S_2(G_a)) \cap R'$. Risulta, inoltre, $g \circ r = r \circ g$. Poiché $g \in G_b \cap \langle R' \rangle$ e $G_b \cap \langle R' \rangle$ è un sottogruppo fortemente immerso in $\langle R' \rangle$, ne segue che anche $r \in G_b \cap \cap \langle R' \rangle$, a meno che g sia l'identità di M. L'eventualità che $r \in G_b \cap \cap \langle R' \rangle$ non si verifica, essendo $r \notin G_b$. Possiamo infine applicare il Teorema di Bender, riportato nella sezione 3, e da esso discende senz'altro il Teorema 1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Supponiamo che $B = (M, F)$ sia un B-ovale di ordine $n = 2^m$ con un gruppo di automorfismi G 2-transitivo su M che risulti, inoltre, di tipo (i) nel Teorema di Bender. Si ha allora che $2^m + 1 = p^h$ con p primo. Tale equazione diofantea ammette soluzioni solo se $h = 1$ oppure $h = 2$, $p = 3$, $f = 3$. In [5] è stato provato che esiste un solo B-ovale di ordine 8 il cui gruppo degli automorfismi G è 2-transitivo. Infine, in [4] è stato provato che tale gruppo G è isomorfo a $3^2 \cdot SL(2, 3)$. In tal caso, come è noto [10], G agisce su M allo stesso modo di $AG(2, p)$ su $GF(p)$. Ciò completa la dimostrazione del Teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BENDER, *Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen deren Involutionen keine Fixpunte haben*, Math. Z., **104** (1968), pp. 175-204.

[2] F. BUEKENHOUT, *Etude intrinsèque des ovales*, Rend. Mat., (5), **25** (1966), pp. 333-393.

[3] P. DEMBOWSKI, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[4] G. FAINA, *Un esempio di ovale astratto non proiettivo a tangenti pascaliane il cui gruppo degli automorfismi è risolubile e due volte transitivo*, Rend. Sem. Mat. Brescia, **7** (1982), pp. 289-296.

[5] G. FAINA, *The B-ovals of order $q \leqslant 8$*, J. Comb. Theory, **36**-A (1984), pp. 307-314.

[6] G. FAINA - G. KORCHMÁROS, *Una caratterizzazione del gruppo lineare PGL(2, K) e delle coniche astratte nel senso di Buekenhout*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl., no. 2 (1980), pp. 195-208.

[7] G. KORCHMÁROS, *Le ovali di linea del piano di Lüneburg di ordine 2^{2r} che possono venir mutate in sé da un gruppo di collineazioni isomorfo al gruppo semplice $S(2^r)$ di Suzuki*, Memorie Accad. Naz. Lincei, (8) **15** (1979), pp. 295-315.

[8] G. KORCHMÁROS, *Collineation groups doubly transitive on the points at infinity in an affine plane of order 2^r*, Arch. Math. (Basel), **37** (1981), pp. 572-576.

[9] H. LÜNEBURG, *Die Suzukigruppen und ihre Geometrien*, Lecture Notes in Math., no. 10 (1965).

[10] H. LÜNEBURG, *Translation Planes*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[11] E. SHULT, *Permutation groups with few fixed points*, Nato Advanced Study Inst. Series: Geometry-von Staudt's Points of View, Reidel, Dordrecht, **70** (1980), pp. 275-311.

12] G. ZAPPA, *Fondamenti di teoria dei gruppi*, Cremonese, Roma, 1965, 1970.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 luglio 1984.