RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

F. KÜMMICH
H. SCHEERER

Sottogruppi topologicamente quasi-normali dei gruppi localmente compatti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 195-210

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__195_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 69 (1983)

Sottogruppi topologicamente quasi-normali dei gruppi localmente compatti.

F. KÜMMICH - H. SCHEERER (*)

0. Introduzione.

Sia G un gruppo topologico e Q un sottogruppo chiuso. Diremo che Q è topologicamente quasi-normale (abbreviando un sottogruppo *tqn*), se per ogni sottogruppo chiuso A di G la chiusura degli insiemi AQ e QA è uguale, cioè $\overline{AQ} = \overline{QA}$. Condizione equivalente: l'insieme $\overline{AQ}$ (o $\overline{QA}$) è un sottogruppo per ogni sottogruppo chiuso A di G.

Tale nozione fu introdotta ed analizzata nei lavori [10], [11]. Ricordiamo, da [11], che un sottogruppo *tqn* compatto connesso è normale. Anche ogni sottogruppo *tqn* connesso di un gruppo localmente compatto G con un gruppo quoziente G/G_0 compatto è normale (dove G_0 è la componente connessa dell'elemento identico di G).

L'intenzione del presente lavoro è quella di dimostrare due teoremi che si collegano alla seguente definizione:

0.1. DEFINIZIONE. (*a*) Diremo che un gruppo topologico G è esponenziale, se G è $\bigcup_{\varphi} \mathrm{im}\,(\varphi)$, dove φ percorre l'insieme degli omomorfismi continui $\mathbf{R} \to G$.

(*b*) Se Q è un sottogruppo di G, indichiamo con $[Q]$ il sottogruppo topologicamente generato da $\bigcup_{\psi} \mathrm{im}\,(\psi)$, dove ψ percorre l'insieme degli omomorfismi continui $\mathbf{R} \to G$, tali che il gruppo $\psi^{-1}(Q)$ non è triviale.

0.2. TEOREMA. Sia G un gruppo localmente compatto connesso e sia Q un sottogruppo *tqn* di G con $Q \subset [Q]$. Allora Q è normale.

(*) Indirizzo degli AA.: Mathematisches Institut, Freie Univ. Berlin, Arnimallee 2-6, D-1000 Berlin 33 (Germ. Occ.).

0.3. Teorema. Sia G localmente compatto connesso e ogni quoziente di Lie del radicale di G sia esponenziale. Allora ogni sottogruppo *tqn* di G è normale.

0.4. Congettura. Ogni sottogruppo *tqn* di un gruppo localmente compatto connesso è normale.

Oltre ai due teoremi dimostreremo nelle pagine seguenti che la congettura è vera nel caso del rivestimento universale $\tilde{E}$ del gruppo dei movimenti del piano euclideo. (Il gruppo $\tilde{E}$ non è esponenziale.) Però è possibile generalizzare questo risultato:

0.5. Osservazione. La congettura vale nel caso di un gruppo di Lie semplicemente connesso, che contenga un sottogruppo di Lie normale abeliano A di codimensione 1 ed un elemento centrale non contenuto in A. (Sulla struttura di questi gruppi vedasi ad esempio [3], III, § 9, Exercice 21.)

La dimostrazione dell'esempio $\tilde{E}$ è interessante, forse per la ragione seguente: Da una parte, nei teoremi 0.1 e 0.2 si possono trovare in numero sufficiente sottogruppi A con AQ chiusi, per dimostrare la normalità del sottogruppo *tqn* Q; d'altra parte dobbiamo osservare nell'esempio del gruppo $\tilde{E}$ ancora dei sottogruppi chiusi A con $AQ \neq \overline{QA}$.

Dopo preparazioni generali nelle sezioni 1 e 2 otterremo il teorema 0.2 nel caso di gruppi di Lie alla fine della sezione 2. La sezione 3 conterrà la dimostrazione di teorema 0.3 per un gruppo di Lie; questa sarà completata nella sezione 4 nella dimostrazione dei due teoremi. Nella sezione 5 sarà dimostrato, che ogni sottogruppo *tqn* di $\tilde{E}$ è normale.

Salvo affermazione contraria, si supporrà che gli omomorfismi sono contenuti e i sottogruppi sono chiusi. Dato un sottogruppo Q di G, indichiamo con $N(Q)$ il normalizzante di Q in G e con $Z(G)$ il centro di G. La notazione $Q \lhd G$ esprimerà la normalità di Q in G. Il prodotto semi-diretto di H e N (con N normale) sarà indicato $N \times_s H$.

1. Osservazioni generali sui sottogruppi *tqn*.

Dapprima osserviamo il semplice fatto seguente:

1.1. Lemma. Sia G un gruppo topologico e siano A, B sottoinsiemi di G. Allora vale $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $m: G\times G \to G$ la moltiplicazione del gruppo. La continuità di m implica la relazione

$$\overline{A}\cdot\overline{B} = m(\overline{A}\times\overline{B}) = m(\overline{A\times B}) \subset \overline{m(A\times B)} = \overline{A\cdot B}\,,$$

quindi anche $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} \subset \overline{A\cdot B}$. Tenendo conto di $A\cdot B \subset \overline{A}\cdot\overline{B}$, otteniamo $\overline{A\cdot B} \subset \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$, cioè $\overline{A\cdot B} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$.

1.2. LEMMA. Sia $f: G \to H$ un morfismo suriettivo e Q un sottogruppo *tqn* di G. Allora $\overline{f(Q)}$ è un sottogruppo *tqn* di H.

DIMOSTRAZIONE. Sia $B \subset H$ un sottogruppo chiuso. Allora $\overline{f^{-1}(B\cdot Q)}$ è un sottogruppo di G, di conseguenza $\overline{f(f^{-1}(B)\cdot Q)}$ e $\overline{f(\overline{f^{-1}(B)\cdot Q})}$ sono sottogruppi di H. Essendo $\overline{f(f^{-1}(B)\cdot Q)} \subset \overline{B\cdot f(Q)} = B\cdot\overline{f(Q)} \subset \overline{f(f^{-1}(B)\cdot Q)}$ possiamo concludere che $\overline{B\cdot f(Q)} = \overline{f(f^{-1}(B)\cdot Q)}$ è un sottogruppo di H.

Ricordiamo la nozione seguente ([4], III, 2.8):

1.3. DEFINIZIONE. Un omomorfismo $f: G \to H$ è un morfismo stretto, se f è continuo e se la corestrizione $f': G \to f(G)$ è aperta.

1.4. LEMMA. Sia $f: G \to H$ un morfismo stretto con nucleo K e sia $f(G)$ chiuso. Se $M \subset G$ è un sottoinsieme invariante per l'azione di K, cioè $K\cdot M \subset M$, allora vale la relazione $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

DIMOSTRAZIONE. (Vedasi [4], I, 5.3). Dalla continuità di f segue che $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ per ogni sottoinsieme $M \subset G$. Poichè $f(G)$ è chiuso, $f(\overline{M})$ è contenuto in $f(G)$. L'insieme $f'^{-1}f(\overline{M}) = K\cdot\overline{M} = \overline{M}$ è chiuso, perchè anche $\overline{M}$ è invariante per l'azione di K. L'omomorfismo f' essendo una identificazione $f(\overline{M})$ è chiuso in $f(G)$ e anche in H, da cui la conclusione $f(\overline{M}) \supset \overline{f(M)}$.

Notiamo il caso particolare seguente:

1.5. OSSERVAZIONE. Se A è un sottogruppo chiuso di G che contiene il nucleo di f, allora $f(A)$ è chiuso.

1.6. LEMMA. Sia $f: G \to H$ un morfismo stretto e suriettivo e Q un sottogruppo *tqn* di H. Allora $f^{-1}(Q)$ è un sottogruppo *tqn* di G.

DIMOSTRAZIONE. Sia A un sottogruppo di G.

$$\overline{A\cdot f^{-1}(Q)} = f^{-1}\overline{f(A\cdot f^{-1}(Q))} = f^{-1}\overline{(f(A)\cdot Q)}$$

è un sottogruppo di G. La prima ugualianza risulta dalla suriettività di f, la seconda da 1.4. Dunque $f^{-1}(Q)$ è un sottogruppo *tqn* di G.

1.7. LEMMA. Se Q_1, Q_2 sono sottogruppi *tqn* di G, allora anche $\overline{Q_1 Q_2}$ è un sottogruppo *tqn* di G.

DIMOSTRAZIONE. L'asserzione risulta immediatamente da Lemma 1.1.

1.8. LEMMA. Sia Q un sottogruppo *tqn* di G di indice finito. Allora Q è un sottogruppo di composizione di G. In particolare un sottogruppo *tqn* di indice primo è normale.

DIMOSTRAZIONE. (Vedasi [13] nel caso discreto). Basta dimostrare la normalità di un sottogruppo *tqn* massimale di indice finito. Sia Q un tale sottogruppo e $g \in G$. Allora $Q \cdot g \cdot Q \cdot g^{-1}$ è un unione finita di classi laterali di Q e dunque è chiuso. A causa di 1.7, $Q \cdot g \cdot Q \cdot g^{-1}$ è un sottogruppo *tqn* di G, che contiene Q. Se fosse $Q \cdot g \cdot Q \cdot g^{-1} \neq Q$, sarebbe $QgQg^{-1} = G$ ed esisterebbero $q, q' \in Q$ con $qgq'g^{-1} = g^{-1}$; ne risulterebbe $g \in Q$, il che è un assurdo.

1.9. DEFINIZIONE. Sia G un gruppo topologico.

(*a*) Un elemento $z \in G$ è un $\mathbb{Z}$-elemento, se vale $\overline{\langle z \rangle} \cong \mathbb{Z}$.

(*b*) Un elemento $z \in G$ è un $\mathbb{Z}$-elemento riguardo a Q, se z è un $\mathbb{Z}$-elemento, $\langle z \rangle \cdot Q$ è chiuso e $\langle z \rangle \cap Q = \{1\}$.

1.10. TEOREMA. Sia G localmente compatto, Q un sottogruppo *tqn* di G e $z \in G$ un $\mathbb{Z}$-elemento riguardo a Q. Allora z è contenuto nel normalizzante di Q.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $Q \times \mathbb{Z} \to Q\langle z \rangle$, $(q, n) \mapsto q \cdot z^n$, è un omeomorfismo; poichè $Q\langle z \rangle$ è uno spazio localmente compatto e quindi uno spazio di Baire, perciò uno degli sottoinsiemi Qz^n di $Q\langle z \rangle$ ha un punto interno (rispetto a $Q\langle z \rangle$). Poichè l'azione di Q su ogni insieme Qz^n è transitiva e $\langle z \rangle$ permuta gli insiemi transitivamente, tutti gli insiemi Qz^n sono aperti e chiusi in $Q\langle z \rangle$. Quindi ogni z^n è anche un $\mathbb{Z}$-elemento riguardo a Q.

Seguiremo adesso una dimostrazione di Stonehewer [14] nel caso dei gruppi discreti.

Sia p un numero primo. Il gruppo $Q\langle z^p \rangle$ è chiuso e di indice p in $H := Q\langle z \rangle$. Sia $X = X(p)$ il massimo sottogruppo chiuso normale di H

contenuto in $Q\langle z^p\rangle$. L'azione di H/X su $H/Q\langle z^p\rangle$ è effettiva, quindi l'ordine di H/X è un divisore di $p!$; e poichè $Q\langle z^p\rangle$ è di indice p in H, $Q\langle z^p\rangle/X$ è un p'-sottogruppo di H/X. Per il lemma 1.7 $\overline{QX}$ è un sottogruppo *tqn* di H, per il lemma 1.2 $\overline{QX}/X$ è un sottogruppo quasi-normale del gruppo finito H/X e dunque un sottogruppo di composizione di H/X per il lemma 1.8. Poichè $\overline{QX}/X$ non contiene un sottogruppo normale non-triviale di H/X, il gruppo $\overline{QX}/X$ è nilpotente secondo [8]. Il gruppo H/X, essendo un prodotto di $\overline{QX}/X$ con un gruppo ciclico, è risolvibile (vedasi [7], S. 674). In un gruppo finito risolvibile vale un teorema di Sylow generalizzato (vedasi [7], S. 660). È facile convincersi (vedasi l'osservazione 1.11) che la chiusura normale $(\overline{QX}/X)^{H/X}$ di $\overline{QX}/X$ in H/X è un p'-sottogruppo di H/X. Quindi essa è contenuta in ogni p'-sottogruppo di Hall di H/X, in particolare in $Q\langle z^p\rangle/X$; poichè $Q\langle z^p\rangle/X$ non contiene un sottogruppo normale non-triviale di H/X, vale la relazione $(\overline{QX}/X)^{H/X} = \{1\}$ e per conseguenza $Q \subset X$.

Ponendo $N := \bigcap_p X(p)$, vale $Q \subset N \subset \bigcap_p Q\langle z^p\rangle = Q$, cioè Q è normale in $Q\langle z\rangle$.

1.11. Osservazione. Se H è un p'-sottogruppo di composizione di un gruppo finito G, allora la chiusura normale H^G di H in G è un p'-sottogruppo.

Dimostrazione. (Vedasi [17]). Dapprima sia $H \lhd K \lhd G$. Allora $H^G = H_1 \dots H_r$ con $H_i = g_i H g_i^{-1}$, dove $\{g_i\}$ è un sistema di rappresentanti dell'insieme G/K delle classi laterali. Dunque H^G è un p'-sottogruppo. Se vale $H \lhd \dots \lhd K \lhd G$ e H^K è un p'-sottogruppo di G, dunque risulta, che $(H^K)^G = H^G$ è un p'-sottogruppo di G. Procedendo per induzione risulta l'asserzione.

2. Preparazioni della dimostrazione dei teoremi.

2.1. Lemma. Se G è un gruppo topologico e Q un sottogruppo *tqn* di G, allora $[Q]$ (vedasi 0.1) è contenuto nel normalizzante di Q.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, se $\varphi\colon \mathbb{R} \to G$ è un omomorfismo tale che $\varphi^{-1}(Q)$ non sia triviale, l'immagine $\varphi(\mathbb{R})$ normalizza il gruppo Q. Questo è banale se $\varphi(\mathbb{R}) \subset Q$; sia dunque $\varphi^{-1}(Q) = \langle t_0\rangle$ con $t_0 \neq 0$. Sia p un numero primo e $z := \varphi(t_0/p)$. Allora $Q\langle z\rangle$ è chiuso (poichè è l'unione di un numero finito di classi laterali di Q)

e Q ha l'indice p in $Q\langle z\rangle$. Essendo un sottogruppo *tqn* di $Q\langle z\rangle$ massimale Q è normale in $Q\langle z\rangle$ tenendo conto del lemma 1.8. È ovvio che $\varphi(\mathbb{R})$ è topologicamente generato da tali elementi; di conseguenza $\varphi(\mathbb{R})$, ed anche $[Q]$, sono contenuti in $N(Q)$.

2.2. DEFINIZIONE. Diremo che il gruppo G è generato da tori, se G è topologicamente generato da tutti i suoi sottotori.

2.3. COROLLARIO. Se G è generato da tori, allora ogni sottogruppo *tqn* di G è normale.

2.4. OSSERVAZIONE. Ogni gruppo di Lie semi-semplice è il rivestimento di un gruppo di Lie generato da tori. Infatti, il rivestimento universale $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ di $SL(2,\mathbb{R})$ è — a meno di isomorfismi — l'unico gruppo di Lie quasi-semplice senza sottogruppi compatti non-triviali (vedasi [15]).

2.5. DEFINIZIONE. Diremo che un sottogruppo H di un gruppo topologico G è compattamente centrato, se tutti i sottogruppi compatti di G sono contenuti in H.

2.6. LEMMA. Sia G un gruppo di Lie connesso e H un sottogruppo connesso chiuso e compattamente centrato. Allora o vale $H = G$ oppure esistono omomorfismi $\varphi_i\colon \mathbb{R} \to G$, $i = 1, \ldots, r$ con $r \geqslant 1$ tali che l'applicazione

$$\mathbb{R}^r \times H \to G\,, \qquad (t_1, \ldots, t_r) \mapsto \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_r(t_r) \cdot h\,,$$

sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione rispetto alla dimensione di G. L'asserzione è banale se $\dim(G) \leqslant 1$. Sia dunque G un gruppo di Lie connesso tale che l'asserzione sia vera per tutti i gruppi di Lie connessi di una dimensione minore.

Basta dimostrare l'asserzione per i sottogruppi connessi chiusi massimali H di G. Giacchè, H non essendo massimale possiamo scegliere un sottogruppo connesso chiuso massimale H' tale che $H \subset H' \subsetneq G$ e tale che l'asserzione sia vera per H' col sottogruppo H tenendo conto della premessa d'induzione; allora, se l'asserzione vale per G col sottogruppo H', essa vale anche per G col sottogruppo H.

Sia dunque H un sottogruppo connesso chiuso massimale di G.

Dapprima supponiamo che esista un sottogruppo normale con-

nesso non-triviale N di G contenuto in H. Si considera la proiezione $\pi: G \to G/N$. Per l'osservazione 1.5 $\pi(H)$ è un sottogruppo chiuso che è compattamente centrato tenendo conto di [9], Lemma 3.15. La premessa d'induzione implica l'esistenza di omomorfismi $\psi_i: \mathbb{R} \to G/N$, $i = 1, \ldots, s$, tali che

$$\mathbb{R}^s \times \pi(H) \to G/N\,, \qquad (t_1, \ldots, t_s, \bar{h}) \mapsto \psi_1(t_1) \ldots \psi_s(t_s) \cdot \bar{h}$$

sia un diffeomorfismo. Si sceglie omomorfismi $\varphi_i: \mathbb{R} \to G$ con $\pi \cdot \varphi_i = \psi_i$. Da un argomento classico (vedasi [9], p. 532, oppure [5], p. 22-16) discende che

$$\mathbb{R}^s \times H \to G\,, \qquad (t_1, \ldots, t_s, h) \mapsto \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_s(t_s) \cdot h\,,$$

è un diffeomorfismo.

Supponiamo ora che H non contiene un sottogruppo normale connesso non-triviale di G. In particolare, allora G non ha un sottogruppo compatto C non-triviale, perchè, essendo compattamente centrato H conterrebbe la chiusura normale di C in G. Risulta da [9], lemma 3.14, che G è dunque semplicemente connesso.

Inoltre ogni sottogruppo di Lie connesso K di G è chiuso: Per [6], p. 192, K è chiuso, se e solo se la chiusura di ogni sottogruppo ad un parametro di K è contenuto in K. Ma se un sottogruppo ad un parametro non è chiuso, la sua chiusura è un toro ([6], p. 191). Poichè G non ha un sottogruppo compatto non-triviale, ogni sottogruppo ad un parametro di G è chiuso.

Ne segue che l'algebra di Lie h di H è una sotto-algebra massimale dell'algebra di Lie g di G, perchè H è anzi massimale fra tutti i sottogruppi di Lie connessi (eventualmente non chiusi).

Infine resta da discutere i due casi seguenti:

(a) Il radicale r di g non è triviale.

Allora r contiene un ideale abeliano non-triviale a di g. Poichè h non contiene un ideale di g, vale $a \not\subset h$, e h essendo massimale vale la relazione $a + h = g$. Dalla commutatività di a risulta che $a \cap h$ è un ideale di g e quindi è $\{0\}$. Dunque g è un prodotto semi-diretto di a e h, rispettivamente $G = A \times_s H$, dove A è il sottogruppo di Lie di G connesso coll'algebra a, perchè G è semplicemente connesso. Ne risulta l'asserzione per G col sottogruppo H.

(b) Il radicale r è triviale.

Allora G è isomorfo ad un prodotto $S_1 \times \ldots \times S_r$, dove $S_i = \widetilde{SL(2, R)}$; basta supponere l'uguaglianza

$$G = S_1 \times \ldots \times S_r .$$

In primo luogo sia $G = \widetilde{SL(2, R)}$. Un sottogruppo di Lie connesso massimale di $\widetilde{SL(2, R)}$ ha la dimensione 1 o 2. Si verifica immediatamente che quelli della dimensione 1 sono tutti coniugati e sono situati sopra i tori di $SL(2, \mathbb{R})$ e che i sottogruppi della dimensione 2 sono anche tutti coniugati e sono situati sopra i coniugati del sottogruppo dei matrici triangolari superiori di $SL(2, \mathbb{R})$. Se A è un sottogruppo connesso massimale della dimensione 1 e B un sottogruppo della dimensione 2, la decomposizione d'Iwasawa implica, che $A \times B \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, è un diffeomorfismo. Risulta l'asserzione.

Infine procediamo per induzione rispetto al numero r dei fattori $\widetilde{SL(2, R)}$ di G. Sia G un prodotto diretto di $(r + 1)$ fattori $\widetilde{SL(2, R)}$ e supponiamo che l'asserzione sia dimostrata per tutti i prodotti di un numero minore di fattori.

Sia $R(H)$ il radicale di H e $L(H)$ un sottogruppo di Levi di H. Ovviamente $L(H)$ o è triviale o è isomorfo ad un prodotto di copie di $\widetilde{SL(2, R)}$. Se $R(H)$ non è triviale, allora esiste un fattore diretto $S_i = \widetilde{SL(2, R)}$ di G con $\pi_i(H)$ non-triviale risolvibile, dove $\pi_i : G \to S_i$ è la proiezione. In particolare vale $\pi_i(H) \neq S_i$; poichè H è massimale, vale $H = S_1 \times \ldots \times \pi_i(H) \times \ldots \times S_{r+1}$ con $\pi_i(H)$ massimale; quindi l'asserzione risulta dalla premessa d'induzione.

Se $R(H)$ è triviale, otteniamo un isomorfismo $H \cong S_1' \times \ldots \times S_t'$ con $S_i' = \widetilde{SL(2, R)}$. Poichè H non contiene sottogruppi normali non-triviali, esistono un fattore di H-supponiamo che questo sia S_1' — e almeno due fattori di G — supponiamo che questi siano S_1 e S_2 — tali che $\pi_1(S_1') = S_1$ e $\pi_2(S_1') = S_2$. Ne risulta l'inclusione

$$S_2' \times \ldots \times S_t' \subset S_3 \times \ldots \times S_{r+1} .$$

Dalla massimalità di H segue $H = S_1' \times S_3 \times \ldots \times S_{r+1}$, dove S_1' è diagonale in $S_1 \times S_2$. Adesso $S_1 \times H \to G$, $(x, h) \mapsto x \cdot h$, è un diffeomorfismo, e l'asserzione discende da una decomposizione d'Iwasawa di S_1.

2.7. Proposizione. Se G è un gruppo di Lie connesso e Q un sottogruppo *tqn* di G contenuto in $[Q]$, allora Q è normale.

DIMOSTRAZIONE. Per 2.1 lemma $[Q]$ è contenuto in $N(Q)$. Un sottogruppo compatto massimale di G è connesso ([6], p. 181) e dunque e generato da tori ([6], p. 151). Ciò, per definizione $[Q]$ contiene tutti i sottogruppi compatti di G, lemma 2.6 s'applica con $H := [Q]$. L'applicazione $\varphi_i: \mathbb{R} \to G$ essendo uno degli omomorfismi di 2.6 ogni elemento non-triviale $z \in \varphi_i(\mathbb{R})$ è un $\mathbf{Z}$-elemento di G riguardo a Q. Tenendo conto di lemma 2.6 G è topologicamente generato da $[Q]$ e dai $\mathbf{Z}$-elementi di G riguardo a Q; dunque dalla proposizione 1.10 risulta l'asserzione.

3. Dimostrazione del teorema 2 nel caso dei gruppi di Lie.

Sia G un gruppo di Lie connesso il cui radicale R sia esponenziale, e sia $Q \subset G$ un sottogruppo *tqn*. Sia L un sottogruppo di Levi di G e $l: \tilde{L} \to L$ un rivestimento universale.

Sia $G' := R \times_s \tilde{L}$ e $f: G' \to G$, $(r, x) \mapsto r \cdot l(x)$, l'omomorfismo ovvio. Poichè f è un rivestimento, per lemma 1.6 $f^{-1}(Q)$ è un sottogruppo *tqn* di G'. Basta dunque dimostrare che $f^{-1}(Q)$ sia normale in G'. Però vogliamo supporre nel seguito che già vale $G = R \times_s L$ con L semplicemente connesso.

Sia $Q_0 = R_0 L_0$ dove R_0 è il radicale di Q_0 e L_0 un sottogruppo di Levi di Q_0. Da [2], § 6, segue che è possibile di scegliere un sottogruppo di Levi L^* di G con $L_0 \subset L^*$. Nel seguito vogliamo supporre chè L sia già scelto così.

3.1. ASSERZIONE. Mediante la proiezione $\pi: R \times_s L \to L$ il gruppo Q è applicato su un sottogruppo normale chiuso di L.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $L \cong S \times L'$ dove S è il prodotto di tutti i fattori di L isomorfi a $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$. L'operazione di S su R si fattorizza mediante l'omomorfismo canonico

$$\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times \ldots \times \widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \to SL(2, \mathbb{R}) \times \ldots \times SL(2, \mathbb{R}) ;$$

questo fatto si trova in [15], I.10 e II. Sia K il nucleo di quest'omomorfismo; tenendo conto delle inclusioni $K \subset S \subset G$ consideriamo K come sottogruppo di G; operando trivialemente su R il gruppo K è contenuto nel centro di G. Passando al quoziente per K si ottiene omo-

morfismi $r: L \to \bar{L}$ e $q: R \times_s L \to R \times_s \bar{L}$ tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} R \times_s L & \xrightarrow{\pi} & L \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ R \times_s \bar{L} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{L} \end{array}$$

sia commutativo, dove la proiezione su $\bar{L}$ si denota per $\bar{\pi}$.

Per lemma 1.2 $\overline{q(Q)}$ è un sottogruppo *tqn* di $R \times_s \bar{L}$. Essendo generato da tori (vedi l'osservazione 2.4) $\bar{L}$ è contenuto in $N(\overline{q(Q)})$, cioè $\bar{\pi}(\overline{q(Q)}) \lhd \bar{L}$. Se $H \subset R \times_s L$ è un sottogruppo contenendo K, allora vale $\pi(H) = r^{-1}\bar{\pi}q(H)$. Adesso $q^{-1}\overline{q(Q)} = \overline{QK}$ è un tale sottogruppo, dunque $\pi(\overline{QK}) = r^{-1}\bar{\pi}q(q^{-1}\overline{q(Q)}) = r^{-1}\bar{\pi}(\overline{q(Q)})$ è normale in L. È ovvio che Q è normale in $\overline{QK}$, dunque $\pi(Q) \lhd \pi(\overline{QK}) \lhd L$. Infine l'asserzione segue dal Lemma seguente:

3.2. Lemma. Sia L un gruppo di Lie semi-semplice connesso. Se Q è un sottogruppo di composizione astratto del gruppo astratto L, allora Q è chiuso e normale in L.

In particolare, se L è un prodotto diretto di gruppi di Lie quasi-semplici, $L = L_1 \times \ldots \times L_r$, allora ci sono fattori semplici $L_{i_1}, \ldots, L_{i_s}$ tali che $Q = (L_{i_1} \times \ldots \times L_{i_s}) \cdot U$ dove U è un sottogruppo del centro di $L_{j_1} \times \ldots \times L_{j_t}$ e dove $\{j_1, \ldots, j_t\}$ è il complemento di $\{i_1, \ldots, i_s\}$ in $\{1, \ldots, r\}$.

Dimostrazione. Probabilmente l'asserzione è notoria; ciò nonostante schizziamo una dimostrazione non potendo indicare una referenza diretta.

Se $f: \tilde{L} \to L$ è un rivestimento universale di L, allora $f^{-1}(Q)$ è un sottogruppo di composizione di L; nel caso che $f^{-1}(Q)$ sia un sottogruppo normale di $\tilde{L}$, il gruppo $Q = f(f^{-1}(Q))$ è normale in L e chiuso per l'osservazione 1.5. Perciò basta dimostrare la parte seconda dell'asserzione. Inoltre basta provare l'asserzione seguente: Sia $L = L_1 \times \ldots \times L_r$ un prodotto diretto di gruppi di Lie quasi-semplici L_i e $Q \subset L$ un sottogruppo come descritto nella seconda parte dell'asserzione del Lemma — senza restrizione della generalità possiamo supporre che $Q = L_1 \times \times \ldots \times L_s \times U$ dove U è contenuto in $Z(L_{s+1} \times \ldots \times L_r)$ —, sia inoltre

$Q' \subset Q$ un sottogruppo normale astratto di Q, allora anche Q' ha la forma descritta nella parte seconda del Lemma.

Siano $\pi_i: L \to L_i$ i proiezioni, $i = 1, \ldots, r$. Allora $\pi_i(Q')$ è normale in L_i per $i = 1, \ldots, s$. Perciò, secondo [16], lemma 3.7, o $\pi_i(Q')$ è contenuto nel centro di L_i o $\pi_i(Q') = L_i$. Se $\pi_i(Q') = L_i$, allora $L_i \subset Q'$. Cioè, sia $g \in L_i$ un elemento tale che esista $h \in L_i$ con $h^2 = g$, e sia $x \in Q'$ con $\pi_i(x) = g$, allora vale $[(hxh^{-1})^{-1}x]^{-1}x = g \in Q'$. Poichè L_i è generato da tutti gli elementi che possiedono una radice quadrata, L_i è contenuto in Q'.

Quindi anche Q' ha la forma indicata nel Lemma.

3.3. Asserzione. Il radicale R_0 di Q_0 è contenuto in R e L_0 è normale in L.

Dimostrazione. Abbiamo $R_0 \lhd Q_0 \lhd Q$ e quindi anche $\pi(R_0) \lhd \pi(Q_0) \lhd \pi(Q)$; secondo 3.1 $\pi(Q)$ è normale in L, quindi $\pi(R_0)$ è normale in L per il Lemma 3.2 e, essendo connesso e risolvibile è triviale. Ne segue che $\pi(Q_0) = L_0$ è normale in L.

3.4. Asserzione. Il sottogruppo L normalizza Q.

Dimostrazione. Trivialemente L_0 è contenuto in $N(Q)$. Sia $L \cong S \times L'$ come descritto nella dimostrazione di 3.1. Essendo generato da tori L' normalizza Q per lemma 2.1. Sia dunque S_1 un fattore semplice di S non contenuto in L_0. Secondo le considerazioni di 3.1 e 3.2 la proiezione di Q su S_1 è un sottogruppo di $Z(S_1)$. Si sceglie un gruppo ad un parametro A di S_1 tale che $Z(S_1) \subset A$; questo è situato sopra un toro di $SL(2, \mathbb{R})$. Allora Q è contenuto in $R \times_s (L'' \cdot A)$, dove L'' è il prodotto dei fattori quasi-semplici di L che sono differenti di S_1. Per ogni sottogruppo connesso H della dimensione 2 di S_1 l'applicazione $A \times H \to S_1$, $(a, h) \mapsto a \cdot h$, è un diffeomorfismo (vedi la parte (b) della dimostrazione del lemma 2.6); di conseguenza anche $(R \times_s (L'' \cdot A)) \times H \to G$, $(x, h) \mapsto x \cdot h$, è un diffeomorfismo. Tutti gli elementi non-triviali di H sono dunque $\mathbb{Z}$-elementi di G riguardo a Q e normalizzano Q per la proposizione 1.10. Essendo generato da tali sottogruppi H il gruppo S_1 è contenuto in $N(Q)$.

3.5. Asserzione. Il radicale R normalizza Q.

Dimostrazione. Sia L_0' il sottogruppo normale di L con $L = L_0 \cdot L_0'$ e $L_0 \cap L_0' = \{1\}$; identifichiamo L con $L_0 \times L_0'$. Sia M l'immagine di Q mediante la proiezione di G su L_0', allora, secondo la descrizione di $\pi(Q)$,

nel Hilfssatz 3.2, M è contenuto in $Z(L_0')$. Se per ogni elemento $m \in M$ si sceglie un elemento $r_m \in R$ con $(r_m) \cdot m \in Q$ (un tale elemento esiste, poichè $L_0 \subset Q$), allora si può rappresentare Q così:

$$Q = \bigcup_{m \in M} (Q \cap R) \cdot L_0 \cdot r_m \times \{m\} .$$

Adesso costruiamo $Q_1 := [Q \cap R]$ nel radicale R. Poichè R è esponenziale, vale $Q \cap R \subset Q_1$. Per il lemma 2.6 esistono omomorfismi $\varphi_i \colon \mathbb{R} \to R$ $(i = 1, \ldots, r)$ tali che

$$\mathbb{R}^r \times Q_1 \to R , \qquad ((t_1, \ldots, t_r), x) \mapsto \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_r(t_r) \cdot x ,$$

è un omeomorfismo. Quindi per ogni $m \in M$ l'applicazione

$$\mathbb{R}^r \times ((Q \cap R) \cdot L_0 \cdot r_m \times \{m\}) \to G , \qquad ((t_1, \ldots, t_r), y) \mapsto \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_r(t_r) \cdot y ,$$

ha un'immagine chiusa ed è un omeomorfismo sulla sua immagine. Lo spazio M essendo discreto anche l'applicazione

$$\mathbb{R}^r \times Q \to G , \qquad ((t_1, \ldots, t_r), g) \mapsto \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_r(t_r) \cdot q ,$$

è un omeomorfismo sulla sua immagine chiusa. Gli elementi non-triviali di $\varphi_i(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, r$, sono dunque $\mathbb{Z}$-elementi di G riguardo a Q e normalizzano Q per la proposizione 1.10. Poichè Q_1 è contenuto in $[Q]$ e $[Q] \subset N(Q)$ secondo il lemma 2.1, infine otteniamo $R \subset N(Q)$.

4. Dimostrazione dei teoremi 0.2 e 0.3.

Sia G un gruppo localmente compatto connesso e $Q \subset G$ un sottogruppo *tqn*.

Per [12], p. 175, G è isomorfo a un limite proiettivo $\varprojlim G_\alpha$ di gruppi di Lie connessi G_α, dove gli omomorfismi $\pi_\alpha^\beta \colon G_\beta \to G_\alpha$ del sistema proiettivo sono suriettivi con nuclei compatti. Nel seguito identificheremo G con $\varprojlim G_\alpha$.

Siano $f_\alpha \colon G \to G_\alpha$ i proiezioni canonici. Se $L \subset G$ è un sottogruppo chiuso, allora $f_\alpha(L)$ è chiuso per ogni α e $L = \varprojlim f_\alpha(L)$ (vedasi [4], III, § 7).

Quindi $f_\alpha(Q)$ è un sottogruppo *tqn* di G_α per ogni α secondo il lemma 1.2.

4.1. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 0.2. Da $Q \subset [Q]$ risultano le inclusioni $f_\alpha(Q) \subset f_\alpha([Q]) \subset [f_\alpha(Q)]$. Dunque $f_\alpha(Q)$ è normale in G_α per ogni α (per la proposizione 2.7), di conseguenza $Q = \varprojlim f_\alpha(Q)$ è normale in G.

4.2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 0.3. Siano $R(G)$ rispettivamente $R(G_\alpha)$ i radicali di G rispettivamente G_α (per la definizione del radicale di G vedasi [9]). Allora vale $R(G) = \varprojlim R(G_\alpha)$; (il radicale $R(G)$ è contenuto in $\varprojlim R(G_\alpha)$, perchè per ogni α il sottogruppo normale connesso risolvibile $f_\alpha(R(G))$ è contenuto in $R(G_\alpha)$; viceversa, $\varprojlim R(G_\alpha)$ è risolvibile, perchè i nuclei degli omomorfismi $\pi_\alpha^\beta | R(G_\beta) : R(G_\beta) \to R(G_\alpha)$ sono compatti e, di conseguenza, abeliani; dunque $\varprojlim R(G_\alpha)$ essendo connesso e normale è contenuto in $R(G)$).

Per la premessa i radicali $R(G_\alpha)$ sono esponenziali. Dunque per ogni α il sottogruppo $f_\alpha(Q)$ è normale in G per la sezione 3; di conseguenza Q è normale in G.

5. Ogni sottogruppo *tqn* del rivestimento universale del gruppo dei movimenti del piano euclideo è normale.

Sia E il gruppo dei movimenti del piano euclideo e $q : \tilde{E} \to E$ il rivestimento universale. Allora vale $E \cong \mathbb{C} \times_s \mathbb{R}$ colla moltiplicazione $(z, t)(y, s) = (z + e^{2\pi i t} y, t + s)$. Il centro $Z = \langle (0, 1) \rangle$ di $\tilde{E}$ è il nucleo di q; identifichiamo $q : \tilde{E} \to E$ coll'applicazione di passaggio al quoziente $\tilde{E} \to \tilde{E}/Z$.

Sia Q un sottogruppo *tqn* di $\tilde{E}$.

5.1. ASSERZIONE. Vale $Q \lhd \overline{QZ} \lhd \tilde{E}$.

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo E essendo esponenziale $\overline{q(Q)}$ è normale in E per il teorema 0.3; di conseguenza $\left(q^{-1}(\overline{q(Q)}\right) = \overline{QZ}$ è normale in $\tilde{E}$; vale $Q \lhd \overline{QZ}$, perchè Z è il centro di $\tilde{E}$.

5.2. ASSERZIONE. Se Q non è contenuto in $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}$, Q è normale.

DIMOSTRAZIONE. Dato $(x, s) \in Q$ con $s \notin \mathbb{Z}$ si trova $g \in \tilde{E}$ con $g(x, s)g^{-1} = (0, s)$. Basta dimostrare che $Q' = gQg^{-1}$ è normale. Dunque possiamo supporre che Q già contiene un elemento $(0, s)$ con $s \notin \mathbb{Z}$.

(1) Se s è razionale, una potenza di $(0, s)$ è contenuto in Z, cioè $Q \cap Z =: Z'$ è un sottogruppo di indice finito di Z. Sia $q' : \tilde{E} \to \tilde{E}/Z'$ l'applicazione di passaggio al quoziente, allora $q'(Q)$ è chiuso per l'osservazione 1.5 e $q'^{-1}(q'(Q)) = Q$. Il gruppo $\tilde{E}/Z'$ è generato da tori; dunque $q'(Q)$, essendo un sottogruppo tqn, è normale in $\tilde{E}/Z'$, quindi Q è normale in $\tilde{E}$.

(2) Se s è irrazionale, $\overline{QZ}$ contiene il sottogruppo $\{0\}\times\mathbb{R}$ di $\tilde{E}$. Da un calcolo diretto risulta che $\tilde{E}$ è la chiusura normale di $\{0\}\times\mathbb{R}$ in $\tilde{E}$. L'asserzione 5.1 implica che $\overline{QZ} = \tilde{E}$ e $Q \lhd \tilde{E}$.

5.3. ASSERZIONE. Sia N un sottogruppo normale chiuso di $\tilde{E}$ e $N \cap (\mathbb{C}\times\{0\})$ non sia banale. Allora vale $\mathbb{C}\times\{0\} \subset N$.

DIMOSTRAZIONE. Il sottogruppo $N \cap (\mathbb{C}\times\{0\})$ è invariante per l'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{C}$, cioè per ogni rotazione col centro 0. Dunque vale $\mathbb{C}\times\{0\} \subset N$.

5.4. ASSERZIONE. Un sottogruppo Q di G con $Q \subset \mathbb{C}\times\mathbb{Z}$ è normale.

DIMOSTRAZIONE. Se Q è contenuto in Z, l'asserzione è banale. Sia dunque $Q \not\subset Z$.

Se QZ è chiuso, $QZ \cap (\mathbb{C}\times\{0\})$ è un sottogruppo normale chiuso non-triviale di $\tilde{E}$, perchè vale $Q \not\subset Z$. Da 5.3 discende $\mathbb{C}\times\{0\} \subset QZ$. Poichè Z è discreto, vale $\mathbb{C}\times\{0\} \subset Q$; ne risulta la normalità di Q.

Supponiamo che QZ non sia chiuso, e procediamo per assurdo. Se vale $QZ \neq \overline{QZ}$, allora $\mathbb{C}\times\{0\}$ è contenuto in $\overline{QZ}$ per 5.3. Sia $\pi_{\mathbb{C}} : \tilde{E} \to \mathbb{C}$ la proiezione sul primo fattore del prodotto cartesiano $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$; a causa dell'inclusione $Q \subset \mathbb{C}\times\mathbb{Z}$ vale $\overline{QZ} \cap (\mathbb{C}\times\{0\}) = \overline{\pi_{\mathbb{C}}(Q)}$.

È ovvio che la dimensione di Q è 0 o 1 (poichè $\dim(Q) = 2$ implica che $\mathbb{C}\times\{0\} \subset Q$ e dunque che QZ è chiuso). Dapprima sia $\dim(Q) = 0$; cioè Q è un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}\times\mathbb{Z}$.

Allora $\mathbb{C}\times\mathbb{Z}$ contiene tre elementi (x, s), (y, t), (z, u), che generano il gruppo abeliano Q, e $\pi_{\mathbb{C}}(Q)$ è generato da $\{x, y, z\}$. Tenendo conto del fatto che $\overline{\pi_{\mathbb{C}}(Q)} = \mathbb{C}$, due dei vettori — supponiamo che questi siano x e y — sono linearmente indipendenti sopra $\mathbb{R}$, e $z = \alpha x + \beta y$, tale che ogni relazione $k_1\alpha + k_2\beta + k_3 = 0$ con k_i razionale è banale (vedasi [1], Appendice 11). Poichè $Q \subset (\mathbb{C}\times\{0\})$ è un sottogruppo di-

screto di $\mathbb{C}\times\{0\}$, è possibile scegliere i generatori di Q cosicchè $t = s = 0$ (ma $u \neq 0$). Se moltiplichiamo Q da destra con elementi di $\{0\}\times\mathbb{R}$ possiamo calcolare come nel $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$; bisogna comprendere così i calcoli seguenti.

Con $(0, \tau) = -(\tau/u)\alpha(x, 0) - (\tau/u)\beta(y, 0) + (\tau/u)(z, u)$ e $\tau = -u/\alpha$ vale la relazione:

$$\overline{Q\langle(0,\tau)\rangle} = \mathbb{Z}(x,0) + \mathbb{Z}(y,0) + \mathbb{Z}(z,u) + \mathbb{Z}\left((x,0) + \frac{\beta}{\alpha}(y,0) - \frac{1}{\alpha}(z,u)\right)$$
$$= \mathbb{Z}(x,0) + \mathbb{R}(y,0) + \mathbb{R}(z,u)\,.$$

Ma questo insieme non è un sottogruppo di $\tilde{E}$, perchè la componente connessa $P = \mathbb{R}(y, 0) + \mathbb{R}(z, u)$ dell'elemento neutrale non è un sottogruppo: $P \cap (\mathbb{C}\times\{0\}) = \mathbb{R}(y, 0)$ non è invariante per l'azione di $\mathbb{R}(z, u) \subset P$. Questo è in contraddizione colla proprietà *tqn* di Q.

Nel caso $\dim(Q) = 1$ si procede analogamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. I. Arnold - A. Avez, *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1967.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitre 1, Hermann, Paris, 1960.

[3] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitres 2 et 3, Hermann, Paris, 1972.

[4] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology*. Part 1, Hermann, Paris, 1966.

[5] P. Cartier, *Structure topologiques des groupes de Lie généraux*, Séminaire « Sophus Lie », E.N.S. 1954/55, Exposé 22.

[6] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1965.

[7] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[8] N. Ito - J. Szep, *Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen*, Acta Sci. Math. Szeged., **23** (1962), pp. 168-170.

[9] K. Iwasawa, *On some types of topological groups*, Annals of Math., **50** (1949), pp. 507-558.

[10] F. Kümmich, *Topologische quasihamiltonsche Gruppen*, Arch. Math., **29** (1977), pp. 392-397.

[11] F. KÜMMICH, *Quasinormalität in topologischen Gruppen*, Mh. Math., **87** (1979), pp. 241-245.

[12] D. MONTGOMERY - L. ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 1, Interscience Publishers, Inc., New York, Second Printing 1964.

[13] O. ORE, *On the application of structure theory to groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), pp. 801-806.

[14] S. E. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[15] J. TITS, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Lecture Notes in Mathematics 40, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[16] J. TITS, *Liesche Gruppen und Algebren*, Vorlesungsskript, Bonn, 1965. Sarà pubblicato da Springer-Verlag.

[17] H. WIELANDT, *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, Math. Z., **45** (1939), pp. 209-244.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 gennaio 1982.