RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CHRISTIAN CONSTANDA

Su l'esistenza della soluzione per la flessione delle piastre elastiche micropolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 149-153

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__149_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Su l'esistenza della soluzione per la flessione delle piastre elastiche micropolari

CHRISTIAN CONSTANDA (*)

1. – A. C. Eringen [1] ed A. E. Green e P. M. Naghdi [2] hanno stabilito le equazioni della teoria delle piastre elastiche micropolari, supponendo che gli spostamenti u_i e le microrotazioni φ_i (i $= 1, 2, 3$) abbiano la forma

$$u_\varrho = u_\varrho^{(0)}(x_1, x_2) + x_3 v_\varrho(x_1, x_2), \quad u_3 = w(x_1, x_2),$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2), \quad (\varrho = 1, 2).$$

Vista la linearità della teoria, si dimostra che il problema generale può essere decomposto in altri due: il problema della tensione piana, caratterizzato dalle funzioni $u_\varrho^{(0)}$, φ_3, ed il problema della flessione, caratterizzato dalle funzioni v_ϱ, w, φ_ϱ. Quest'ultimo è stato studiato con l'aiuto della variabile complessa in [3]. In questo articolo ci si propone di stabilire per il problema della flessione, attraverso metodi variazionali, un teorema su l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole nel senso di [4].

Se si nota: D – il dominio della sezione mediana (nel piano $x_1 0 x_2$); c – la sua frontiera, di cui la normale esterna unitaria è $\underset{\sim}{n}(n_1, n_2)$; h_0 – lo spessore costante della piastra; $h = h_0/\sqrt{12}$; t_{ij} – le tensioni; m_{ij} – le coppie delle tensioni; f_i – le forze della massa; g_i – le coppie della massa; $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa, \lambda, \mu$ – le costanti elastiche del materiale; se si considera che gli indici greci prendono

Indirizzo dell'A.: Department of Mathematics - University of Strathclyde - Glasgow, Great Britain.

i valori 1, 2 e se si accetta la convenzione di sommare gli indici ripetuti, allora le equazioni dell'equilibrio sul problema della flessione sono [1]:

$$Lu = F, \tag{1}$$

dove

$$\begin{aligned}
&u = (v_1, v_2, w, \varphi_1, \varphi_2), \quad F = (p_1, p_2, p, q_1, q_2),\\
&Lu = (A_1 u, A_2 u, A u, B_1 u, B_2 u),\\
&-A_\varrho u = h^2(\lambda + \mu)v_{\sigma,\sigma\varrho} + h^2(\mu + \varkappa)v_{\varrho,\sigma\sigma} - (\mu + \varkappa)v_\varrho + \mu\varepsilon_{\varrho\sigma}\varphi_\sigma - \mu w,_\varrho,\\
&-A u = (\mu + \varkappa)w,_{\sigma\sigma} + \mu v_{\sigma,\sigma} + \varkappa\varepsilon_{\sigma\varrho}\varphi_{\varrho,\sigma},\\
&-B_\varrho u = (\alpha + \beta)\varphi_{\sigma,\sigma\varrho} + \gamma\varphi_{\varrho,\sigma\sigma} + \varkappa\varepsilon_{\sigma\varrho}(v_\sigma - w,_\sigma) - 2\varkappa\varphi_\varrho,\\
&(\ldots),_\varrho = \frac{\partial}{\partial x_\varrho}(\ldots), \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1,\\
&p_\varrho = J_1 f_\varrho + H_1 t_{3\varrho}, \quad p = J_0 f_3 + H_0 t_{33}, \quad q_\varrho = J_0 g_\varrho + H_0 m_{3\varrho},\\
&J_i\psi = \frac{1}{h_0}\int_{-h_0/2}^{+h_0/2} x_3^i\psi\, dx^3, \quad H_i\psi = \frac{1}{h_0}\Big[x_3^i\psi\Big]_{x_3=-h_0/2}^{x_3=+h_0/2}, \qquad (i = 0,1).
\end{aligned}$$

2. - Si possono facilmente ottenere le formule di Betti [5]:

$$\int_D uLu\, da = \frac{2}{h_0}\int_D E(u)\, da - \int_c uTu\, ds, \tag{2}$$

$$\int_D (uLv - vLu)\, da = \int_c (vTu - uTv)\, ds, \tag{3}$$

dove u, v sono delle funzioni vettoriali regolari, $E(u)$ è la densità d'energia interna

$$E(u) = h_0(h^2 E_1 + E_2 + E_3), \tag{4}$$

$$E_1 = \lambda v_{\varrho,\varrho} v_{\sigma,\sigma} + (\mu + \varkappa) v_{\varrho,\sigma} v_{\varrho,\sigma} + \mu v_{\varrho,\sigma} v_{\sigma,\varrho},$$

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad E_2 &= a\varphi_{\varrho,\varrho}\,\varphi_{\sigma,\sigma} + \beta\varphi_{\varrho,\sigma}\,\varphi_{\sigma,\varrho} + \gamma\varphi_{\varrho,\sigma}\,\varphi_{\varrho,\sigma}\,, \\
E_3 &= (\mu+\varkappa)\,(v_\varrho\, v_\varrho + w,_\varrho\; w,_\varrho) + 2\varkappa\varphi_\varrho\,\varphi_\varrho + 2\varkappa\varepsilon_{\sigma\varrho}\varphi_\varrho\,(w,_\sigma - v_\sigma) + \\
&\qquad + 2\mu v_\varrho\, w,_\varrho
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T\underset{\sim}{u} &= (N_1\underset{\sim}{u}\,,\; N_2\underset{\sim}{u}\,,\; N\underset{\sim}{u}\,,\; M_1\underset{\sim}{u}\,,\; M_2\underset{\sim}{u})\,, \\
N_\varrho\underset{\sim}{u} &= n_\sigma J_1 t_{\sigma\varrho}\,,\; N\underset{\sim}{u} = n_\sigma J_0\, t_{\sigma 3}\,,\; M_\varrho\underset{\sim}{u} = n_\sigma J_0 m_{\sigma\varrho}\,.
\end{aligned}
$$

3. – Si considera una piastra incastrata, dunque sul contorno della quale sono date le seguenti condizioni al limite:

$$
(6) \qquad \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \quad \text{su } c\,.
$$

Si introduce l'insieme dei vettori

$$
U = \{\underset{\sim}{u} \in \underbrace{[C^2(D) \cap C^0(D \cup c)] \times \ldots \times [C^2(D) \cup C^0(D \cup c)]}_{5 \text{ volte}}\,,\; \underset{\sim}{u} \text{ verifica (6)}\}
$$

e si organizza U come uno spazio Hilbert reale con l'aiuto della norma

$$
\|\underset{\sim}{u}\|^2 = (\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{u}) = \int_D (v_\varrho\, v_\varrho + w^2 + \varphi_\varrho\,\varphi_\varrho)\, da\,.
$$

Lemma. Se la forma quadratica $\omega(\xi, \xi) = a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, dove a_{ij} sono costanti, è positivamente definita, allora esiste una costante $\nu_0 > 0$ tale che

$$
(7) \qquad \omega\,(\xi, \xi) \geq \nu_0\,\xi_i\,\xi_i\,,
$$

qualunque sia il vettore $\xi(\xi_1\,, \xi_2\,, \ldots, \xi_n)$.

Teorema 1. Se

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
&2\lambda + 2\mu + \varkappa > 0\;,\; 2\mu + \varkappa > 0\;,\; \varkappa > 0\,, \\
&2a + \beta + \gamma > 0\;,\; \gamma + \beta > 0\;,\; \gamma - \beta > 0\,,
\end{aligned}
$$

allora

a) per ogni coppia di vettori $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ di U si ha

$$(\underset{\sim}{u}, L\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{v}, L\underset{\sim}{u}) ; \tag{9}$$

b) esiste una costante k^2 (che dipende da D) tale che si ha

$$(\underset{\sim}{u}, L\underset{\sim}{u}) \geq k^2 \|\underset{\sim}{u}\|^2, \text{ qualunque sia il vettore } \underset{\sim}{u} \in U . \tag{10}$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà (9) risulta da (3). Per stabilire (10) si utilizza la lemma precedente, (4), (5), (8) e l'ineguaglianza di Friedrichs, che ha luogo per ogni funzione $\psi \in C^1(D) \cap C^0(D \cap c)$, $\psi = 0$ su c:

$$\int_D \psi_{,\alpha} \psi_{,\alpha} \, da \geq k_0^2 \int_D \psi^2 \, da ,$$

dove la costante k_0^2 dipende da D.

Si ha successivamente:

$$E_1 = (\lambda + 2\mu + \varkappa)(v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) + 2\lambda v_{1,1} v_{2,2} + (\mu + \varkappa)(v_{1,2}^2 + v_{2,1}^2) + \\ + 2\mu v_{1,2} v_{2,1} \geq \nu_1^2 (v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) + \nu_2^2 (v_{1,2}^2 + v_{2,1}^2) ,$$

$$\int_D h^2 E_1 \, da \geq k_1^2 \int_D v_\varrho v_\varrho \, da , \quad k_1^2 = h^2 k_0^2 \min (\nu_1^2, \nu_2^2) ;$$

$$E_2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{2,2}^2) + 2\alpha\varphi_{1,1} \varphi_{2,2} + \gamma (\varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2) + \\ + 2\beta\varphi_{1,2} \varphi_{2,1} \geq \nu_3^2 (\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{2,2}^2) + \nu_4^2 (\varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2) ,$$

$$\int_D E_2 \, da \geq k_2^2 \int_D \varphi_\varrho \varphi_\varrho \, da , \quad k_2^2 = k_0^2 \min (\nu_3^2, \nu_4^2) ;$$

$$E_3 = (\mu + \varkappa)(u_1^2 + u_2^2 + w_1^2 + w_2^2) - 2\mu (u_1 w_1 + u_2 w_2) ,$$

$$[u_1 = \varphi_1 - w_{,2} , \; u_2 = \varphi_2 + w_{,1} , \; w_1 = \varphi_1 + v_2 , \; w_2 = \varphi_2 - v_1] ,$$

$$E_3 \geq \nu_5^2 (u_\varrho u_\varrho + w_\varrho w_\varrho) \geq \nu_5^2 u_\varrho u_\varrho ;$$

$$2\int_D E(\underset{\sim}{u})\,\mathrm{da} = 2h_0\int_D (h^2E_1 + E_2 + E_3)\,\mathrm{da} \geq h_0 k_3^2 \int_D (v_\varrho v_\varrho + \varphi_\varrho \varphi_\varrho + u_\varrho u_\varrho)\,\mathrm{da}$$

$$= h_0\, k_3^2 \int_D [v_\varrho\, v_\varrho \;+\; 2\varphi_\varrho\, \varphi_\varrho \;+\; w,_\varrho\, w,_\varrho \;+\; 2(\varphi_2\, w,_1 \;-\; \varphi_1\, w,_2)]\;\mathrm{da}\,,$$

$$k_3^2 = 2\min\,(k_1^2\,,\, k_2^3\,,\, \nu_5^3)\;;$$

$$2\int_D E\,(\underset{\sim}{u})\;\mathrm{da} \geq h_0\, k_4^2 \int_D \;(v_\varrho\, v_\varrho \;+\; \varphi_\varrho\, \varphi_\varrho \;+\; w,_\varrho\, w,_\varrho)\;\mathrm{da} \geq h_0\, k^2\, \|\underset{\sim}{u}\|^2\,.$$

Vista (2), si ottiene la relazione (10).

4. – Si introduce il funzionale quadratico

$$\Psi\,(\underset{\sim}{u}) = (\underset{\sim}{u},\, L\underset{\sim}{u}) - 2(\underset{\sim}{u},\, \underset{\sim}{F})\,,$$

e si nota con U_0 la chiusura di U in rapporto alla norma

$$|\underset{\sim}{u}|^2 = [\underset{\sim}{u}\,,\, \underset{\sim}{u}] = (\underset{\sim}{u},\, L\underset{\sim}{u})\,.$$

Se $\underset{\sim}{F} \in \underbrace{L_2\,(D) \times \ldots \times L_2(D)}_{5\ \text{volte}}$ e se si considera $\Psi(\underset{\sim}{u})$ definita su U_0, si ottiene [4]:

TEOREMA 2. Esiste un vettore unico $\underset{\sim}{u}_0 \in U_0$ per il quale $\Psi(\underset{\sim}{u})$ realizza il suo valore minimo. Questo vettore è il limite in media della sequenza degli approssimanti di Ritz.

Allora $\underset{\sim}{u}_0 \in W_1(D)$ — lo spazio delle funzioni aventi derivate generalizzate (ai sensi delle distribuzioni) del primo ordine, di cui il quadrato è integrabile su D, e, dunque, $\underset{\sim}{u}_0$ è la soluzione debole, nel senso di [4], del problema.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. C. ERINGEN, Z.A.M.P., 18, 1967, p. 12.
[2] A. E. GREEN e P. M. NAGHDI, Quart. J. Mech. Appl. Math., 20, 1967, p. 2.
[3] C. CONSTANDA, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 278, 1974, p. 1267.
[4] S. G. MIKHLIN, *Il problema del minimo dei funzionali quadratici* (in lingua russa), Mosca-Leningrado, 1952.
[5] C. CONSTANDA, Letters Appl. Engng. Sci., 2, 1974, p. 329.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 luglio 1977.