Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Zanovello

Su alcune formule fra le funzioni di Struve e di Weber d'ordine intero

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 89-93

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__89_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1980)

Su alcune formule fra le funzioni di Struve e di Weber d'ordine intero.

RENATO ZANOVELLO (*)

SUNTO - In questa Nota, pongo in evidenza alcune formule fra le funzioni di Struve e di Weber d'ordine intero; due di esse, già presenti nella letteratura in modo inesatto, vengono riportate correttamente, altre due invece permettono di ricavare (anche dal punto di vista numerico) la funzione di Weber d'ordine pari mediante combinazioni di funzioni di Struve d'ordine intero non negativo e viceversa. In particolare, ottengo una formula che esprime la funzione di Weber d'ordine $2n$ mediante funzioni di Struve, già calcolate, fino all'ordine n solamente.

In questioni di matematica applicata sono molto utili delle formule che legano la funzione di Struve $\boldsymbol{H}_\nu(z)$ e quella di Weber $\boldsymbol{E}_\nu(z)$, per ordini interi. Alcune di esse sono ricavate in [1, pp. 336-337]; esse compaiono anche in altri testi [2, p. 40], [3, p. 413], [4, p. 982], [5, p. 498]. È da dire però che non sono riportate con esattezza, il che impone una correzione delle medesime secondo le considerazioni del § 1.

Nel § 2, porrò invece in evidenza altre due formule che esprimono la funzione di Weber d'ordine pari, positivo, negativo, o nullo mediante un numero finito di funzioni di Struve d'ordine intero non negativo e viceversa, la funzione di Struve d'ordine intero non negativo mediante la somma di un numero finito di funzioni di Weber d'ordine pari positivo o nullo.

(*) Indirizzo dell'A.: Centro di Calcolo Scientifico dell'Università, Via Belzoni, 7, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

§ 1. – Per n intero positivo o nullo, vale la [1, p. 337]:

$$H_n(z) + E_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}(m-1)\pi i\right](z/2)^{n-m}}{\Gamma(1-m/2)\Gamma(n+1-m/2)}$$

Ora, tenendo conto che per m pari i termini della suddetta somma sono nulli e che inoltre è:

$$\frac{\exp[i\pi m]}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)} = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\pi},$$

posso scrivere, con le classiche notazioni:

$$(1)\qquad H_n(z) + E_n(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})(z/2)^{n-2m-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}+n-m)} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{<n/2} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})(z/2)^{n-2m-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}+n-m)}.$$

La (1), che coincide con quanto riportato in [2], [3], [4], [5], differisce dal risultato ottenuto in [1], che cade in difetto per n dispari.

Analogamente, quando $-n$ è un intero negativo, ho:

$$H_{-n}(z) + E_{-n}(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\exp[-i(\pi/2)(m-2)](z/2)^{m-n-1}}{\Gamma((m-1)/2+1)\Gamma((m-1)/2+1-n)}.$$

Ora, poichè per m dispari i termini della somma sono nulli, la suddetta formula diventa:

$$(2)\qquad H_{-n}(z) + E_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{[(n-2)/2]} \frac{\exp[-i\pi m](z/2)^{2m+1-n}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2}-n)}.$$

Tenendo conto che è:

$$\frac{\exp[-i\pi m]}{\Gamma(m+\frac{3}{2}-n)} = \frac{(-1)^{n+1}\Gamma(n-m-\frac{1}{2})}{\pi},$$

posso scrivere la (2) nel seguente modo:

$$(3)\qquad H_{-n}(z) + E_{-n}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sum_{m=0}^{[(n-2)/2]} \frac{\Gamma(n-m-\frac{1}{2})(z/2)^{2m+1-n}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sum_{m=0}^{<(n-1)/2} \frac{\Gamma(n-m-\frac{1}{2})(z/2)^{2m+1-n}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})},$$

con ovvio significato dei simboli.

La (3) coincide con la formula corrispondente in [1], ma differisce dalle formule riportate in [2], [3], [4], [5], che cadono in difetto per il caso di n dispari.

Le formule corrette (1), (3) sono state usate in [6].

§ 2. – Dalla definizione della funzione di Weber, accompagnata da [4, p. 401 (7)], ricavo:

$$(4)\qquad \boldsymbol{E}_{2n}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\cos(2n\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(z\sin\theta)\cos(2n\theta)\,d\theta =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(z\cos\theta)\cos(2n\theta)\,d\theta\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Tenuto conto dell'identità che esprime $\cos(2n\theta)$ mediante somma d potenze pari di $\sin\theta$ [4, p. 28], identità che posso scrivere:

$$\cos(2n\theta) = \pi^{\frac{1}{2}} n\cdot\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}\Gamma(2n-k)\sin^{2n-2k}\theta}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}\,,$$

come si può verificare direttamente e tenuto conto altresì della definizione della funzione di Struve (v. ad es. [1, p. 328]):

$$(5)\qquad \boldsymbol{H}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi/2} \sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

nel presente caso, ottengo per $z \neq 0$:

$$(6)\qquad \boldsymbol{E}_{2n}(z) = n\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(2n-k)(2/z)^{n-k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}\boldsymbol{H}_{n-k}(z)\,,$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

formula che esprime la funzione di Weber d'ordine $2n$ mediante funzioni di Struve fino all'ordine n, per il calcolo numerico delle quali il lettore può vedere [7]. Per $z = 0$, è $E_{\pm 2n}(0) = 0$.

Per $n = 0$, è noto che è:

$$E_0(z) = -H_0(z)\,,$$

mentre per l'ordine intero pari negativo, ragionando come all'inizio del presente paragrafo, ricavo:

$$E_{-2n}(z) = E_{2n}(z)\,,$$

il che riconduce alla (6).

Viceversa, nella (5) con $\nu = n$ intero non negativo, sostituisco $\sin^{2n}\theta$ con la sua espressione data da [4, p. 25]:

$$\sin^{2n}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}2\binom{2n}{k}\cos\left[2(n-k)\theta\right] + \binom{2n}{n}\right\}.$$

Tenuto conto quindi di (4) e del fatto che è:

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(n+1)}{\pi}$$

come si può verificare facendo ricorso ai semifattoriali, ottengo in definitiva con alcune semplificazioni la seguente formula:

$$H_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \cdot \left\{-2\Gamma(n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{E_{2n-2k}(z)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-k+1)} - \frac{E_0(z)}{\Gamma(n+1)}\right\}, \tag{7}$$

che completa il presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 1966.

[2] A. Erdélyi - W. Magnus - F. Oberhettinger - F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, Mc Graw-Hill, 1953.

[3] Y. L. LUKE, *Mathematical Functions and their Approximations*, Academic Press, 1975.
[4] I. S. GRADSHTEYN - I. W. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
[5] M. ABRAMOWITZ - I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1965 e segg.
[6] R. ZANOVELLO, *Sull'analisi numerica delle trasformate di Laplace delle funzioni di Anger e di Weber*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 62 (in corso di stampa).
[7] R. ZANOVELLO, *Sul calcolo numerico della funzione di Struve* $Hv(z)$, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. Torino, **32** (1973-74), pp. 251-269.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 luglio 1979.