

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA GRAZIA MAIA

**Un primo approccio alla teoria delle funzioni analitiche
in un'algebra di misure complesse**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 66 (1982), p. 155-171

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__155_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Un primo approccio alla teoria delle funzioni analitiche in un'algebra di misure complesse.

MARIA GRAZIA MAIA (*)

Scopo di questo lavoro è l'introduzione ad una possibile teoria delle funzioni analitiche nell'algebra Γ delle misure complesse a supporto in \mathbb{R}_+ . In [3] è stata introdotta e utilizzata l'algebra locale \mathcal{A} delle misure reali a supporto in \mathbb{R}_+ . Tale algebra è dotata di una struttura reticolare completa, e il prodotto di due misure è il prodotto di convoluzione. È evidente l'interesse di un calcolo operativo in detta algebra, ottenuto per estensione di una funzione analitica reale $f(x)$ ad un certo dominio di elementi di \mathcal{A} mediante conveniente sviluppo in serie di potenze a coefficienti reali.

Presentiamo un approccio più generale definendo le funzioni analitiche nell'algebra Γ complessificata di \mathcal{A} ricorrendo alle serie di potenze a coefficienti in Γ .

1. L'algebra Γ complessificata di \mathcal{A} .

Definiamo Γ come \mathbb{C} -algebra ponendo $\Gamma = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}$. Ogni elemento di Γ si può porre nella forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. A Γ tuttavia non si può estendere la struttura reticolare presente in \mathcal{A} ; ci limiteremo

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

pertanto a definire il valore assoluto di un elemento di Γ ponendo:

$$|\alpha + i\beta| = \bigvee_{\lambda \in K} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta)$$

dove K è il disco unità: $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq 1$.

Osserviamo che si ha, al variare di λ in K :

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta < |\alpha| + |\beta| \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}.$$

Ne segue che il valore assoluto di un qualunque elemento di Γ esiste sempre ed è un elemento di \mathcal{A}_+ , cono positivo di \mathcal{A} .

Valgono le seguenti relazioni, se $\xi, \eta \in \Gamma$:

- 1) $|\xi| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$,
- 2) $|\xi + \eta| < |\xi| + |\eta|$,
- 3) $|\xi\eta| < |\xi||\eta|$,
- 4) $|c\xi| = |c||\xi|$ per $c \in \mathbb{C}$,
- 5) $|1| = 1$.

Naturalmente \mathbb{C} è considerato come sottocorpo di Γ . Come per gli elementi di \mathcal{A} (cfr. [3]), converrà introdurre la notazione $\xi(t)$, ξ essendo un elemento di Γ , per indicare la funzione di ripartizione della misura complessa ξ . $\xi(t)$ è una funzione complessa a variazione localmente limitata, nulla per $t < 0$ e continua a destra in ogni punto. La funzione di ripartizione che caratterizza completamente la misura permette di definire in modo equivalente il valore assoluto di ξ tramite la sua funzione di ripartizione, essendo:

$$|\xi|(t) = \text{variazione totale della funzione } \xi(t) \text{ nell'intervallo } -\infty \text{---} t.$$

Per ogni $\tau \in \mathbb{R}_+$ porremo:

$$|\xi|_\tau = |\xi|(\tau).$$

Al variare di τ in \mathbb{R}_+ o anche in \mathbb{N} , $|\cdot|_\tau$ descrive una famiglia di seminorme in Γ .

Con tale definizione del valore assoluto l'algebra Γ diviene uno spazio pseudo-normato e come tale uno spazio metrico nella metrica

di Fréchet associata alla famiglia di seminorme:

$$\text{dist}(\xi, \eta) = \sum_n 2^{-n} \frac{|\xi - \eta|_n}{1 + |\xi - \eta|_n}.$$

Essendo A un'algebra locale, anche Γ è un'algebra locale e il suo ideale massimale, che indicheremo con \mathfrak{M}_Γ , è costituito dagli elementi della forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in J$ (dove J è l'ideale massimale di A). La proiezione canonica:

$$\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma/\mathfrak{M}_\Gamma = \mathbf{C}$$

si identifica con l'assegnazione: $\xi \mapsto \xi(0)$. \mathfrak{M}_Γ pertanto è costituito dagli elementi ξ il cui « valore iniziale » $\xi(0)$ è nullo.

In generale i domini naturali in cui considereremo definite le funzioni analitiche saranno tutti della forma $\pi^{-1}U$ dove U è un aperto di \mathbf{C} . Tali domini sono aperti in Γ e hanno la stessa connessione topologica di U , essendo questo un retratto omotopico di $\pi^{-1}U$. Siffatti aperti verranno nel seguito denominati π -domini. In particolare chiameremo π -disco in Γ di raggio $\rho > 0$ la controimmagine mediante π del disco aperto in \mathbf{C} dello stesso raggio (centrato in 0). Nell'algebra Γ , essendo uno spazio pseudo-normato, si possono introdurre nozioni di (o) -convergenza e $(*)$ -convergenza che si ricollegano con le nozioni omonime considerate solitamente in spazi di Riesz (cfr. [5]).

Diremo (o) -convergente verso ξ una successione $(\xi_n)_n$ di elementi di Γ ($\xi_n \xrightarrow{(o)} \xi$), tale che:

$$\bigwedge_{n \geq 0} \bigvee_{p \geq 0} |\xi_{n+p} - \xi| = 0$$

Diremo $(*)$ -convergente verso ξ una successione $(\xi_n)_n$ di elementi di Γ ($\xi_n \xrightarrow{(*)} \xi$) tale che ogni sottosuccessione di $(\xi_n)_n$ contenga a sua volta una sottosuccessione (o) -convergente verso ξ . È ovvio che queste nozioni di convergenza equivalgono alla convergenza a zero nei rispettivi sensi di $|\xi_n - \xi|$.

TEOREMA 1. *La $(*)$ -convergenza in Γ equivale alla convergenza rispetto alla famiglia di seminorme ovvero rispetto alla metrica associata.*

Per l'osservazione fatta dianzi ci basterà far riferimento a successioni infinitesime. Dimostriamo intanto che ogni successione infinitesime.

tesima metricamente contiene una sottosuccessione (o) -convergente a zero.

Sia $\xi_n \rightarrow 0$ secondo la metrica; allora per ogni $\tau \in \mathbb{R}_+$ è infinitesima la successione $|\xi_n|_\tau$ di numeri reali. Poniamo $\tau = 1$ ed estraiamo una sottosuccessione

$$(1) \quad \xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{1,n}, \dots$$

tale che risulti convergente la serie di seminorme

$$\sum_{n \geq 1} |\xi_{1,n}|_1.$$

Dalla (1) estraiamo una sottosuccessione $(\xi_{2,n})_n$ per la quale converge la serie

$$\sum_{n \geq 1} |\xi_{2,n}|_2$$

e così di seguito; avremo la seguente sequenza di sottosuccessioni:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \xi_{1,3} & \cdots & \xi_{1,n} & \cdots & \\ \xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \xi_{2,3} & \cdots & \xi_{2,n} & \cdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \xi_{m,1}, & \xi_{m,2}, & \xi_{m,3} & \cdots & \xi_{m,n} & \cdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Per ogni intero τ la serie:

$$\sum_{n \geq 1} |\xi_{n,n}|_\tau = \left| \sum_{n \geq 1} |\xi_{n,n}| \right|_\tau$$

converge e converge pertanto anche la serie di elementi positivi:

$$\sum_{n \geq 1} |\xi_{n,n}|$$

Poniamo:

$$\eta_n = \sum_{k \geq n} |\xi_{k,k}|$$

la successione $(\eta_n)_n$ converge metricamente a zero ed essendo monotona

decescente, tende a zero secondo la (o) -convergenza. Essendo per ogni n verificata la relazione:

$$|\xi_{n,n}| < \eta_n$$

risulta essere (o) -convergente a zero anche la $(|\xi_{n,n}|)_n$ e quindi la $(\xi_{n,n})_n$. Quest'ultima è una sottosuccessione della $(\xi_n)_n$. Poichè ogni sottosuccessione di una successione metricamente infinitesima è ancora tale, ne segue la $(*)$ -convergenza a zero di $(\xi_n)_n$. Dimostriamo ora che se $\xi_n \xrightarrow{(*)} 0$, allora converge a zero metricamente.

Supponiamo per assurdo che $(\xi_n)_n$ non sia infinitesima metricamente; allora esiste $\tau \in \mathbb{R}_+$ per cui $|\xi_n|_\tau$ non converge a zero. Per $\varepsilon > 0$ conveniente sarà verificata (per quel τ) la relazione

$$|\xi_n|_\tau \geq \varepsilon$$

per infiniti valori di n . Sarà possibile quindi estrarre una sottosuccessione $(\xi_{n(k)})_k$ tale che

$$|\xi_{n(k)}|_\tau \geq \varepsilon$$

per ogni k .

Dalla $(\xi_{n(k)})_k$ si può estrarre a sua volta una sottosuccessione $(\eta_n)_n$ (o) -convergente a zero. Allora la successione:

$$\varkappa_n = \bigvee_p |\eta_{n+p}|$$

è monotona decrescente e (o) -convergente a zero, pertanto dovrà essere $\varkappa_n(\tau)$ infinitesima e ciò è incompatibile con le relazioni:

$$0 < \varepsilon \leq |\eta_n|_\tau \leq \varkappa_n(\tau)$$

valide per ogni n .

OSSERVAZIONE. L'equivalenza tra la convergenza metrica e la $(*)$ -convergenza può essere dimostrata in generale in uno spazio pseudometrico, per la cui definizione si rimanda a [3].

2. Serie di potenze a coefficienti in Γ .

In seguito ci sarà utile la considerazione dell'algebra $\Gamma[[X]]$ delle serie formali a coefficienti in Γ . Quest'algebra è ancora un'algebra

locale, il cui ideale massimo è costituito dalle serie formali aventi il coefficiente iniziale in \mathfrak{M}_r .

Come A , Γ e $\Gamma[[X]]$ sono algebre integre.

DEF. 1. Sia $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ una serie formale a coefficienti in Γ , definiamo il raggio di convergenza di detta serie come il numero reale non negativo o $+\infty$ estremo superiore degli $r \in \mathbf{R}_+$ per cui esiste un $M \in A_+$ tale che

$$|a_n| r^n < M.$$

TEOREMA 2. Sia $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ una serie formale in Γ e ρ il suo raggio di convergenza, allora la serie di potenze $S(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n$ è convergente nel π -disco di raggio ρ ovvero per tutti i ξ per cui $|\xi(0)| < \rho$.

La dimostrazione si ottiene ricalcando la dimostrazione analoga nel campo complesso.

TEOREMA 3. Sia $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n$ una serie di potenze in Γ convergente per un certo $\xi \in \Gamma$, allora il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale a $|\xi(0)|$.

Se $\xi(0) = 0$ il fatto è banale. Sia dunque $\xi(0) \neq 0$, allora la successione di τ -seminorme $|a_n \xi^n|_\tau$ è infinitesima e quindi limitata; ciò per ogni $\tau \in \mathbf{R}_+$.

Se r è un numero reale positivo e minore di 1, la serie

$$\sum_{n \geq 0} |a_n \xi^n|_\tau r^n$$

è convergente per ogni τ . Quindi è convergente la serie

$$\sum_{n \geq 0} |a_n \xi^n| r^n.$$

Ciò significa che il raggio di convergenza della serie di potenze in η

$$\sum_{n \geq 0} b_n \eta^n$$

con $b_n = a_n \xi^n$ è maggiore o uguale a 1.

Dunque, posto $\eta = r\xi(0)/\xi$ si ha:

$$\eta(0) = r < 1$$

quindi la successione il cui termine n -esimo è:

$$\left| b_n \left(\frac{r\xi(0)}{\xi} \right)^n \right| = |a_n r^n (\xi(0))^n| = |a_n| |\xi(0) r|^n$$

è limitata reticolarmente, dunque è limitata reticolarmente la successione $|a_n| R^n$ per ogni $R < |\xi(0)|$, $R \in \mathbf{R}_+$.

Pertanto il raggio di convergenza della serie data è maggiore o uguale a $|\xi(0)|$.

TEOREMA 4. *Siano $A(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ e $B(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ due serie formali in Γ aventi raggio di convergenza $\geq \rho$, allora la serie somma:*

$$S(X) = A(X) + B(X)$$

e la serie prodotto:

$$P(X) = A(X) \cdot B(X)$$

hanno raggio di convergenza $\geq \rho$ e inoltre, per ogni ξ del π -disco di raggio ρ , le serie $S(\xi)$ e $P(\xi)$ hanno rispettivamente per somma la somma e il prodotto di $A(\xi)$ e di $B(\xi)$.

Anche questa dimostrazione si ottiene ricalcando la analoga nel campo complesso.

TEOREMA 5. *Siano $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ e $T(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ due serie formali in Γ , con raggi di convergenza ρ_1 e ρ_2 entrambi positivi, allora anche la serie $U(X) = S(T(X))$ ha raggio di convergenza positivo, inoltre, se ξ è interno a un π -disco di raggio positivo abbastanza piccolo, si ha:*

$$U(\xi) = S(T(\xi)).$$

Per comodità del lettore riportiamo la dimostrazione, simile al caso del campo complesso.

Sia r reale $0 < r < \varrho_2$, allora la serie $\sum_{n \geq 1} b_n r^n$ converge e la sua somma η è tale che:

$$\eta(0) = \left(\sum_{n \geq 1} |b_n| r^n \right)(0) = \sum_{n \geq 0} |b_n(0)| r^n$$

quest'ultima serie è una funzione reale e continua di r e infinitesima per $r \rightarrow 0$. Scegliamo $r > 0$ e tale che $\eta(0) < \varrho_1$, allora la serie

$$\sum_{p \geq 0} |a_p| \eta^p = \sum_{p \geq 0} |a_p| \left(\sum_{k \geq 1} |b_k| r^k \right)^p$$

è convergente.

Quest'ultima serie si può porre nella forma $\sum_{n \geq 0} \gamma_n r^n$ e, se si pone $U(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n$, si ha evidentemente $|c_n| < \gamma_n$. Ne segue che la serie $\sum_{n \geq 0} |c_n| r^n$ è convergente e il raggio di convergenza di $U(X)$ è $\geq r$. Se $|\xi(0)| < r$, la serie $U(\xi)$ è convergente. Poniamo $S_n(X) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$ e sia $S_n(T(X)) = U_n(X)$. Si ha:

$$U_n(\xi) = S_n(T(\xi))$$

poichè l'applicazione $T(X) \mapsto T(\xi)$ è un omomorfismo di una sotto-algebra dell'algebra delle serie formali a coefficienti in Γ e $S_n(X)$ è un polinomio. La serie $S(X)$ converge nel punto $T(\xi)$ e si ha:

$$S(T(\xi)) = \lim_n S_n(T(\xi)).$$

D'altra parte i coefficienti di $U(X) - U_n(X) = S(T(X)) - S_n(T(X))$ sono maggiorati da quelli della serie

$$\sum_{p > n} |a_p| \left(\sum_{k \geq 1} |b_k| X^k \right)^p$$

La serie

$$\sum_{p > n} |a_p| \left(\sum_{k \geq 1} |b_k| |\xi|^k \right)^p$$

è una serie convergente la cui somma tende a zero al divergere di n . Ne segue che, per $|\xi(0)| < r$, $U(\xi) - U_n(\xi)$ tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$.

Si ha dunque:

$$U(\xi) = \lim_n U_n(\xi) = \lim_n S_n(T(\xi)) = S(T(\xi))$$

non appena $|\xi(0)| < r$.

TEOREMA 6. *Sia $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ una serie formale con coefficiente iniziale $a_0 \notin \mathfrak{M}_\Gamma$, $T(X)$ la serie tale che $S(X)T(X) = 1$, allora, se il raggio di convergenza di $S(X)$ è positivo, tale è anche il raggio di convergenza di $T(X)$. Inoltre, se ξ è interno a un π -disco di raggio positivo abbastanza piccolo, si ha:*

$$S(\xi) T(\xi) = 1 .$$

Dimostrazione analoga a quella relativa al campo complesso.

TEOREMA 7. *Sia $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ una serie formale in Γ con raggio di convergenza ϱ , allora la serie derivata $S'(X) = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza ϱ , e per ogni ξ del π -disco di raggio ϱ si ha:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} = S'(\xi)\eta$$

la variabile h potendo essere anche complessa.

La prima parte del teorema si dimostra ricalcando la dimostrazione relativa al campo complesso. Vediamo la seconda parte.

Fissiamo $\xi \in \Gamma$ in modo che $|\xi(0)| < \varrho$, sia $\eta \in \Gamma$, prendiamo un reale $\bar{h} > 0$ tale che

$$|\xi(0)| + |\bar{h}\eta(0)| < \varrho$$

poniamo

$$\varkappa = |\xi| + |\bar{h}\eta|$$

allora $\varkappa(0) < \varrho$.

Se $|h| < \bar{h}$, la serie

$$S(\xi + h\eta) = \sum_{n \geq 1} a_n (\xi + h\eta)^n$$

è convergente. Consideriamo:

$$\frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} - \eta S'(\xi) = \sum_{n \geq 1} u_n(\xi, h\eta)$$

dove si è posto:

$$u_n(\xi, h\eta) = a_n \eta [(\xi + h\eta)^{n-1} + \xi(\xi + h\eta)^{n-2} + \dots + \xi^{n-1} - n\xi^{n-1}]$$

poichè $|\xi|$ e $|\xi + h\eta|$ sono maggiorati da \varkappa , si ha che:

$$|u_n(\xi, h\eta)| < 2n|a_n|\varkappa^{n-1}|\eta|$$

e poichè $\varkappa(0) < \varrho$, la serie

$$\sum_{n \geq 1} n|a_n|\varkappa^{n-1}$$

converge. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ e $\tau \in \mathbf{R}_+$, si potrà trovare un N tale che

$$|\eta|^\tau \sum_{n > N} 2n|a_n|\varkappa^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avendo fissato così N , la somma finita

$$\sum_{n \leq N} u_n(\xi, h\eta)$$

è un polinomio in h a coefficienti in Γ , nullo per $h=0$, continuo in h , per cui, se $|h| < \delta$, essendo δ un reale positivo conveniente, si ha:

$$\left| \sum_{n \leq N} u_n(\xi, h\eta) \right|_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per h abbastanza piccolo, si ha:

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left| \frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} - S'(\xi)\eta \right|_\tau \leq \\ & \leq \left| \sum_{n \leq N} u_n(\xi, h\eta) \right|_\tau + |\eta|^\tau \left| \sum_{n > N} 2n|a_n|\varkappa^{n-1} \right|_\tau < \varepsilon \end{aligned}$$

ogni seminorma del I membro di (2) è infinitesima con h . Risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} = S'(\xi)\eta.$$

COROLLARIO 1. *La somma di una serie di potenze $S(\xi)$ a coefficienti in Γ ammette derivate di tutti gli ordini nell'interno del suo π -disco di convergenza.*

TEOREMA 8. *Sia $S(X)$ una serie formale tale che $S(0) = 0$ e $S'(0) \notin \mathfrak{M}_r$ sia $T(Y)$ tale che $S(T(Y)) = Y$, allora se il raggio di convergenza di $S(X)$ è positivo, anche il raggio di convergenza di $T(Y)$ è positivo. Inoltre se η è interno a un π -disco di raggio abbastanza piccolo, si ha:*

$$S(T(\eta)) = \eta.$$

Supponiamo dapprima che sia $S'(0) = 1$ e consideriamo accanto alla serie $S(X)$ una serie del tipo

$$\bar{S}(X) = X - \sum_{n \geq 2} A_n X^n$$

dove $A_n \in A_+$ e $|a_n| < A_n$ per ogni $n \geq 2$. Alla serie $S(X)$ è associata la serie formale inversa

$$\bar{T}(y) = \sum_{n \geq 1} B_n Y^n$$

tale che $S(T(Y)) = Y$, i cui coefficienti B_n sono deducibili ricorsivamente da relazioni del tipo:

$$(3) \quad B_n = P_n(A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1})$$

dove P_n è un polinomio a coefficienti interi positivi o nulli.

Si deduce ricorsivamente su n dalle (3):

$$|b_n| < B_n.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie $T(Y)$ è maggiore o uguale a quello della serie $\bar{T}(Y)$. Dimostriamo che quest'ultimo è positivo.

Scegliamo la serie $\bar{S}(X)$ come segue: sia $r > 0$ un numero strettamente inferiore al raggio di convergenza della serie $S(X)$; il termine generale della serie

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| r^n$$

è dunque maggiorato dalla somma M . Se poniamo $A_n = M/r^n$ $n \geq 2$, si ottengono i coefficienti di una serie maggiorante di $S(X)$; la funzione:

$$\bar{S}(\xi) = \xi - M \frac{\xi^2/r^2}{1 - \xi/r} \quad \text{per } |\xi(0)| < r,$$

è localmente invertibile e, detta $T(\eta)$ l'inversa, si trova che $\bar{T}(\eta)$ deve essere soluzione dell'equazione di II grado seguente:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{M}{r^2}\right) \bar{T}^2 - \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) \bar{T} + \eta = 0$$

che ammette per soluzione annullantesi per $\eta = 0$:

$$\bar{T}(\eta) = \frac{1 + \eta/r - \sqrt{1 - 2\eta/r - 4M\eta/r^2 + \eta^2/r^2}}{2(1/r + M/r^2)}.$$

Allorchè $|\eta(0)|$ è abbastanza piccolo, il radicale è della forma $\sqrt{1+u}$ e ammette uno sviluppo in serie di potenze intere di u con raggio di convergenza uguale a 1. Sostituendo a u l'espressione polinomiale in η

$$-2 \frac{\eta}{r} - 4M \frac{\eta}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2}$$

annullantesi per $\eta = 0$, si ottiene uno sviluppo in serie di $\bar{T}(\eta)$ che converge per $|\eta(0)|$ abbastanza piccolo. Così il raggio di convergenza di questa serie è diverso da zero.

Se $S'(0) \notin \mathfrak{M}_r$, allora la serie $S(X)/S'(0)$ ha derivata calcolata nell'origine uguale a 1 e quindi il raggio di convergenza della serie $T(Y)$ inversa di quest'ultima è positivo e rappresenta in un intorno dell'origine l'inversa $T(\eta)$ della funzione $S(\xi)/S'(0)$.

Si ricava allora facilmente che $T(\eta/S'(0))$ è una serie convergente

con raggio di convergenza positivo ed è verificata la relazione

$$S(T(\eta/S'(0))) = \eta$$

non appena $|\eta(0)|$ è abbastanza piccolo.

3. Funzioni analitiche in Γ .

DEF. 2. Sia $f(\xi)$ una funzione definita in un π -dominio D di Γ a valori in Γ , diremo che f è analitica nel punto $\xi_0 \in D$ se esiste un numero $\varrho > 0$ e una serie formale $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ di raggio di convergenza $\geq \varrho$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n (\xi - \xi_0)^n$$

per ogni ξ per cui $|\xi(0) - \xi_0(0)| < \varrho$.

TEOREMA 9. Se la serie $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ha raggio di convergenza ϱ e ξ_0 è interno al π -disco di convergenza, allora il raggio di convergenza della serie dedotta

$$\sum_{n \geq 0} (\xi - \xi_0)^n \frac{S^{(n)}(\xi_0)}{n!}$$

è $\varrho' \geq \varrho - |\xi_0(0)|$ e nei punti ξ per cui è $|\xi(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$ la somma della serie dedotta coincide con $S(\xi)$.

Si ha:

$$S^{(p)}(\xi_0) = \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} \xi_0^q$$

e quindi:

$$|S^{(p)}(\xi_0)| < \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| |\xi_0|^q.$$

Sia $\xi \in \Gamma$ tale che $|\xi(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(\xi_0)| |\xi|^p &< \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| |\xi_0|^q |\xi|^p < \\ &< \sum_{n \geq 0} |a_n| \sum_{0 \leq p \leq n} \binom{n}{p} |\xi_0|^{n-p} |\xi|^p = \sum_{n \geq 0} |a_n| (|\xi_0| + |\xi|)^n = \sum_{n \geq 0} |a_n| \varrho^n \end{aligned}$$

dove $\varkappa = |\xi_0| + |\xi|$ è un elemento di Λ_+ tale che $|\varkappa(0)| < \varrho$, quindi la serie

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \varkappa^n$$

è convergente.

Poichè ξ può essere scelto in modo tale che $|\xi(0)|$ sia prossimo quanto si vuole a $\varrho - |\xi_0(0)|$, ne segue che il raggio di convergenza della serie:

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} S^{(p)}(\xi_0) X^p$$

è maggiore o uguale a $\varrho - |\xi_0(0)|$.

Sia ora $\xi \in \Gamma$ tale che $|\xi(0) - \xi_0(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$; la serie doppia:

$$\sum_{p, q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} \xi_0^q (\xi - \xi_0)^p$$

converge assolutamente. Per calcolare la sua somma possiamo raggruppare i termini in due modi diversi. Un primo modo porge:

$$(4) \quad \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{0 \leq p \leq n} \binom{n}{p} (\xi - \xi_0)^p \xi_0^{n-p} \right) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n = S(\xi).$$

Un secondo modo:

$$(5) \quad \sum_{p \geq 0} \frac{(\xi - \xi_0)^p}{p!} \left(\sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} \xi_0^q \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} S^{(p)}(\xi_0) (\xi - \xi_0)^p$$

da cui la tesi per confronto tra (4) e (5).

COROLLARIO 2. *La somma di una serie di potenze a raggio di convergenza $\varrho > 0$ è una funzione analitica nel π -disco di raggio ϱ .*

TEOREMA 10. *Se $f(\xi)$ è una funzione analitica in Γ , allora essa è continua in ogni punto ξ_0 del suo dominio.*

Per definizione $f(\xi)$ è sviluppabile in serie di potenze:

$$f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n (\xi - \xi_0)^n$$

l'uguaglianza essendo verificata per ogni $\xi \in \Gamma$ per cui $|\xi(0) - \xi_0(0)| < r$ con r positivo conveniente. Possiamo quindi senza restrizione essenziale dimostrare la continuità nell'origine di una serie di potenze $S(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n$ con raggio di convergenza ϱ positivo.

Si ha per $|\xi(0)| < \varrho$:

$$|S(\xi) - S(0)| < \sum_{n \geq 1} |a_n \xi^n| < \sum_{n \geq 1} |a_n| |\xi|^n$$

l'ultima serie scritta essendo convergente.

Sia ora $(\xi_k)_k$ una successione (o) -convergente a zero e sia $|\xi_k(0)| < \varrho$ per ogni k , allora, posto $\beta = \bigvee_k \xi_k$, sarà $|\beta(0)| < \varrho$ e $|\xi_k| < \beta$ per ogni k . Vale allora la:

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| |\xi_k|^n = |\xi_k| \sum_{n \geq 1} |a_n| |\xi_k|^{n-1} < |\xi_k| \sum_{n \geq 1} |a_n| \beta^{n-1}.$$

Ne segue che, posto $M = \sum_{n \geq 1} |a_n| \beta^{n-1}$, risulta:

$$|S(\xi_k) - S(0)| < |\xi_k| M$$

da cui si ha che ogni successione $(\xi_k)_k$ (o) -convergente a zero (contenuta nel π -disco di raggio ϱ) fornisce una successione $(S(\xi_k) - S(0))_k$ ancora (o) -convergente a zero. Da ciò segue che ogni successione $(*)$ -convergente a zero si muta in una $(*)$ -convergente a zero, da cui la $(*)$ -continuità della $S(\xi)$ nel punto 0 e per il teorema 1 anche la continuità secondo la metrica.

TEOREMA 11. *Una funzione $f(\xi)$ analitica nel punto ξ_0 è differenziabile nel senso seguente: esiste una funzione $\varphi(\eta)$ infinitesima per $\eta \rightarrow 0$ tale che:*

$$f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0) - f'(\xi_0) \eta = \eta \varphi(\eta).$$

Infatti, riportandoci all'origine e considerando la solita serie di potenze in η :

$$S(\eta) - S(0) = \sum_{n \geq 1} a_n \eta^n$$

poichè $S'(0) = a_1$, risulta:

$$S(\eta) - S(0) - \eta S'(0) = \eta \sum_{n \geq 2} a_n \eta^{n-1}$$

Per cui, posto $\varphi(\eta) = \sum_{n \geq 2} a_n \eta^{n-1}$, si ha:

$$S(\eta) - S(0) - \eta S'(0) = \eta \varphi(\eta)$$

dove $\varphi(\eta)$ è infinitesima con η in virtù del teorema 10.

OSSERVAZIONE. Valgono le solite regole di differenziazione per la somma, per il prodotto, per la funzione reciproca nonchè per la funzione inversa e per la composizione di funzioni nell'ambito delle funzioni analitiche in Γ .

TEOREMA 12. *Se una serie di potenze $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ha raggio di convergenza positivo e se l'origine è punto di accumulazione di zeri, la serie ha tutti i suoi coefficienti nulli.*

Infatti supponiamo che sia a_N il primo coefficiente diverso da zero, allora si avrà:

$$S(\xi) = \xi^N \sum_{n \geq 0} a_{N+p} \xi^p.$$

Scegliamo una successione $(\xi_k)_k$ contenuta nel π -disco di convergenza della $S(X)$ formata da zeri della $S(\xi)$, $\xi_k \neq 0$ per ogni k e tale che $\lim_k \xi_k = 0$; si avrà allora per ogni k

$$S(\xi_k) = 0$$

ma $\xi_k^N \neq 0$ per ogni k , quindi, essendo Γ algebra integra, dovrà essere, per ogni k

$$\sum_{n \geq 0} a_{N+p} \xi_k^p = 0$$

da cui, per $k \rightarrow +\infty$, si ottiene $a_N = 0$, contro l'ipotesi.

COROLLARIO 3. *Se una funzione analitica in Γ ha un punto di accumulazione di zeri interno al suo π -dominio, questo essendo connesso, allora è identicamente nulla in detto dominio.*

TEOREMA 13. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π -dominio D e se $\xi_1, \xi_2 \in D$ con $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, allora*

$$f(\xi_1)(0) = f(\xi_2)(0).$$

TEOREMA 14. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π -dominio $D = \pi^{-1}D_0$, posto $F(z) = f(z)(0)$ per $z \in D_0$, avendo indicato con D_0 un aperto di \mathbf{C} , allora la funzione $F(z)$ della variabile complessa z è analitica in D_0 .*

COROLLARIO 4. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π -dominio $D = \pi^{-1}D_0$ connesso e se l'insieme dei punti $z \in D_0$ per cui $f(z) \in \mathfrak{M}_r$ ha un punto di accumulazione in D_0 , allora $f(\xi) \in \mathfrak{M}_r$ per ogni $\xi \in D$.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. BIGARD - K. KEIMEL - S. WOLFENSTEIN, *Groupes et anneaux réticulés*, Springer-Verlag (1977).
- [2] H. CARTAN, *Théorie élémentaires des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris (1961).
- [3] G. DARBO, *Un'algebra locale reticolata che interviene nella teoria dei sistemi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **60** (1978).
- [4] W. A. J. LUXEMBURG - A. C. ZAAANEN, *Riesz spaces, I*, North Holland, Amsterdam (1971).
- [5] B. Z. VULIKH, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff, Groningen (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 aprile 1981.