RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Problema di Cauchy semiglobale in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 69 (1983), p. 169-179

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__69__169_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 69 (1983)

Problema di Cauchy semiglobale in due variabili.

GIULIANO BRATTI (*)

0. In R^2 la variabile sia (x, y). $P = P(D_x, D_y)$ sia un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti.

Se $N = (\alpha, \beta)$ è un vettore non nullo di R^2, indicherò con H il semipiano di R^2 definito dalla disequazione: $\alpha x + \beta y \leqq 0$; e con $G(H)$ il sottospazio di $C^\infty(R^2)$ definito da: f sta in $G(H)$ se e solo se la sua restrizione su H, f/H, è nulla.

Dal punto di vista dell'Analisi Funzionale, la risolubilità univoca del problema di Cauchy per P, con dati nel complementare chiuso di H, è equivalente alla richiesta che

$$P: G(H) \to G(H)$$

sia un automorfismo topologico, ovvero che P sia iperbolico rispetto ad N, come si può dedurre da (3): teoremi 5.4.1 e 5.6.4.

In questo lavoro, mi propongo di indagare su di un problema analogo a quello di Cauchy, e lo chiamerò: « *Problema di Cauchy semiglobale* », (la risolubilità del quale è tra l'altro connessa alla risolubilità di certi sistemi differenziali sovradeterminati del tipo: $Pu = f$, $Qu = 0$), relativo alla caratterizzazione di quegli operatori P per i quali per « abbastanza » aperti B di R^2 si possa avere

$$P(G(B)) = G(B)$$

dove, ormai è naturale, $G(B) = (f \in C^\infty(R^2) : f/B = 0)$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.

Nel seguito: il paragrafo uno sarà dedicato alle notazioni ed a qualche richiamo; nel due, oltre che a riportare alcuni teoremi dell'Analisi Funzionale interessanti questo lavoro, saranno sviluppati i preliminari per la dimostrazione del risultato principale qui contenuto

TEOREMA. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *per ogni aperto* B *di* R^2, *convesso e limitato, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

b) *per ogni aperto* B *di* R^2, *P-convesso e limitato, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

c) P *è iperbolico rispetto ad ogni vettore di* R^2 *non caratteristico.*

La dimostrazione di questo teorema sarà svolta nel paragrafo tre.

1. In R^n la variabile sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Se A è un aperto di R^n, per brevità porrò:

$$C_c^\infty(A) = D(A) \quad \text{e} \quad C^\infty(A) = E(A),$$

con le usuali topologie; $D'(A)$ ed $E'(A)$ saranno i duali (forti) rispettivi.

Se $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha D^\alpha$ è un operatore differenziale lineare, a coefficienti costanti, indicherò con

$${}^tP = {}^tP(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} a^\alpha D^\alpha$$

il trasposto di P.

DEFINIZIONE 1. *A è P-convesso se e solo se ${}^tP(E'(A))$ è chiuso in $E'(A)$.*

La P-convessità di A è condizione necessaria e sufficiente al fine d'avere

$$P(E(A)) = E(A)$$

(visto che ${}^tP: E'(A) \to E'(A)$ è sempre iniettiva); essa si caratterizza bene, (3), pag. 90, per gli aperti di R^2: se A è un aperto di R^2, A è P-convesso se e solo se ogni linea caratteristica di P interseca A in un connesso.

Se (A, B) è una coppia di aperti di R^n, tale che la chiusura di B, B^-, è contenuta in A, porrò

$$G_A(B) = (f \in E(A): f/B = 0); \qquad e: \operatorname{Ker} P/A = (f \in E(A): Pf = 0).$$

Poichè $E(A)$ è uno spazio di Fréchet-Schwartz (brevemente: è un FS-spazio), anche $G_A(A)$ e Ker P/A, con le topologie dedotte da $E(A)$, ed $E(A)/(\text{Ker } P/A) \cap G_A(B)$, con la topologia quoziente, sono FS-spazi [2], pagg. 332 e segg.

Infine: la definizione, e le proprietà degli operatori P che son iperbolici rispetto a qualche vettore di R^n, sono quelle elencate nel capitolo V di [3]; ai fini di questo lavoro, particolare interesse avranno i teoremi 5.3.3 e 5.6.3 di quel capitolo.

2. Oltre al teorema di Hahn-Banach (prolungamento continuo dei funzionali), farò uso, nel seguito, dei seguenti teoremi:

A) E ed F sian due spazi di Fréchet; se $f: E \to F$ *è lineare e continua, allora* f *è suriettiva se e solo se la sua trasposta* ${}^t f: F' \to E'$ *è iniettiva ed ha immagine chiusa;*

B) E ed F sian due spazi vettoriali topologici, localmente convessi; se sono spazi di Fréchet, o duali forti di spazi di Fréchet, allora: se $f: E \to F$ *è lineare, continua e suriettiva,* f *è aperta;*

C) $(E_t, t \in A, \geq, Q_{ts}\ t \geq s)$ *sia un sistema induttivo di spazi vettoriali topologici localmente convessi e di Hausdorff;* $Q_{ts}: E_s \to E_t$ *sia lineare e continua;* F_t *sia il duale topologico di* E_t.

Se si pone $P_{st}: F_t \to F_s$ *definita da*

$$(x_s, P_{st}(y_t)) = (Q_{ts}(x_s), y_t)$$

si ha

1) $(F_t, t \in A, \geq, P_{st}\ t \geq s)$ *è un sistema proiettivo;*

2) *il duale topologico del limite induttivo* $\lim (E_t)$, *dotato della topologia limite induttivo, è il limite proiettivo* $\lim (F_t)$, (5), pag. 150;

D) Se E ed F sono spazi vettoriali topologici, duali forti di FS-spazi; e se $f: E \to F$ *è lineare e continua, allora* $f(E)$ *è chiuso in F se e solo se lo è per successioni.*

Indicherò con $G'_A(B)$ il duale forte di $G_A(B)$.

LEMMA 1. *$G'_A(B)$ è isomorfo ed omeomorfo a $E'(A)/E'(B^-)$, quest'ultimo spazio dotato della topologia quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. $\psi: E'(A)/E'(B^-) \to G'_A(B)$ sia l'applicazione lineare definita da

$$\psi(\bar{\mu}) = \nu$$

se $\nu \in \bar{\mu} = \mu + E'(B^-)$.

ψ è un isomorfismo suriettivo, visto che $G_A(B)$ ha la topologia dedotta da $E(A)$; dimostrerò, ora, che ψ è continua.

$\bar{\mu}_j$ sia una rete convergente a zero in $E'(A)/E'(B^-)$; se V è un intorno di zero in $G'_A(B)$, V è del tipo

$$V = V(L, \delta) = (\mu \in E'(A): |\mu(L)| \leq \delta)$$

dove L è limitato in $G_A(B)$ ed δ è in R_+ (reali positivi).

V è intorno di zero anche in $E'(A)$, poichè L è limitato anche in $E(A)$; visto che la proiezione canonica $\pi: E'(A) \to E'(A)/E'(B^-)$, $\pi(V) = V + E'(B^-)$, è aperta, $\pi(V)$ è intorno di zero in $E'(A)/E'(B^-)$; allora: esiste j_0 tale che se $j \geq j_0$ si ha

$$\bar{\mu}_j \in V + E'(B^-)$$

e quindi: $\mu_j = \varrho_j + \sigma_j$, con $\varrho_j \in V$ e $\sigma_j \in E'(B^-)$. Ciò dimostra che la ψ è continua.

L'applicazione lineare e continua

$$\psi \circ \pi: E'(A) \to G'_A(B)$$

è suriettiva fra duali forti di spazi di Fréchet che son riflessivi; in base al teorema B) citato di sopra, $\psi \circ \pi$ risulta aperta, così che la stessa ψ è aperta.

La dimostrazione è conclusa.

Determinato il duale forte di $G_A(B)$, il teorema A) fornisce immediatamente il

TEOREMA 1. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) $P(G_A(B)) = G_A(B)$;

b) *se* μ *sta in* $E'(A)$ *e se* $\operatorname{supp}({}^tP\mu) \subset B^-$, *anche* $\operatorname{supp}(\mu) \subset B^-$; *ed inoltre*: ${}^tP(E'(A)) + E'(B^-)$ *è chiuso in* $E'(A)$.

DIMOSTRAZIONE.

a) implica *b*).

Poichè ${}^tP: E'(A)/E'(B^-) \to E'(A)/E'(B^-)$ definita da

$$ {}^tP\big(\mu + E'(B^-)\big) = {}^tP(\mu) + E'(B^-) $$

deve essere iniettiva, si ha:

se μ sta in $E'(A)$ e se ${}^tP(\mu)$ è in $E'(B^-)$, allora ${}^tP\big(\mu + E'(B^-)\big) = {}^tP(\mu) + E'(B^-)$ è lo zero di $E'(A)/E'(B^-)$; dunque $\mu + E'(B^-)$ deve esser lo zero di $E'(A)/E'(B^-)$, ovvero $\operatorname{supp}(\mu) \subset B^-$.

${}^tP(\mu_j) + \nu_j$ sia una rete in $E'(A)$ convergente debolmente a q in $E'(A)$. In $E'(A)/E'(B^-)$ si ha:

$$ \lim_j {}^tP(\bar{\mu}_j) = \lim_j \big({}^tP(\mu_j)\big)^- = \bar{q} $$

e quindi

$$ \bar{q} = \big({}^tP(\mu)\big)^- $$

per qualche μ in $E'(A)$.

b) implica *a*).

La prima parte della proposizione *b*) implica che ${}^tP$ è iniettiva.

${}^tP(\bar{\mu}_j)$ sia una rete convergente a $\bar{q}$ in $E'(A)/E'(B^-)$; dimostrerò che q sta in $E'(A) + E'(B^-)$; dopo di che la dimostrazione è conclusa.

Infatti: poiché ${}^tP\big(E'(A)\big) + E'(B^-)$ è chiuso in $E'(A)$, se q non appartenesse a quello spazio, in base al teorema di Hahn-Banach esisterebbe f in $E(A)$ tale che

$$ \text{(a)} \qquad q(f) \neq 0\,; \qquad \text{e:} \quad Pf = 0 \quad \text{e} \quad f/B = 0\,. $$

(a) è assurda, poichè $q(f) = \lim_j \big({}^tP(\mu_j)(f)\big) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

OSSERVAZIONI.

A) Si supporrà sempre che A sia connesso; è immediato allora verificare che la condizione $P\big(G_A(B)\big) = G_A(B)$ esclude che P possa esser ellittico.

B) Se $P(G_A(B)) = G_A(B)$, e se B è limitato, usando lo stesso ragionamento di [3], teorema 3.5.4, pag. 81, è facile dimostrare che A deve esser P-convesso.

C) Nel caso in cui $(A, B) \subset R^2 \times R^2$, la condizione $P(G_A(B)) = G_A(B)$ mostra che B « vicino » all'esser P-convesso, senza esserlo certamente come dimostra il facile esempio seguente

sia $P = D_x$; sia $A = R^2$ e $B = ((x, y) \in R^2 : |x| < 1 \text{ e } |y| < 1) \sim ((0, y) : y \geq 0)$. Si ha, ovviamente

$$P(G^{R^2}(B)) = G^{R^2}(B),$$

e B non è D_x-convesso.

D) Se (A, B) sono aperti di R^2, si può dimostrare che: la condizione $P(G_A(B)) = G_A(B)$ implica che: se r è una retta caratteristica di P; se $(\xi_1, \xi_2) \subset r \cap (B \sim \xi_3)$, e se $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) \cap (R^2 \sim B)$, allora ξ_3 sta sulla frontiera di B.

E) Se $P = P(D_x, D_y)$ non è ellittico, e se $B \subset R^2$ è P-convesso, allora vale per P e B la prima parte della proposizione *b*) del teorema 1: la verifica è immediata.

3. $P = P(D_x, D_y)$ sia un operatore differenziale lineare, in due variabili, a coefficienti costanti.

Se B è un aperto di R^2, per brevità porrò

$$G_{R^2}(B) = G(B).$$

TEOREMA 2. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *per ogni aperto B di R^2, limitato e convesso, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

b) *per ogni aperto B di R^2, limitato e P-convesso, si ha*: $P(G(B)) = G(B)$;

c) *P è iperbolico rispetto ad ogni vettore di R^2 non caratteristico.*

DIMOSTRAZIONE.

a) implica *c*).

In base all'osservazione A del paragrafo due, P non può esser ellittico. Sia N' un vettore caratteristico di P, e sia N un vettore non caratteristico di P; si può supporre direttamente che sia $N = (0, 1)$,

e che P abbia solo N' come vettore caratteristico: negli altri casi la dimostrazione è una leggera variante di questa.

Dimostrerò che: se H è il semipiano di R^2 dei punti con ordinata non positiva, allora l'ipotesi $P(G(B)) = G(B)$, per ogni B di R^2, aperto limitato e convesso, implica che

$$P(G(H)) = G(H)$$

dopo di che l'iperbolicità di P rispetto al vettore $(0, 1)$ è conseguenza della dimostrazione del teorema 5.4.1 di [3].

Sia B_n il parallelogramma con lati paralleli all'asse x, ed ortogonali al vettore N', di vertici $(-n, 0)$, $(n, 0)$ ecc., contenuto in H. Posto

$$L_n = (G(B_n) \cap \operatorname{Ker} P)\,; \qquad \text{e:} \quad M_n = E(R^2)/L_n$$

e posto

$$j_{n+1}\colon M_{n+1} \to M_n$$

definita da $j_{n+1}(f + L_{n+1}) = f + L_n$, il sistema $(M_n, j_n, n \in N)$ è un sistema (di FS-spazi) proiettivo.

Posto

$$M = \varprojlim (M_n) \subset \Pi_n(M_n)$$

M limite proiettivo algebrico, si considerino le

$$\pi_n\colon M \to M_n$$

e si ponga su M la topologia limite proiettivo definita dagli M_n dalle π_n. È facile verificare che con tale topologia, M risulta un sottospazio chiuso del prodotto $\Pi_n(M_n)$. Dimostrerò, ora, che l'applicazione lineare

$$j\colon E(R^2) \to M$$

definita da $j(f) = (\!(f + L_n)\!)$ è un isomorfismo ed un omeomorfismo (suriettivo). Risulterà quindi, che anche la trasposta ${}^tj$ della j

$${}^tj\colon \left(\varprojlim (M_n)\right)' \to E'(R^2)$$

è un isomorfismo ed un omeomorfismo; e poichè: M_n è un FS-spazio; ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B_n^-)$ è il suo duale, in base a C) del paragrafo due, si avrà

$$ {}^tj(M)' = {}^tj(\varinjlim (M_n')) = \bigcup_n \left({}^tP(E'(R^2)) + E'(B_n^-)\right) = $$
$$ = {}^tP(E'(R^2)) + E'(H) = E'(R^2)\,. $$

In definitiva: poiché H è convesso, se $\mu \in E'(R^2)$ e supp $({}^tP(\mu)) \subset H$, anche supp (μ) è contenuto in H; ${}^tP(E'(R^2)) + E'(H)$ è chiuso in $E'(R^2)$, sicchè $P(G(H)) = G(H)$, ovvero P è iperbolico rispetto a $(0, 1)$.

A) Che j sia continua segue dal fatto che $\pi_n \circ j : E(R^2) \to M_n$ è la proiezione canonica.

B) Che j sia iniettiva dipende dal fatto che la frontiera di H non è caratteristica. Infatti: se $j(f) = 0$, si ha

$$ f \in L_n, \quad n \in N; \qquad \text{ovvero:} \quad Pf = 0 \quad \text{e} \quad f \in G(B_n), \quad n \in N\,; $$

in base al corollario 5.3.1 di (3), segue che $f = 0$.

C) j è suriettiva. Infatti: se $((f_n + L_n)) \in \varprojlim (M_n)$, in base alla definizione di limite proiettivo risulta

$$ f_{n+1} = f_1 + g_1 + \ldots + g_n $$

con $g_i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poichè g_i è nulla su B_i e $P(g_i) = 0$ su R^2, in base al teorema 5.3.3 di [3], g_i risulta nulla su tutta la striscia S_i generata dal parallelogramma B_i (dalle rette ortogonali a N' e passanti per il segmento $[-n, n]$). Allora la funzione $fE(R^2)$ definita da

$$ f = f_i $$

nella striscia S_i risolve l'equazione $j(f) = ((f_n + L_n))$.

Basta dimostrare, ora, che c) implica b) per concludere, visto che ogni convesso è P-convesso.

c) implica b).

Poichè B è P-convesso, in base al teorema 1 ed all'osservazione D) del paragrafo due, per dimostrare la b) basterà dimostrare, in base al

teorema D) del paragrafo due, che ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$ è chiuso per successioni in $E'(R^2)$ (1).

A) Se $\lim_n {}^tP(\mu_n) + \nu_n = q$ in $E'(R^2)$, per n abbastanza grande si ha supp $({}^tP(\mu_n) + \nu_n) \subset K$, con K intorno limitato del supporto di q; per la P-convessità di R^2, si può supporre che supp $(\mu_n) \subset K'$, con K' aperto e limitato.

B) p sia un punto della frontiera di B: $p \in \partial B$. Per ogni $p \in \partial B$, esiste un cono aperto e convesso, Γ_p, con vertice in $(0, 0)$, tale che:

i) $p + \Gamma_p \cap B = \emptyset$;

ii) esiste $E_p \in D'(R^2)$ tale che

$$PE_p = \delta_p\,; \qquad \text{e} \quad \text{supp}\,(E_p) \subset \Gamma_p^-\,,$$

in base a [3], teorema 5.6.1.

Si ha: $\bigcup (\Gamma_p, p \in \partial B) = R^2/B^-$; inoltre: se $\varphi \in D(p + \Gamma_p)$, poichè supp $(E_p * \varphi)$ è contenuto in $(p + \Gamma_p)$, risulta

$$\lim_n \langle \mu_n \cdot \varphi \rangle = \lim_n \langle \mu_n \cdot P(E_p * \varphi) \rangle = \lim_n \langle {}^tP(\mu_n) + \nu_n \cdot E_p \rangle = \langle q \cdot E_p \rangle\,;$$

in base a (8), teorema XIII, esiste λ_p in $D'(p + \Gamma_p)$ tale che

$$\lim_n \mu_n = \lambda_p$$

in $D'(p + \Gamma_p)$.

Si osservi che: in base ad A) di sopra, si ha: supp $(\lambda_p) \subset (p + \Gamma_p) \cap K'$; ed inoltre: se $p' \in \partial B$, e se, con le notazioni di sopra, si ha

$$\lim_n \mu_n = \lambda_{p'}$$

in $D'(p' + \Gamma_{p'})$, allora non appena $Z = (p + \Gamma_p) \cap (p' + \Gamma_{p'}) \neq \emptyset$, le

(1) Il teorema D) si applica così: ${}^tP(E'(R^2)) + E'(B^-)$ è l'immagine, in $E'(R^2)$, dell'applicazione lineare e continua

$$({}^tP, i)\colon E'(R^2) \times E'(B^-) \to E'(R^2)\,, \qquad ({}^tP, i)(\mu, \nu) = {}^tP(\mu) + \nu\,.$$

Gli spazi indicati sono duali forti di FS-spazi ($E'(B^-)$ è chiuso in $E'(R^2)$, ed è, quindi, il duale di $E(R^2)/\mathcal{G}(B)$).

restrizioni di λ_p e di $\lambda_{p'}$ su $D(Z)$ coincidono. In base al « Principio di incollamente » [8], pag. 27, esiste λ in $D'(R^2/B^-)$ tale che: $\lim_n \mu_n = \lambda$. Indicata con q_1 la restrizione di q su $D(R^2/B^-)$, si può scrivere, allora

$$q_1 = {}^tP(\lambda)$$

con supp (λ) contenuto in $R^2/B^- \cap K'$.

Se si dimostra che esiste λ_0 in $E'(R^2)$ tale che $\lambda = \lambda_0/(R^2/B^-)$, la dimostrazione è conclusa.

(φ_n) sia una successione in $D(R^2/B^-)$ convergente a zero nella topologia indotta da $G(B)$. $\Gamma_{p_1}, \ldots, \Gamma_{p_n}$ siano n coni tali che

$$(R^2/B^-) \cap K' \subset \bigcup (\Gamma_{p_i}) ;$$

se α_i sta in $D(\Gamma_{p_i})$, e se $\sum_i \alpha_i = 1$, si ha

$$\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = \lim_n \left(\sum_i \langle \lambda_{p_i} \cdot \alpha_i \varphi_n \rangle \right) ;$$

poichè λ_{p_i} è continua su $D(Z)$, dove $Z = (p_i + \Gamma_{p_i}) \cap$ supp (α_i), con la topologia indotta da $G(B)$, risulta $\lim_n \langle \lambda \cdot \varphi_n \rangle = 0$ (2).

La dimostrazione è conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti - M. Nacinovich, *Analytic convexity*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. di Sc., Serie IV, **7**, no. 2 (1980).

[2] A. Grotendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, Publ. de Soc. de Matemática de São Paulo, 1958.

[3] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

[4] L. Hörmander, *On the characteristic Cauchy problem*, Ann. Math. (1968).

[5] J. L. Kelley - I. Namioka and co-authors, *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Comp., 1963.

(2) La chiusura di $D(p + \Gamma_p)$ in $G(B)$ è un FS-spazio; e la successione (μ_n) è limitata nel duale di quella chiusura.

[6] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **6** (1955-56).
[7] A. MARTINEAU, *Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, Journ. An. Math. Jérusalem (1963).
[8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 ottobre 1981.