RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

U. OLIVERI

Un teorema sui polinomi differenziali omogenei in R^2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 267-270

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__267_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 69 (1983)

Un teorema sui polinomi differenziali omogenei in R^2.

U. OLIVERI (*)

Recentemente G. Bratti, in [1], ha dimostrato il seguente:

TEOREMA. Sia $P = P(D_x, D_y)$ un polinomio differenziale a coefficienti costanti, le proposizioni seguenti sono equivalenti:

(a) per ogni $B \subset R^2$, limitato e convesso, $P(G(B)) = G(B)$ (1);

(b) per ogni $R \subset R^2$, limitato e P-convesso, $P(G(B)) = G(B)$;

(c) P è iperbolico rispetto ad ogni vettore caratteristico.

La dimostrazione fa uso della teoria della dualità fra limiti proiettivi ed induttivi e di teoremi di unicità del tipo 5.3.3. in (2) (pag. 129), ed appare piuttosto complicata.

Scopo di questa nota è di fornire, nel caso di P omogeneo, una dimostrazione semplice, di carattere geometrico, del teorema sopra esposto.

La parte essenziale di questa nota riguarda la deduzione di (b) da (c). Infatti, nel caso di P omogeneo, è facile dimostrare che (a) implica (c) mentre l'implicazione (b) implica (a) è ovvia anche nel caso non omogeneo.

1. Sia $P = P(D_x, D_y)$ un polinomio differenziale omogeneo, a coefficienti costanti, in due variabili. Sia $B \subset R^2$ aperto e convesso tale che: $P(G(B)) = G(B)$. Se P avesse fattori ellittici, $P = RE$, E ellittico,

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo (Italy).

(1) $G(B) = \{f \in C^\infty(R^2) : f_{|B} = 0\}$.

allora avremmo anche $E(G(B)) = G(B)$. Se $x \in R^2 \sim B^-$ e se V è un intorno di x, con $B \cap V = \emptyset$, poichè $C_c^\infty(V) \subset G(B)$, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(V)$ esisterebbe $u \in G(B)$ tale che $Eu = \varphi$. Allora: u è analitica su $R^2 \sim$ $\sim (\text{supp}\,(\varphi))$, cioè $u \in C_c^\infty(V)$ ed ancora $E(C_c^\infty(V)) = C_c^\infty(V)$. Ciò è assurdo visto che ${}^tE = \mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(V)$ non può essere iniettiva. Ne viene dunque che (a) implica (c).

2. Dimostrazione di (c) implica (b) nel caso P omogeneo.

Se vale la (c) P deve essere del tipo $\prod_{k=1}^{N} (D_x - a_k D_y)$ con $a_k \in R$. Basterà dimostrare (b) quando P è del tipo $D_x - aD_y$, $a \in R$, anzi si può supporre direttamente che sia $P(D_x, D_y) = D_x$ mediante una rotazione del piano in sè.

Sia B un aperto di R^2, D_x-convesso; se si dimostra che: fissato $(x_0, y_0) \in B$ esiste una spezzata s, a lati paralleli agli assi coordinati, tale che:

(i) $(x_0, y_0) \in s$;

(ii) se $(x_1, y_1) \in B$ e se (x_2, y_1) è la proiezione orizzontale di (x_1, y_1) su s, il segmento $((x_1, y_1), (x_2, y_1))$ è contenuto in B;

(iii) la proiezione orizzontale di s copre R, posto, per ogni $(x, y) \in R^2$

$$g(x, y) = \int_{s'} f\, ds' + \int_{s''} f\, ds''$$

dove: $(\bar{x}, y)$ è la proiezione orizzontale di (x, y) su s

s' è la spezzata contenuta in s, che congiunge (x_0, y_0)

e $(\bar{x}, y)$ orientata da (x_0, y_0) a $(\bar{x}, y)$

s'' è il segmento $[(\bar{x}, y), (x, y)]$;

avremo allora che:

(i') se $f \in G(B)$ per le proprietà (i) ed (ii): $g \in G(B)$;

(ii') g risolve l'equazione $D_x g = f$.

3. Costituzione dalla spezzata s.

Siano r una retta parallela all'asse delle x e $\Gamma(r)$ il connesso che essa intercetta su B (2). Con $t(x, y)$ ed $r(x, y)$ denoteremo le rette per (x, y) parallele rispettivamente all'asse y ed all'asse x. Se $(x, y) \in B$ con $\beta(x, y)$ ed $\alpha(x, y)$ intenderemo, rispettivamente, l'estremo superiore e l'estremo inferiore del più grande degli intervalli aperti di $t(x, y)$, contenenti (x, y), tutti fatti di punti di B.

Se la retta $r(x, \beta(x, y))$ contiene punti di B li contiene da una sola banda rispetto ad $(x, \beta(x, y))$. Sia $(x_0, y_0) \in B$, $(x_0, y_0) \in r(x, \beta(x, y))$ esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che $(x, \beta(x, y) - \varepsilon)$, $(x, y_0 - \varepsilon) \in B$ con $\beta(x, y) - \varepsilon = y_0 - \varepsilon$. Per la spezzata $\big((x, y), (x, \beta(x, y) - \varepsilon)\big) \cup \big((x, \beta(x, y) - \varepsilon), (x, y_0 - \varepsilon)\big) \subset B$ e per la parte di aperto delimitata dalle rette $r(x, y)$ ed $r(x, y_0 - \varepsilon)$ sono verificate le (i) e le (ii). Per $\beta(x, y)$ ed $\alpha(x, y)$ sono possibili le eventualità:

$$\beta(\Gamma) = \sup \{(x, y) : (x, y) \in \Gamma(r)\} = + \infty \tag{1}$$

$$\beta(\Gamma) < + \infty \tag{2}$$

$$\alpha(\Gamma) = \inf \{(x, y) : (x, y) \in \Gamma(r)\} = - \infty \tag{3}$$

$$\alpha(\Gamma) > - \infty . \tag{4}$$

Consideriamo il caso (1) allora:

$$\exists \quad (x_1, y_1) \in \Gamma(r) : \beta(x_1, y_1) = + \infty \tag{a_1}$$

in questo caso ogni punto di B sul semipiano superiore delimitato dalla retta r è collegato alla retta $t(x_1, y_1)$ mediante un intervallo parallelo all'asse delle x tutto fatto di punti di B. In caso contrario B sarebbe tagliato in due intervalli distinti da una parallela all'asse delle x. Ricordiamo che tutti i punti della retta $t(x_1, y_1)$ che stanno sul semipiano superiore rispetto ad r sono punti di B.

$$\nexists \quad (x, y) \in \Gamma(r) : \beta(x, y) = + \infty \tag{b_1}$$

esiste allora una successione $(x_n, y) \in \Gamma(r)$ per ogni n e $\beta(x_n, y) \uparrow + \infty$. Se consideriamo la retta r_n (la parallela per $(x_n, \beta(x_n, y))$ all'asse x essa è incontrata da $t(x_{n+1}, y)$ contenendo quindi un intervallo tutto

(2) Cfr. [2], pag. 89, th. 3.7.2.

contenuto in B. Se (x, y) è un punto di B che sta sul semipiano superiore rispetto alla retta r esiste certamente (x_n, y) tale che $\beta(x_n y) > y$ e quindi (x, y) appartiene alla fascia determinata da r ed $r(x_n, y)$.

$$(a_2) \qquad \exists \quad (x_1, y_1) \in \Gamma(r) : \beta(x_1, y_1) = \beta(\Gamma)$$

consideriamo la retta $r\big(x_1, \beta(x_1, y_1)\big) = r_1$. Se r_1 contiene punti di B operiamo su $\Gamma(r_1)$ lo stesso procedimento adoperato per $\Gamma(r)$. Se r_1 non contiene punti di B significa che al disopra di r_1 non vi sono punti di B altrimenti B non sarebbe connesso.

Sia s la spezzata ottenuta con la tecnica sopra esposta. Supponiamo che esista (x, y) di B non appartenente alla fascia $F(s)$ determinata dalla spezzata. Se $(x, y) \notin F(s)$ non vi appartiene con tutto un intorno. Infatti se $I(x, y) \cap F(s) \neq \emptyset$ potremmo prolungare s sino ad includere (x, y). Quindi $A = \{(x, y) : (x, y) \notin F(s)\}$ e $B \cap F(s)$ sono aperti e disgiunti contro l'ipotesi di connessione di B.

$$(b_2) \qquad \nexists \quad (x, y) \in \Gamma(r) : \beta(x, y) = \beta(\Gamma)$$

esiste allora una successione $(x_n, y) \in \Gamma(r)$ tale che $\beta(x_n, y) \uparrow \beta(\Gamma)$. Poniamo $r\big(x_n, (x_n, y)\big) = r_n$. Consideriamo $\beta(\Gamma_n)\big(\Gamma_n = \Gamma(r_n)\big)$ e supponiamo che per ogni $n\beta(\Gamma_n) \leqq \beta(\Gamma)$. Si verifica allora che la spezzata costruita per mezzo della successione (x_n, y) va bene per tutti i punti di B al disopra della retta r. Se $(x, y) \in B$ ed un suo intorno intercetta $r\big(0, \beta(\Gamma)\big)$ allora deve esistere n tale che $\beta(\Gamma_n) > \beta(\Gamma)$, in questo caso procediamo su Γ_n come prima. Per la spezzata s così ottenuta possiamo ripetere il ragionamento fatto in precedenza.

In maniera analoga si opera per il semipiano al disotto della retta r.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bratti, *Problema di Cauchy semiglobale in due variabili*, in stampa presso Rend. Sem. Mat. di Padova.

[2] L. Hormander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 maggio 1982.