RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO VISTOLI

Incollamento di punti chiusi e gruppo fondamentale algebrico e topologico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 243-256

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__243_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1983)

Incollamento di punti chiusi e gruppo fondamentale algebrico e topologico.

ANGELO VISTOLI (*)

Introduzione.

Nel primo volume del « Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie » è enunciato un risultato interessante, che permette di confrontare il gruppo fondamentale algebrico di due schemi X ed Y, quando vi sia un morfismo suriettivo da X ad Y che abbia un numero finito di fibre con più di un punto geometrico (vedi [5], IX, 5.4).

Tuttavia tale risultato è dato come conseguenza di teoremi estremamente generali di teoria della discesa, e la dimostrazione non è svolta.

In questo lavoro ci proponiamo di chiarire con metodi elementari cosa accada nel caso in cui X sia una varietà algebrica o uno spazio topologico che soddisfi opportune ipotesi locali, assai deboli, e Y sia ottenuto da X tramite incollamento di punti. Nel caso algebrico è anche necessario chiarire la nozione di incollamento (vedi I.1 e I.2).

Nella prima parte del lavoro si confrontano le categorie dei rivestimenti di X e di Y, quando Y sia ottenuto incollando $p + 1$ punti distinti di X, che può essere una varietà algebrica, nel qual caso si considerano i rivestimenti étale finiti (vedi I.5), o uno spazio topologico (vedi (I.6).

I risultati e le tecniche sono analoghi: in entrambi i casi il punto chiave è la nozione di incollamento di funtori da una categoria data alla categoria degli insiemi (vedi I.3). Si dimostra infatti che la cate-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Geometria, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna.

goria dei rivestimenti di Y è equivalente alla categoria che si ottiene incollando i funtori fibra relativi ai $p+1$ punti dati di X.

Nella seconda parte questo risultato viene applicato al calcolo del gruppo fondamentale. Nel caso topologico si prova, sotto ipotesi non molto restrittive, che $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X) * L_p$, dove L_p è il gruppo libero su p generatori e « $*$ » indica il prodotto libero (vedi II.2).

Un risultato analogo vale anche nel caso algebrico, con qualche piccola complicazione dovuta al fatto che, per sua natura, il gruppo fondamentale algebrico è un gruppo topologico. In questo caso $\pi_1^{alg}(Y) \simeq (\pi_1^{alg}(X) * L_p)^\wedge$, dove con « $\wedge$ » indichiamo il completamento rispetto ad una topologia canonica che si può imporre. Utilizzando infine un teorema di Grothendieck, dimostrato mediante la teoria della discesa, ma che appare assai arduo da provare con mezzi elementari, diamo un enunciato assai simile a [5], IX, 5.4.

Questo lavoro è stato ricavato dalla tesi di laurea discussa dall'autore presso l'Università di Bologna nel luglio 1981.

1. Rivestimenti étale.

Fissiamo una volta per tutte un campo algebricamente chiuso k. Intenderemo per *varietà algebrica*, o più brevemente *varietà*, uno schema su k ridotto e localmente di tipo finito. Una *curva* sarà una varietà di dimensione uno.

I.1. DEFINIZIONE. Siano X, Y due varietà, $f\colon X \to Y$ un morfismo, $x_0, \ldots, x_p$ $p+1$ punti chiusi distinti di X. Diciamo che Y *è ottenuta incollando* $x_0, \ldots, x_p$, e che f è un *incollamento* di $x_0, \ldots, x_p$ su X, se

(i) $f(x_0) = \ldots = f(x_p)$

(ii) f è universale rispetto alla (i): vale a dire, se $g\colon X \to Z$ è è un altro morfismo di varietà con $g(x_0) = \ldots = g(x_p)$, allora esiste un'unico morfismo $h\colon Y \to Z$ tale che $g = h \circ f$.

Fissati $X, x_0, \ldots, x_p$, se un'incollamento esiste è certamente unico, meno di isomorfismi.

Una condizione che un « buon » incollamento dovrebbe ovviamente soddisfare è quella di essere finito. Ma se f è finito esiste un aperto affine di X che contiene $x_0, \ldots, x_p$. Questo è anche sufficiente per l'esistenza di un incollamento soddisfacente. Infatti:

I.2. PROPOSIZIONE. Sia X una varietà, $x_0, \ldots, x_p$ punti chiusi di X contenuti in un aperto affine. Allora l'incollamento $f\colon X \to Y$ esiste, è finito ed è anche un incollamento topologico. Posto $y_0 = f(x_0) = \ldots = f(x_p)$, si ha che al di fuori di y_0 f è un isomorfismo. Inoltre l'essere un incollamento è una proprietà locale su Y, nel senso che, dato un ricoprimento aperto $\{Y_i\}$ di Y, $f\colon X \to Y$ è un incollamento se e solo se per ogni i la restrizione di $f\colon f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ è un incollamento di $x_0, \ldots, x_p$ se Y_i contiene y_0, e un isomorfismo altrimenti.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col supporre X affine; $X = \operatorname{Spec} A$, dove A è una k-algebra finitamente generata e ridotta. Gli x_i saranno ideali massimali di A. Poniamo $K = (A/x_0) \times \ldots \times (A/x_p)$, $B = A \times_K k$ il prodotto fibrato, dove il morfismo $k \to K$ è la diagonale. Indicando con $a(x_i)$ l'immagine di $a \in A$ in $A/x_i = k$, $B = \{a \in A\colon a(x_0) = \ldots = a(x_p)\}$. Sia infine $f\colon X \to Y = \operatorname{Spec} B$ il morfismo corrispondente all'immersione di B in A.

Mostriamo che f è un incollamento. Sia $g\colon X \to Z$ un morfismo di varietà tale che $g(x_0) = \ldots = g(x_p) = z_0$.

Occorre definire $h\colon Y \to Z$ con $g = h \circ f$. Se Z è affine, h si definisce in modo immediato. Se Z non è affine, prendiamo un aperto affine V che contenga z_0. Prendiamo $u \in A$ tale che ristretto a $X - g^{-1}(V)$ sia nullo, e che $u(x_0) = \ldots = u(x_p) = 1$. $u \in B$, e, tenuto conto che un diagramma cartesiano di algebre rimane tale per cambiamenti di base piatti ([2], 4.2), si ha che il quadrato seguente

$$\begin{array}{ccc} B_u & \to & A_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \to & K \end{array}$$

è cartesiano. Posto $U = \operatorname{Spec} A_u \subseteq X$, $U' = \operatorname{Spec} B_u \subseteq Y$, U' sarà un incollamento di $x_0, \ldots, x_p$ su U, ed è ora facile definire h, prima su U' e poi su tutto Y.

f è allora un incollamento. Che sia finita e sia un isomorfismo al di fuori di $x_0, \ldots, x_p$ è quanto dimostrato in [6], teorema 1. Inoltre Y ha la topologia quoziente, dal momento che f è finita, e quindi chiusa.

Se ora X non è affine, si può effettuare l'incollamento su un aperto affine che contenga $x_0, \ldots, x_p$, ed estenderlo in maniera naturale.

Le affermazioni restanti sono facilmente verificabili.

Introduciamo ora la terminologia appropriata per lo studio dei rivestimenti di varietà ottenute per incollamento.

I.3. DEFINIZIONE. Sia $\mathscr{C}$ una categoria, $F_0, \ldots, F_p$ funtori da $\mathscr{C}$ alla categoria degli insiemi. La *categoria ottenuta incollando* $F_0, \ldots, F_p$ è la categoria $\mathscr{C}'$ i cui oggetti sono sequenze del tipo $(D, r_1, \ldots, r_p)$, dove D è un oggetto di $\mathscr{C}$ e r_j è una biiezione da $F_0 D$ a $F_j D$, e in cui un morfismo h da $(D, r_1, \ldots, r_p)$ a $(D', r_1', \ldots, r_p')$ è un morfismo $h: D \to D'$ in $\mathscr{C}$ tale che $(F_j h) r_j = r_j'(F_0 h)$.

I.4. OSSERVAZIONE. Nella definizione sopra è implicita la scelta di un funtore F_0 privilegiato; ma tale scelta non è in realtà significativa, nel senso che partendo da uno qualsiasi degli F_j le categorie che si ottengono sono sempre equivalenti. La definizione si può anche dare in modo più elegante, ma anche più scomodo, prendendo come oggetti sequenze del tipo $(D, A, r_0, \ldots, r_p)$, dove D è un oggetto di $\mathscr{C}$, A è un insieme e le r_j sono biiezioni da A ad $F_j D$, e come morfismi quelli definiti in maniera naturale.

La terminologia usata è spiegata dal seguente

I.5. TEOREMA. Sia X una varietà algebrica, $x_0, \ldots, x_p$ $p+1$ punti chiusi distinti di X contenuti in un aperto affine. Sia $f: X \to Y$ l'incollamento degli x_j, $F_0, \ldots, F_p$ i funtori fibra su $\mathscr{Et}(X)$, la categoria dei rivestimenti étale di X, relativi ad $x_0, \ldots, x_p$. $\mathscr{Et}(Y)$ è equivalente alla categoria $\mathscr{C}$ ottenuta incollando gli F_j su $\mathscr{Et}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo un funtore φ da $\mathscr{C}$ ed $\mathscr{Et}(Y)$. Sia $(D, r_1, \ldots, r_p)$ un oggetto di $\mathscr{C}$. Incolliamo ogni punto d dalla fibra di x_0 con i punti $r_j(d)$, per $j = 1, \ldots, p$. Otterremo una varietà E attraverso la quale potremo fattorizzare $f \circ p$, dove p è la proiezione canonica di D su X, come nel diagramma che segue

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{F} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

La funzione sugli oggetti di $\mathscr{C}$ associa a $(D, r_1, \ldots, r_p)$ proprio $E \xrightarrow{q} Y$. Dobbiamo quindi far vedere che si tratta di un rivestimento étale. Al di fuori della fibra di y_0, F è un isomorfismo, e perciò, se U è un aperto affine di Y che non contiene y_0, $q^{-1}(U)$ è isomorfo a $F^{-1}(q^{-1}(U)) = p^{-1}(f^{-1}(U))$, che è affine. Se invece U contiene y_0, $q^{-1}(U)$ è ottenuto incollando i soliti punti in modo opportuno su $p^{-1}(f^{-1}(U))$, ed è ancora

affine. Consideriamo la successione di algebre

$$\mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{q_U} \mathcal{O}_E(q^{-1}(U)) \xrightarrow{F_U} \mathcal{O}_D\big(F^{-1}(q^{-1}(U))\big) = \mathcal{O}_D\big(p^{-1}(f^{-1}(U))\big) .$$

$\mathcal{O}_D\big(p^{-1}(f^{-1}(U))\big)$ sarà finito su $\mathcal{O}_Y(U)$, e, dal momento che F_U è iniettivo e $\mathcal{O}_Y(U)$ noetheriano, anche $\mathcal{O}_E(q^{-1}(U))$ è finito su $\mathcal{O}_Y(U)$. Se ne conclude che q è un morfismo finito. È anche étale in ogni punto diverso da y_0. Per mostrare che lo è anche in y_0 si può supporre che la varietà che intervengono siano affini. Sia allora $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$. Posto $K = (A/x_0) \times \ldots \times (A/x_p)$, è $B = A \times_K k$ e $y_0 = x_0 \cap \ldots \cap x_p$, considerando i punti come ideali ([6], lemma 5).

Abbiamo così il solito diagramma cartesiano

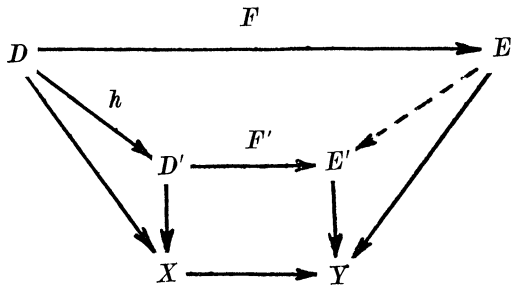
$$\begin{array}{ccc} B & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \to & K \end{array}$$

Indicando con $\hat{R}$ il completamento di un anello semilocale R rispetto al radicale, sappiamo che il morfismo canonico $B \to \hat{B}_{y_0}$ è piatto. Siccome l'essere un quadrato cartesiano è una proprietà che si conserva per cambiamenti di base piatti ([2], 4.2), otteniamo un diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \hat{B}_{y_0} & \to & \hat{A}_{y_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \to & K \end{array}$$

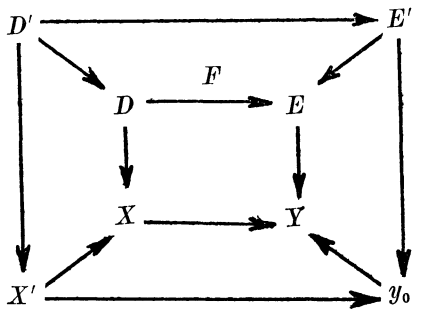
Ma $\hat{A}_{y_0}$ è un anello semilocale completo, che si decompone perciò nel prodotto dei suoi localizzati: $\hat{A}_{y_0} = \hat{A}_{x_0} \times \ldots \times \hat{A}_{x_p}$. In definitiva, $\hat{O}_{Y,y_0}$ proviene dall'incollamento dei massimali di $\hat{O}_{X,x_0} \times \ldots \times \hat{O}_{X,x_p}$. Sia ora d_0 un punto della fibra di x_0 in D, e sia $d_j = r_j(d_0)$, per $j = 1, \ldots, p$. Detta e_0 l'immagine di d_0 in E, il discorso fatto si può ripetere, e possiamo affermare che $\hat{O}_{E,e_0}$ è ottenuto incollando i massimali di $\hat{O}_{D,d_0} \times \times \ldots \times \hat{O}_{D,d_p}$. Ma D è étale su X, e quindi $\hat{O}_{D,d_j} = \hat{O}_{X,x_j}$ per ogni j. Perciò $\hat{O}_{E,e_0} = \hat{O}_{Y,y_0}$, e q sarà étale in e_0. $E \xrightarrow{q} Y$ è effettivamente un rivestimento étale, e la funzione sugli oggetti di $\mathcal{C}$ è ben definita. È facile ora trovare l'applicazione sui morfismi: se E ed E' sono i rivestimenti di Y costruiti come sopra a partire da due oggetti $(D, r_1, \ldots, r_p)$ e $(D', r_1', \ldots, r_p')$, e $h\colon D \to D'$ è un morfismo con $(F_j h) r_j = r_j'(F_0 h)$

allora nel diagramma sotto



esiste un'unica freccia tratteggiata che lo rende commutativo, per le proprietà degli incollamenti. Associando ad h proprio questa freccia completiamo la definizione di φ. Definiamo adesso un funtore inverso ψ. Sia $E \xrightarrow{q} Y$ un rivestimento étale, $D = E \times_Y X$ il prodotto fibrato, X' la fibra di y_0 in X, E' la fibra in E e D' l'unione delle fibre in D degli x_j.

Tracciamo il diagramma



Il quadrato esterno, ricavato da quello interno mediante il cambiamento di gase $y_0 \to Y$, è ancora cartesiano, e, visto che E' è unione disgiunta di copie di y_0, D' sarà unione disgiunta di copie di $X' = \{x_0, \ldots, x_p\}$. Ne segue che per ogni d_0 in $F_0 D$ esistono $d_1, \ldots, d_p$ in $F_1 D, \ldots, F_p D$, univocamente determinati, tali che $F(d_0) = \ldots = F(d_p)$. Ponendo $r_j(d_0) = d_j$ definiamo una funzione r_j da $F_0 D$ ad $F_j D$. Ripetendo il ragionamento con x_j al posto di x_0 otteniamo una funzione da $F_j D$ ad $F_0 D$ che si vede subito essere l'inversa di r_j. Questa sarà

allora una biiezione, e l'applicazione sugli oggetti di ψ manderà E in $(D, r_1, \ldots, r_p)$.

Se $g\colon E \to E'$ è un morfismo di rivestimenti di Y, e $(D, r_1, \ldots, r_p)$, $(D', r'_1, \ldots, r'_p)$ sono gli oggetti di $\mathscr{C}$ associati ad E, E' rispettivamente, allora g si solleva ad un morfismo $h\colon D \to D'$, che si verifica facilmente essere un morfismo di $\mathscr{C}$. Mandando g in h completiamo la definizione di ψ.

Dimostriamo che φ e ψ sono inverse. Sia $(D, r_1, \ldots, r_p)$ un oggetto di $\mathscr{C}$, E il rivestimento di Y associato, $(D', r'_1, \ldots, r'_p) = \psi E$. Allora la proprietà universale del prodotto fibrato ci dà un morfismo $h\colon D \to D'$, che verifica le condizioni per essere un morfismo in $\mathscr{C}$. Inoltre al di fuori della fibra di y_0, E coincide con D e con D', e perciò h, che è essa stessa un rivestimento, dovrà essere un isomorfismo.

Questa costruzione definisce una trasformazione naturale: in conclusione, $\psi \circ \varphi$ è equivalente all'identità.

Sia ora E un oggetto di $\mathscr{Et}(Y)$, $D = E \times_Y X$, $E' = (\varphi \circ \psi)E$. E' si ottiene incollando punti di D, e si ricava un diagramma

$$\begin{array}{ccccc} D & \to & E' & \to & E \\ \downarrow & & & \searrow\ \swarrow & \\ X & & \longrightarrow & & Y \end{array}$$

Come prima si dimostra che il morfismo $E' \to E$ è un isomorfismo, e che $\varphi \circ \psi$ è equivalente all'identità. Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Un enunciato praticamente identico vale nel caso in cui X è uno spazio topologico, e si considerano i rivestimenti topologici (anche infiniti):

I.6. Teorema. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, $x_0, \ldots, x_p$ punti di X, Y lo spazio che si ottiene identificandoli ad un punto solo, $\mathscr{Riv}(X)$ la categoria dei rivestimenti di X, $F_0, \ldots, F_p$ i funtori fibra relativi ad $x_0, \ldots, x_p$ rispettivamente. $\mathscr{Riv}(Y)$ è equivalente alla categoria ottenuta incollando gli F_j su $\mathscr{Riv}(X)$.

Dimostrazione. Si definisce un funtore φ in maniera formalmente identica a quella di I.5. Che l'applicazione sugli oggetti sia ben definita è molto più facile da vedere, grazie al fatto che i rivestimenti topologici sono localmente banali; il resto è del tutto lo stesso che in I.5.

2. Gruppo fondamentale.

Applichiamo i risultati ottenuti nel precedente paragrafo al calcolo del gruppo fondamentale di spazi topologici e varietà algebriche attenute tramite incollamento.

Ricordiamo che uno spazio topologico di Hausdorff X, connesso e localmente connesso per archi è detto semi-localmente semplicemente connesso se ogni suo punto x ammette un intorno U tale che ogni cappio in U di base x sia omotopo a zero in X.

Chiameremo un tale spazio topologico uno spazio *buono*.

Gli spazi buoni sono quelli in cui i legami tra rivestimenti e gruppo fondamentale sono più stretti. Essi sono infatti quelli che ammettono un rivestimento universale semplicementete connesso, il cui gruppo di automorfismi è isomorfo — non canonicamente — al gruppo fondamentale. Inoltre, sia X uno spazio buono, x un suo punto, $G = \pi_1(X, x)$. Indichiamo con $\mathscr{A}(G)$ la categoria degli insiemi su di cui G agisce a destra. Sia F il funtore fibra relativo al punto x: F può essere considerato come un funtore da $\mathscr{Riv}(X)$ ad $\mathscr{A}(G)$, e stabilisce un'equivalenza di categorie ([1], IX, 6.1, 6.2 e 6.3).

II.1. Lemma. Siano G, H due gruppi tali che $\mathscr{A}(G)$ ed $\mathscr{A}(H)$ siano equivalenti. Allora G è isomorfo ad H.

Dimostrazione. Indichiamo con G' il gruppo G stesso, considerato come oggetto di $\mathscr{A}(G)$ tramite la moltiplicazione a destra. G' è il più grande oggetto connesso di $\mathscr{A}(G)$, nel senso che l'azione di G è transitiva su G' ed esso domina ogni altro oggetto con la stessa proprietà. Il gruppo degli automorfismi di G' è proprio G, che si può perciò ricavare partendo da $\mathscr{A}(G)$. Quindi, se $\mathscr{A}(G)$ è equivalente ad $\mathscr{A}(H)$ G ed H dovranno essere isomorfi.

Dati due gruppi G ed H, indichiamo con $G * H$ il loro prodotto libero. Sia inoltre L_p il gruppo libero su p generatori, se p è un naturale.

II.2. Teorema. Sia X uno spazio buono, $x_0, \ldots, x_p$, $p+1$ punti distinti di X, $f\colon X \to Y$ il loro incollamento. Supponiamo che anche Y sia buono. Allora $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X) * L_p$.

Dimostrazione. Sia $G = \pi_1(X)$, $H = G * L_p$. Per il lemma, basta mostrare che $\mathscr{Riv}(Y)$ è equivalente ad $\mathscr{A}(H)$. Siano $F_0, \ldots, F_p$ funtori fibra su $x_0, \ldots, x_p$, $\mathscr{C}$ la categoria che si ottiene incollandoli. Sia $\overline{X}$ il rivestimento universale di X. Per ogni $j = 0, \ldots, p$ fissiamo $\overline{x}_j \in F_j\overline{X}$.

Consideriamo la trasformazione naturale Hom $(\bar{X}, -) \to F_j$ definita da $h \mapsto h(\bar{x}_j)$; per le ben note proprietà del rivestimento universale essa è un'equivalenza. Perciò tutti gli F_j sono naturalmente equivalenti tra di loro, anche se in maniera non canonica. Sia t_j un'equivalenza di funtori da F_j a F_0. Per ogni oggetto D di $\mathscr{R}iv(X)$, $t_j(D)$: $F_jD \to F_0D$ è una biezione.

Definiamo ora una categoria $\mathscr{C}'$ i cui oggetti sono sequenze del tipo $(A, s_1, \ldots, s_p)$, dove A è un oggetto di $\mathscr{A}(G)$ e $s_1, \ldots, s_p$ sono biezioni di A, e in cui un morfismo da $(A, s_1, \ldots, s_p)$ ad $(A', s'_1, \ldots, s'_p)$ è un morfismo h: $A \to A'$ in $\mathscr{A}(G)$ tale che $hs_j = s'_j h$ per tutti i j.

Sappiamo da I.8 che $\mathscr{R}iv(Y)$ è equivalente a $\mathscr{C}$. Mostriamo che $\mathscr{C}$ è equivalente a $\mathscr{C}'$. Prendiamo un oggetto $(D, r_1, \ldots, r_p)$ di $\mathscr{C}$. Sia $A = F_0D$, $s_j = t_j(D) \circ r_j$.

$(A, s_1, \ldots, s_p)$ è un oggetto di $\mathscr{C}'$. Definiamo così la funzione sugli oggetti di un funtore, che manderà poi un morfismo h in F_0h. È facile vedere che è ben definito, e anche si tratta di un'equivalenza di categorie.

Resta solo da far vedere che $\mathscr{C}'$ è equivalente ad $\mathscr{A}(H)$. Indichiamo con $S(A)$ il gruppo delle biezioni di un insieme A, scritte a destra: cioè, se $a \in A$ ed $u \in S(A)$, il valore di u in a si scrive au, e uv è definita da $a(uv) = (au)v$, in modo opposto al solito. Un'azione a destra di G su A induce un morfismo $G \to S(A)$. Sia ora $(A, s_1, \ldots, s_p)$ un oggetto di $\mathscr{C}'$, e siano $e_1, \ldots, e_p$ i generatori canonici di L_p. Estendiamo il morfismo $G \to S(A)$ che ci dà l'azione su A di G ad un morfismo $H \to S(A)$ mandando e_j in s_j. Questa posizione fornisce un funtore da $\mathscr{C}'$ ad $\mathscr{A}(H)$ che si verifica essere un'equivalenza di categorie.

II.3. Osservazione. L'ipotesi che X sia buono non assicura che anche Y lo sia. Un controesempio è sostanzialmente contenuto in [8], cap. 2, sez. 5, 18. L'implicazione è invece valida se X verifica ipotesi locali opportune, per esempio, se è localmente semplicemente connesso e ogni punto che si incolla possiede un intorno contraibile con una contrazione che lascia il punto fisso. Questo vale per esempio quando X è una varietà topologica.

Un'ulteriore applicazione è possibile: si può considerare il caso in in cui i punti che si incollano provengono da componenti connesse diverse.

II.4. Teorema. Siano $X_0, \ldots, X_p$ spazi buoni disgiunti, $G_0, \ldots, G_p$ i loro rispettivi gruppi fondamentali, e sia $x_j \in X_j$ per ogni j tra 1 e p, Y lo spazio ottenuto identificando gli x_j. Se Y è buono, allora $\pi_1(Y) \simeq$ $\simeq G_0 * \ldots * G_p$.

DIMOSTRAZIONE. Sia X l'unione disgiunta degli X_j, $H = G_0 * \ldots * G_p$. $\mathscr{R}iv(X)$ è equivalente a $\mathscr{R}iv(X_0) \times \ldots \times \mathscr{R}iv(X_p)$; cioè, un oggetto di $\mathscr{R}iv(X)$ può essere visto come una sequenza $(D_0, \ldots, D_p)$, dove D_j è un oggetto di $\mathscr{R}iv(X_j)$. $\mathscr{R}iv(X)$ è perciò equivalente ad $\mathscr{A}(G_0) \times \ldots \times \mathscr{A}(G_p)$. Come funtori fibra si possono assumere $F_0, \ldots, F_p$, definiti da $F_j(A_0, \ldots, A_p) = A_j$. Incollando $F_0, \ldots, F_p$ otterremo una categoria $\mathscr{C}$, che dobbiamo mostrare essere equivalente ad $\mathscr{A}(H)$. Un oggetto di $\mathscr{C}$ è del tipo $(A_0, \ldots, A_p, r_1, \ldots, r_p)$ dove r_j è una biiezione da A_0 ad A_j: Un morfismo da $(A_0, \ldots, A_p, r_1, \ldots, r_p)$ ad $(A'_0, \ldots, A'_p, r'_1, \ldots, r'_p)$ è una sequenza $(h_0, \ldots, h_p)$, dove h_j va da A_j ad A'_j, e $h_j = r'_j h_0$: $r_j: A_0 \to A_j$ è una biezione e induce perciò un morfismo di gruppi $S(A_j) \to S(A_0)$ mediante la legge $s \mapsto r_j^{-1} s r_j$. Componendo $G_j \to S(A_j) \to S(A_0)$ si fa agire G_j su A_0, e, se $a \in A$ e $g \in G_j$, $ag = r_j^{-1}((r_j a)g)$. I vari morfismi $G_j \to S(A_0)$ così costruiti ne inducono uno $H \to S(A_0)$, vale a dire, un'azione di H su A_0, che diviene un oggetto di $\mathscr{A}(H)$. Se h è un morfismo in $\mathscr{C}$ da $(A_0, \ldots, A_p, r_1, \ldots, r_p)$ ad $(A'_0, \ldots, A'_p, r'_1, \ldots, r'_p)$, allora

$$h_0(ag) = h_0\left(r_j^{-1}((r_j a)g)\right) = r_j'^{-1}\left(h_j((r_j a)g)\right) =$$

$$= r_j'^{-1}\left((h_j(r_j a))g\right) = r_j'^{-1}\left((r'_j(h_0 a))g\right) = (h_0 a)g\,,$$

e quindi h_0 è un morfismo in $\mathscr{A}(H)$. Associando A_0 ad $(A_0, \ldots, A_p, r_1, \ldots, r_p)$ ed h_0 a $(h_0, \ldots, h_p)$ ricaviamo un funtore φ da $\mathscr{C}$ ad $\mathscr{A}(H)$. Un funtore inverso ψ è definito da $\psi A = (A, \ldots, A, 1, \ldots, 1)$, dove con 1 indichiamo l'identità. $\varphi \circ \psi$ è il funtore identico, mentre un'equivalenza naturale da $\psi \circ \varphi$ all'identità è data da

$$(1, r_1, \ldots, r_p): (A_0, \ldots, A_0, 1, \ldots, 1) \to (A_0, \ldots, A_p, r_1, \ldots, r_p)\,.$$

Entrambi i teoremi ora dimostrati hanno un analogo nel caso delle varietà algebriche. Cominciamo con qualche richiamo concernente i gruppi profiniti e le categorie galoisiane (vedi, ad esempio, [7], cap. 1. per quanto riguarda i gruppi, mentre per le categorie galoisiane il riferimento standard è [5], V).

Sia G un gruppo topologico. Diciamo che la sua topologia è profinita se ammette una base di intorni dell'unità costituita da sottogruppi normali di indice finito. G è detto profinito se è limite proiettivo di gruppi finiti discreti. Ciò equivale a dire che ha una topologia profinita rispetto alla quale è completo.

Se G è un gruppo con una topologia profinita, il suo completamento è profinito.

Tra tutte le topologie profinite di cui un gruppo può essere dotato ve ne è una massima, in cui una base di intorni dell'unità è data da tutti i sottogruppi di indice finito.

D'ora in poi tutti i gruppi che considereremo saranno dotati di una topologia profinita. Il completamento sarà indicato mediante la sovrapposizione di un accento circonflesso « ^ ».

II.5. PROPOSIZIONE. Siano G, H due gruppi con una topologia profinita. Il loro prodotto libero $G * H$ ammette un'unica topologia profinita tale che le immersioni $G \to G * H$ e $H \to G * H$ risultino continue, e che, se L è un gruppo finito discreto a $G \to L$, $H \to L$ sono morfismi continui, il morfismo indotto $G * H \to L$ risulti continuo.

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo come base di intorni dell'unità in $G * H$ la famiglia dei sottogruppi S di indice finito tali che $S \cap G$ sia aperto in G e $S \cap H$ lo sia in H. Questo ci dà la topologia cercata. L'unicità è evidente.

La cosa si estende immediatamente ad un prodotto libero di un numero finito qualunque di gruppi. Considereremo sempre un coprodotto topologizzato in questo modo.

Sia A un insieme finito su di cui agisce a destra il gruppo G. Diremo che l'azione di G è continua su A se, dotando A della topologia discreta, l'applicazione $A \times G \to A$ risulta continua, o, equivalentemente, se è continuo il corrispondente morfismo $G \to S(A)$, dove $S(A)$ è il gruppo delle biezioni di A scritte a destra, con la topologia discreta. Indichiamo con $\mathscr{AC}(G)$ la categoria degli insiemi finiti su di cui G agisce con continuità.

Sia ora $\mathscr{C}$ una categoria galoisiana, F un suo funtore fondamentale. Esiste un unico gruppo profinito G che agisce a destra su ogni insieme FD, dove D è un oggetto di $\mathscr{C}$, in modo tale da rendere F un'equivalenza di categorie da $\mathscr{C}$ ad $\mathscr{AC}(G)$. Tale gruppo è detto il gruppo fondamentale di $\mathscr{C}$.

Se X è una varietà algebrica connessa e x un suo punto chiuso, allora la categoria $\mathscr{Et}(x)$ dei rivestimenti étale di X è una categoria galoisiana, ed F, il funtore fibra sul punto x, è un funtore fondamentale. Il gruppo fondamentale di $\mathscr{Et}(X)$ è allora, per definizione, il gruppo fondamentale algebrico di X; lo indicheremo con $\pi_1^{\text{alg}}(X, x)$, o, ignorando il punto x, con $\pi_1^{\text{alg}}(X)$.

II.6. LEMMA. Siano G, H due gruppi con una topologia profinita. $\mathscr{AC}(G)$ è equivalente ad $\mathscr{AC}(H)$ se e solo se $\hat{G}$ è isomorfo ad $\hat{H}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia A un oggetto di $\mathscr{AC}(G)$. Per la proprietà universale del completamento, il morfismo continuo $G \to S(A)$ si estende a $\hat{G} \to S(A)$, cioè, l'azione di G induce un'azione di $\hat{G}$. Servendosi di questo fatto è facile mostrare che $\mathscr{AC}(G)$ è equivalente ad $\mathscr{AC}(\hat{G})$. Se d'altra parte $\mathscr{AC}(\hat{G})$ ed $\mathscr{AC}(\hat{H})$ sono equivalenti, i loro gruppi fondamentali $\hat{G}$ ed $\hat{H}$ dovranno essere isomorfi.

II.7. TEOREMA. Sia $\mathscr{C}$ una categoria galoisiana con gruppo fondamentale G, e siano $F_0, \ldots, F_p$ $p+1$ funtori fondamentali. Sia $\mathscr{C}'$ la categoria che si ottiene incollandoli. $\mathscr{C}'$ è galoisiana, ed ha come gruppo fondamentale $(G * L_p)\hat{}$, dove L_p è il gruppo libero su p generatori, considerato con la sua massima topologia profinita.

DIMOSTRAZIONE. Per II.6, basta far vedere che $\mathscr{C}'$ è equivalente ad $\mathscr{AC}(G * L_p)$. $F_0, \ldots, F_p$ sono tutti naturalmente equivalenti ([5], V, 5.7). La dimostrazione procede allora come quella di II.2, tenendo presente la proprietà universale della topologia che abbiamo imposto a $G * L_p$.

Da I.5 e II.7 segue allora:

II.8 COROLLARIO. Sia X una varietà algebrica connessa, $x_0, \ldots, x_p$ $p+1$ punti chiusi distinti di X contenuti in un aperto affine, $f\colon X \to Y$ il loro incollamento. Allora $\pi_1^{\mathrm{alg}}(Y) \simeq (\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) * L_p)\hat{}$.

Passiamo ora alla versione algebrica di II.4.

II.9. DEFINIZIONE. Siano $\mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_p$ categorie, F_j un funtore da $\mathscr{C}_j$ alla categoria degli insiemi, per $j = 0, \ldots, p$. Poniamo $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \times \ldots \times \mathscr{C}_p$, $F'_j(D_0, \ldots, D_p) = F_j D_j$. La categoria che si ottiene incollando gli F'_j su $\mathscr{C}$ sarà detta *ottenuta identificando* $F_0, \ldots, F_p$.

II.10 TEOREMA. Siano $\mathscr{C}_0, \ldots, \mathscr{C}_p$ categorie galoisiane con gruppo fondamentale $G_0, \ldots, G_p$, rispettivamente. Sia F_j un funtore fondamentale di $\mathscr{C}_j$, per $j = 0, \ldots, p$. Identificando gli F_j otteniamo una categoria $\mathscr{C}'$ galoisiana con gruppo fondamentale $(G_0 * \ldots * G_p)\hat{}$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che $\mathscr{C}'$ è equivalente ad $\mathscr{AC}(G_0 * \ldots * G_p)$. Si procede come in II.4.

II.11. COROLLARIO. Siano $X_0, \ldots, X_p$ varietà algebriche connesse disgiunte, x_j un punto chiuso di X_j, per $j = 0, \ldots, p$. Sia X la varietà

che si ottiene incollando gli x_j sulla unione disgiunta degli X_j. Allora

$$\pi_1^{alg}(X) \simeq (\pi_1^{alg}(X_0) * \ldots * \pi_1^{alg}(X_p))^\wedge .$$

Utilizzando un risultato dimostrato da Grothendieck mediante la teoria della discesa è possibile generalizzare II.8.

Se $f: X \to Y$ è un morfismo finito di varietà algebriche e y è un punto di Y, indichiamo con $p(y)$ la cardinalità di $f^{-1}(y)$.

II.12. TEOREMA. Sia $f: X \to Y$ un morfismo finito di varietà tale che $p(y) > 1$ per un numero finito di $y \in Y$. Se X ed Y sono connesse, allora, posto $p = \sum_{y \in Y} (p(y) - 1)$, si ha che $\pi_1^{alg}(H) \simeq (\pi_1^{alg}(X) * L_p)^\wedge$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con X' la varietà che si ottiene incollando tutti i punti di X che vengono identificati da f. X' è in realtà la seminormalizzazione di Y in X (per quanto riguarda la seminormalizzazione, vedi [2] oppure [9]; che X' sia proprio la seminormalizzazione si vede confrontando [6], teorema 1, con [8], 2.1). f si può fattorizzare in $X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{u} Y$. u è un morfismo finito e biettivo, e perciò è un omeomorfismo. Se V è una sottovarietà irriducibile di X', V sarà birazionalmente equivalente alla sua immagine in Y, e perciò u induce un isomorfismo dei campi residui. Segue allora da [5], IX, 4.10, che u induce un'equivalenza tra le categorie degli schemi étale su X' ed Y. È così sufficiente dimostrare che se E è uno schema étale su Y tale che $D = E \times_Y X'$ sia finito su X', allora E è finito su Y. Si può supporre Y, e quindi anche X' e D, affini. Il morfismo $D \to E$ è proprio e suriettivo: ne segue, per un teorema di Chevalley ([4], II, 6.7.1) che anche E è affine. Che E sia finito su Y si può dimostrare come all'inizio della dimostrazione di I.5.

u induce quindi un isomorfismo continuo tra $\pi_1^{alg}(H)$ e $\pi_1^{alg}X')$. Il teorema segue allora facilmente per induzione da II.8.

Il teorema si può in particolare applicare quando Y è una curva algebrica e X è la sua normalizzazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. GODBILLON, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[2] S. GRECO - C. TRAVERSO, *On seminormal schemes*, Comp. Math., **40** (1980), pp. 325-365.

[3] A. GROTENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique*, ch. I, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[4] A. GROTHENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique*, ch. II et IV, Publ. Math. I.H.E.S., Paris, 1961.
[5] A. GROTENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lect. Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[6] C. PEDRINI, *Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **48** (1973), pp. 39-66.
[7] S. SHATZ, *Profinite Groups, Arithmetics and Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1961.
[8] E. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[9] C. TRAVERSO, *Seminormality and Picard group*,, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **24** (1970), pp. 585-595.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 marzo 1982.