

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CHICCO

**Esistenza ed unicità della soluzione di una disequazione
variazionale associata ad un operatore ellittico del
secondo ordine a coefficienti discontinui**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 57 (1977), p. 17-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__17_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Esistenza ed unicità della soluzione
di una disequazione variazionale
associata ad un operatore ellittico
del secondo ordine a coefficienti discontinui.**

MAURIZIO CHICCO (*)

SOMMARIO - Nel presente lavoro si considera una disequazione variazionale associata ad un operatore lineare ellittico del secondo ordine in forma di divergenza e a coefficienti discontinui. Si prova che la disequazione variazionale ammette una ed una sola soluzione nella ipotesi che il primo autovalore dell'operatore ellittico associato sia negativo ovvero (ciò che è lo stesso) se per tale operatore vale il principio di massimo generalizzato.

1. - Introduzione.

Il presente lavoro è una continuazione di [6] in cui si danno teoremi di esistenza ed unicità per la soluzione di una disequazione variazionale associata ad un operatore lineare ellittico del secondo ordine, in forma di divergenza, a coefficienti discontinui e non (necessariamente) coercivo. In [6] si faceva tuttavia l'ipotesi che

$$(1) \quad c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} \geq 0 \quad \text{nel senso delle distribuzioni.}$$

(*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico - Università di Genova - Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio di Matematica Applicata del C.N.R., Genova.

Nel presente lavoro tale ipotesi viene sostituita con un'altra più debole la quale si dimostra sufficiente per l'esistenza, l'unicità e la continuità della soluzione della disequazione variazionale.

Inoltre nel presente lavoro viene estesa la classe di « ostacoli » per i quali è valido il teorema di esistenza ed unicità. Mentre in [6] si supposeva che la funzione ostacolo ψ fosse tale che

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{esiste } f \in L_p(\Omega), \text{ con } p > n, \text{ tale che} \\ \psi \in H^1(\Omega), \psi \leq 0 \text{ su } \partial\Omega, \quad a(\psi, v) = \int_{\Omega} f v dx \\ \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

nel presente lavoro si suppone solo $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Nel paragrafo 6 si dà qualche risultato anche nel caso $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$, $\psi < 0$ su $\partial\Omega$.

Lavori precedenti che trattano problema simili, pur con ipotesi diverse, sono ad esempio [4], [5], [7], [10] oltre al già citato [6].

2. - Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n , con $n \geq 3$.

I risultati valgono anche per $n = 2$, pur di modificare qualche esponente di sommabilità negli spazi funzionali considerati. Si suppone che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω sia abbastanza regolare, e precisamente che Ω sia $H_0^1(\Omega)$ — ammissibile (vedi [8]). Ciò si verifica ad esempio se $\partial\Omega$ è rappresentabile localmente come grafico di una funzione lipschitziana.

Siano $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ gli spazi di Hilbert sui reali ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Sia $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ lo spazio di Banach delle funzioni hölderiane di esponente λ ($0 < \lambda \leq 1$) in $\bar{\Omega}$, cioè delle funzioni u per le quali è finita la norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} &= \\ &= \max_{\bar{\Omega}} |u| + \sup \{ |u(x') - u(x'')| : |x' - x''|^{-\lambda} : x', x'' \in \Omega, x' \neq x'' \}. \end{aligned}$$

Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $c \in L_{p/2}(\Omega)$, $p > n$, c_0 costante positiva, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j \geq c_0 |t|^2$ q. o. in Ω e per ogni $t \in R^n$.

Sia $a(.,.)$ la forma bilineare su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ così definita

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx.$$

Data una funzione $u \in H^1(\Omega)$, un sottoinsieme compatto B contenuto in Ω ed un numero reale k , si dirà che $u \leq k$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione u_j ($j = 1, 2, \dots$) tale che $u_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_j \leq k$ in B ($j = 1, 2, \dots$) e $\lim_j \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Nel caso in cui $B = \bar{\Omega}$, si potrebbe dimostrare che $u \leq k$ in $\bar{\Omega}$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se e solo se $u \leq k$ q. o. in Ω . Useremo pertanto indifferentemente i due tipi di disuguaglianze se $B = \bar{\Omega}$.

Sia ψ una funzione di $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che si possa estendere ad una funzione, ancora denotata con ψ , appartenente ad $H^1(\Omega_1)$, essendo Ω_1 un aperto contenente $\bar{\Omega}$ (ciò si verifica senz'altro se la frontiera $\partial\Omega$ è localmente lipschitziana). Sia inoltre $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Indichiamo con k l'insieme (convesso e chiuso in $H_0^1(\Omega)$)

$$k = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ q. o. in } \Omega\}.$$

Per ulteriori proprietà degli spazi $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e della forma bilineare $a(.,.)$ in connessione con le equazioni ellittiche di tipo variazionale si rimanda a [9].

L'ipotesi più importante che si farà nel presente lavoro è questa :

$$(4) \quad \begin{cases} \text{esiste una funzione } w \in H^1(\Omega) \text{ tale che } w \geq 0 \\ \text{q. o. in } \Omega \text{ e risulta } a(w, v) > 0 \text{ per ogni } v \in C_0^1(\Omega), \\ v \geq 0 \text{ in } \Omega, v(x) > 0 \text{ per qualche } x \in \Omega. \end{cases}$$

Per i risultati di [2] tale ipotesi (4) è equivalente alle (4'), (4'') seguenti :

$$(4') \quad \begin{cases} \text{per ogni funzione } u \in H^1(\Omega) \text{ tale che } u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ nel senso} \\ \text{di } H^1(\Omega) \text{ e } a(u, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega, \\ \text{risulta } u \leq 0 \text{ q. o. in } \Omega; \end{cases}$$

$$(4'') \left\{ \begin{array}{l} \text{detto } \lambda_1 \text{ l'autovalore del problema al contorno} \\ \left\{ \begin{array}{l} a(u, v) + \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \\ \text{avente massima parte reale, risulta } \lambda_1 < 0. \end{array} \right.$$

Tali ipotesi sono senz'altro verificate ad esempio se vale la (1) (vedasi [1], [9]) oppure se la forma bilineare $a(.,.)$ è coercitiva su $H_0^1(\Omega)$ (vedi [9]).

3. - Lemmi preliminari.

Nel presente paragrafo si proveranno esistenza ed unicità della soluzione $u \in \mathbf{k}$ della disequazione variazionale

$$a(u, v - u) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in \mathbf{k}$$

con un'ipotesi supplementare, già utilizzata in [6]: cioè si suppone che esista una funzione $f \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$) tale che $a(\psi, v) = \int_{\Omega} f v dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

LEMMA 1. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, ed inoltre esista una funzione $f \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$) tale che $a(\psi, v) = \int_{\Omega} f v dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Allora esiste una soluzione u appartenente a $\mathbf{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ della disequazione variazionale*

$$(5) \quad a(u, v - u) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in \mathbf{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta ripetere parola per parola quella di [6] (teorema 2.3), osservando che per la ipotesi (4') è ancora verificato il « principio di massimo generalizzato ». Pertanto è ancora vero che $u_n \geq \psi$ in Ω , essendo u_n le approssimazioni di u di cui si parla in [6]. Il resto della dimostrazione del teorema 2.3 di [6] non cambia.

LEMMA 2. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, sia $u \in \mathbf{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ una soluzione della disequazione variazionale (5), sia z*

una funzione di $H^1(\Omega)$ tale che $z \geq 0$ su $\partial\Omega$ (nel senso di $H^1(\Omega)$), $\psi \leq z$ q. o. in Ω e $a(z, v) \geq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ in Ω . Allora risulta $u \leq z$ q. o. in Ω .

DIMOSTRAZIONE. Essendo sia u sia ψ funzioni continue in $\overline{\Omega}$, l'insieme

$$(6) \quad B = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) = \psi(x)\}$$

è chiuso. Allora, come facilmente si verifica, la funzione u è soluzione nell'aperto $\Omega \setminus B$ dell'equazione

$$(7) \quad a(u, v) = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B).$$

Inoltre per le ipotesi fatte su z risulta pure

$$(8) \quad a(z, v) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B), \quad v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega \setminus B,$$

da cui subito

$$(9) \quad a(u - z, v) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B), \quad v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega \setminus B.$$

Dalla definizione di $\mathbf{k}$, dal fatto che $u \in \mathbf{k}$ e per le ipotesi fatte su z , segue che $u - z \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$. Per quanto riguarda ∂B (cioè la frontiera di B) si ha: $z \geq \psi$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$ ed $u = \psi$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$ (si veda ad esempio [3]). Pertanto è pure $u - z \leq 0$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$, ed infine

$$(10) \quad u - z \leq 0 \quad \text{su } \partial(\Omega \setminus B) \text{ nel senso di } H^1(\Omega).$$

Dalle (4'), (9), (10) si deduce

$$(11) \quad u \leq z \quad \text{q. o. in } \Omega \setminus B.$$

Essendo poi per definizione $u(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in B$ e $\psi \leq z$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$, si conclude che $u \leq z$ q. o. in Ω .

LEMMA 3. Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, sia $u \in \mathbf{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione della disequazione variazionale (5), sia $\psi_1 \in H^1(\Omega)$, $\psi_1 \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$, $\psi \leq \psi_1$ q. o. in Ω .

Sia $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \geq \psi_1$ q. o. in Ω , una soluzione della disequazione variazionale

$$(12) \quad a(u_1, v - u_1) \geq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi_1 \text{ q. o. in } \Omega.$$

Allora risulta $u \leq u_1$, q. o. in Ω .

DIMOSTRAZIONE. Ponendo nella (12) $v = u_1 + \varphi$ con $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ q. o. in Ω , si ottiene che

$$(13) \quad a(u_1, \varphi) \geq 0 \text{ per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega.$$

Pertanto, essendo pure $\psi \leq \psi_1 \leq u_1$ q. o. in Ω , si può applicare il lemma precedente (ponendovi $z = u_1$) ottenendo, come si voleva, che $u \leq u_1$ q. o. in Ω .

LEMMA 4. Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, sia $u \in \mathbf{k} \cap C^0(\bar{\Omega})$ soluzione della disequazione variazionale (5). Allora esiste una costante K_1 , dipendente da n , Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$, tale che risulti

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\max \psi, 0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi (4) la soluzione w del problema di Dirichlet

$$(14) \quad \begin{cases} a(w, v) = 0 & \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) \\ w - 1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(certamente esistente ed unica per la teoria di Riesz-Fredholm e perchè per la (4'') lo zero non è autovalore del problema (14)) è non negativa in Ω . Inoltre per il Corollario 1 di [2] w è strettamente positiva in ogni compatto di Ω , ed è hölderiana in $\bar{\Omega}$ per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ e per i risultati di [9]. Pertanto risulta $\min_{\bar{\Omega}} w > 0$. Essendo $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\psi(x) \leq K_2 w(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}$$

pur di porre $K_2 = (\min_{\bar{\Omega}} w)^{-1} \max_{\bar{\Omega}} \{\max \psi, 0\}$.

Allora la funzione $K_2 w$ si comporta come la funzione z del lemma 2, in quanto è non negativa su $\partial\Omega$ (nel senso di $H^1(\Omega)$) e non inferiore a ψ in Ω , mentre $a(K_2 w, v) = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Dal lemma 2 segue quindi

$$(16) \quad u(x) \leq K_2 w(x) \quad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

Ricordando la definizione di K_2 , dalla (16) segue

$$u(x) \leq (\max_{\overline{\Omega}} w) (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1} \max \{ \max_{\overline{\Omega}} \psi, 0 \} \quad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}$$

pertanto il lemma risulta provato con $K_1 = (\max_{\overline{\Omega}} w) (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1}$.

LEMMA 5. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, siano u, ψ, u_1, ψ_1 , come nel lemma 3, sia inoltre $a(\psi_1, v) = \int_{\Omega} f_1 v \, dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, ove $f_1 \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$). Allora esiste una costante K_1 dipendente da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$ tale che risulti*

$$0 \leq u_1 - u \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi) \quad \text{q. o. in } \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi fatte la funzione ψ_1 è continua in $\overline{\Omega}$ e quindi ivi limitata. Sia w la soluzione del problema di Dirichlet (14); come si è già osservato risulta $\min w > 0$ e w è hölderiana in $\overline{\Omega}$. Posto

$$K_3 = (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1} \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi)$$

risulta evidentemente

$$(17) \quad \psi_1 - \psi \leq K_3 w \quad \text{q. o. in } \Omega.$$

Posto

$$B_1 = \{ x \in \overline{\Omega} : u_1(x) = \psi_1(x) \}$$

l'insieme B_1 è chiuso e si ha

$$(18) \quad a(u_1, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega \setminus B_1).$$

Poichè è pure, come si verifica facilmente,

$$(19) \quad a(u, v) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \quad \text{q. o. in } \Omega$$

ne segue

$$(20) \quad a(u_1 - u, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega \setminus B_1), v \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \setminus B_1.$$

Poichè $u, u_1 \in H_0^1(\Omega)$ è $u_1 - u = 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$. Inoltre è $u_1 = \psi_1$ su ∂B_1 , $u \geq \psi$ q. o. in Ω , e quindi $u_1 - u \leq \psi_1 - \psi$ su B_1 nel senso di $H^1(\Omega)$. Dalla (17) segue quindi

$$(21) \quad u_1 - u \leq K_3 w \quad \text{su } \partial(\Omega \setminus B_1) \quad \text{nel senso di } H^1(\Omega).$$

Dalle (14), (20) si ha

$$a(u_1 - u - K_3 w, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega \setminus B_1), v \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \setminus B_1$$

ed essendo pure, per la (21), $u_1 - u - K_3 w \leq 0$ su $\partial(\Omega \setminus B_1)$ nel senso di $H^1(\Omega)$, per la (4') si deduce che

$$u_1 - u \leq K_3 w \quad \text{q.o. in } \Omega \setminus B_1.$$

Per la definizione di B_1 e per la (17) la stessa disuguaglianza vale q. o. in Ω .

Ricordando la definizione di K_3 e il lemma 3 si ottiene infine

$$0 \leq u_1 - u \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi) \quad \text{q. o. in } \Omega,$$

essendo $K_1 = (\max_{\overline{\Omega}} w) (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1}$. Si osservi che la costante K_1 è la stessa del lemma 4.

LEMMA 6. *Siano verificate le ipotesi del lemma 4 e sia u una soluzione della disequazione variazionale (5).*

Allora esiste una costante K_4 , dipendente da n , Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$, tale che risulti

$$\left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_4 \left[\max_{\overline{\Omega}} \psi^+ + \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} \right]$$

ove si è posto per brevità $\psi^+ = \max(\psi, 0)$ e $\psi_x^+ = \left[\sum_{i=1}^n (\psi^+)_{x_i}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente la funzione ψ^+ appartiene al convesso k pertanto, essendo u soluzione della disequazione variazionale (5), si ha

$$(22) \quad a(u, u) \leq a(u, \psi^+)$$

cioè

$$(23) \quad \int_{\Omega} \sum_{j, i=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \leq - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) u_{x_i} u + cu^2 \right\} dx + \\ + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i, j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \psi_{x_j}^+ + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} \psi^+ + d_i u \psi_{x_i}^+) + cu \psi^+ \right\} dx.$$

Poniamo ancora, per brevità, $M = \max_{\bar{\Omega}} u$, $M_1 = \max_{\bar{\Omega}} \psi$.

Dalla (23) e dalle ipotesi fatte sui coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$ si deduce allora

$$(24) \quad c_o \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq K_5 \left[M \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} + M^2 + \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} + \right. \\ \left. + M_1 \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} + M \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} + M M_1 \right]$$

ove la costante K_5 dipende dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$, da n e da Ω .

Dalla (24) si deduce, con facili calcoli

$$(25) \quad c_o \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq K_5 \left[3 \eta \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(2 + \frac{1}{4 \eta} \right) M^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \eta} \right) \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \eta} \right) M_1^2 \right]$$

dove η è un qualunque numero positivo. Scegliamo $\eta = c_o/2K_5$; ricordando che per il lemma 4 è $M \leq K_1 M_1$, dalla (25) si ottiene

$$(26) \quad \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq K_6 \left[M_1^2 + \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right],$$

essendo ancora K_6 una costante dipendente da n , Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$. Poichè $u \in H_0^1(\Omega)$, per note proprietà di tale spazio dalla (26) segue infine

$$\left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_7 \left[M_1 + \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} \right]$$

essendo K_7 una costante dipendente dagli stessi argomenti di K_6 .

4. - Esistenza della soluzione.

TEOREMA 7. *Siano verificate le ipotesi elencate nel paragrafo 2. Allora esiste (almeno) una soluzione $u \in \mathbf{k}$ della disequazione variazionale (5).*

DIMOSTRAZIONE. Fissati due numeri ε e δ tali che $0 < \delta < \varepsilon/2$, per noti risultati e per le ipotesi fatte sulla funzione ψ esiste una funzione $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che

$$(27) \quad \|g - \psi + \varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta, \quad \|g - \psi + \varepsilon\|_{C^0(\bar{\Omega})} < \delta.$$

Poichè $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert e la forma $a(.,.)$ è bilineare su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, esiste una funzione $h \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$(28) \quad a(g, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n h_{x_i} v_{x_i} dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

Inoltre, poichè $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, si vede facilmente che risulta $h_{x_i} \in L_p(\Omega)$ con $p > n$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Sia h_1 una funzione di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ e sia g_1 la soluzione del problema al contorno

$$(29) \quad \begin{cases} a(g_1, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (h_1)_{x_i} v_{x_i} dx & \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) \\ g_1 - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Dalle (28), (29) e dai risultati di [9] segue che la funzione g_1 è hölderiana in $\bar{\Omega}$ di esponente λ (dipendente da n , Ω e dai coeffi-

cienti della forma bilineare $a(.,.)$; inoltre si ha

$$(30) \quad \|g_1 - g\|_{H^1(\Omega)} + \|g_1 - g\|_{C^0, \lambda(\Omega)} \leq K_8 \sum_{i=1}^n \|(h_1 - h)_{x_i}\|_{L_p(\Omega)}$$

essendo K_8 una costante anch'essa dipendente da n , Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$. La funzione h appartiene ad $H_0^1(\Omega)$ e quindi ad $H_0^1(R^n)$ pur di prolungarla uguale a zero fuori di Ω . Inoltre, essendo $h_{x_i} \in L_p(R^n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), è possibile trovare una funzione $h_1 \in C_0^\infty(R^n)$ tale che la quantità $\sum_{i=1}^n \|(h_1 - h)_{x_i}\|_{L_p(\Omega)}$ sia arbitrariamente piccola. Pertanto dalla (30) discende che si può supporre, pur di scegliere opportunamente h_1 :

$$(31) \quad \|g_1 - g\|_{H^1(\Omega)} + \max_{\bar{\Omega}} |g_1 - g| < \delta.$$

D'altra parte la prima delle (29), essendo la funzione h_1 di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, può essere scritta

$$(32) \quad a(g_1, v) = - \int_{\Omega} (\Delta h_1) v \, dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)$$

ove Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$.

Pertanto la funzione g_1 soddisfa ad un'ipotesi del tipo di quella richiesta alla funzione ψ nel lemma 1, essendo evidentemente $h_1 \in L_p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$. Ciò basta per poter applicare il lemma 1 e ottenere l'esistenza di una funzione u_1 tale che: $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \geq g_1$ in $\bar{\Omega}$,

$$(33) \quad a(u_1, v - u_1) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq g_1 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Inoltre, sempre per il lemma 1, tale funzione è continua in $\bar{\Omega}$. Osserviamo ancora che per la (31) e le (27) risulta

$$(34) \quad \psi(x) - 2\varepsilon < g_1(x) < \psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}$$

$$(35) \quad \|g_1 - \psi\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon(1 + \sqrt{\text{mis } \Omega}).$$

A questo punto possiamo ripetere tutto il procedimento precedente sostituendo ad ε e δ due successioni numeriche $\{\varepsilon_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e

$\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tali che $\varepsilon_m = 2^{-m}$, $\delta_m = 2^{-m-3}$ ($m = 1, 2, \dots$). Evidentemente risulta

$$0 < \delta_m < \varepsilon_m/2, \quad \delta_{m+1} < \delta_m, \quad \varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m \quad (m=1, 2, \dots), \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Dette g_m, u_m le funzioni corrispondenti a g_1, u_1 ove si sostituiscono δ_m, ε_m a δ, ε , le (33), (34), (35) si riscrivono

$$(36) \quad \begin{cases} a(u_m, v - u_m) \geq 0 & \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq g_m \text{ q.o. in } \Omega; \\ u_m \in H_0^1(\Omega), u_m \geq g_m & \text{q. o. in } \Omega. \end{cases}$$

$$(37) \quad \psi(x) - 2\varepsilon_m < g_m(x) < \psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}$$

$$(38) \quad \|g_m - \psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon_m (1 + |\overline{\text{mis } \Omega}|).$$

Inoltre dalla (31) e dalla seconda delle (27), scritte con $\varepsilon_m, \delta_m, g_m$ al posto di ε, δ, g_1 si ottiene

$$(39) \quad \begin{cases} \psi(x) - \varepsilon_m - \delta_m < g(x) < \psi(x) - \varepsilon_m + \delta_m, \\ -\delta_m < g_m(x) - g(x) < \delta_m \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Sommando membro a membro le (39) e riscrivendole per m ed $m+1$ ne segue in particolare

$$(40) \quad \begin{cases} g_m(x) < \psi(x) - \varepsilon_m + 2\delta_m \\ \psi(x) - \varepsilon_{m+1} - 2\delta_{m+1} < g_{m+1}(x) \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Dalle (40) si deduce facilmente che

$$(41) \quad g_m(x) < g_{m+1}(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Poichè le funzioni g_m e u_m soddisfano alle ipotesi di tutti i lemmi precedenti, per la (41) e per il lemma 3 si ha

$$(42) \quad u_m(x) \leq u_{m+1}(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Inoltre per il lemma 5 risulta pure

$$(43) \quad 0 \leq u_{m+1}(x) - u_m(x) \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (g_{m+1} - g_m) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega}.$$

Dalle (39) e dalla definizione di δ_m , ε_m si deduce facilmente che

$$(44) \quad \max(g_{m+1} - g_m) < 2^{-m+1}$$

sicchè per le (43), (44) la successione $\{u_m\}_{m \in N}$ converge uniformemente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione continua u . Basta ormai dimostrare che $u \in \mathbf{k}$ ed u è soluzione della disequazione variazionale (5).

Intanto per la seconda delle (36) e per il fatto che la successione $\{g_m\}_{m \in N}$ per le (37) converge uniformemente a ψ in Ω , segue che $u(x) \geq \psi(x)$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$.

Per le (37), (38) e per il lemma 6 le funzioni $\{u_m\}_{m \in N}$ hanno le norme (in $H_0^1(\Omega)$) equilimitate, cioè più precisamente risulta

$$(45) \quad \left\| u_m \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_9 \left[\max_{\bar{\Omega}} \psi + \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} \right]$$

essendo K_9 una costante dipendente solo da n , Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$. Per la (45) esiste un'estratta della successione $\{u_m\}_{m \in N}$ che converge debolmente in $H_0^1(\Omega)$ ad una funzione $u^* \in H_0^1(\Omega)$; un'ulteriore estratta converge quasi ovunque in Ω ad u^* , pertanto $u = u^*$ q.o. in Ω ed $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$. Per semplicità nel seguito supporremo che la successione $\{u_m\}_{m \in N}$ stessa converga debolmente in $H_0^1(\Omega)$ ad u (oltre che uniformemente).

Resta da far vedere che u è soluzione della disequazione variazionale (5). Ricordiamo intanto che per la prima delle (36) e per la (37) risulta

$$(46) \quad a(u_m, u_m) \leq a(u_m, v) \quad \text{per ogni } v \in \mathbf{k}.$$

Proviamo ora che

$$(47) \quad a(u, u) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} a(u_m, u_m)$$

Infatti intanto risulta

$$(48) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n (b_i + d_i) (u_m)_{x_i} u_m + c u_m^2 \right] dx = \\ = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n (b_i + d_i) u_{x_i} u + c u^2 \right] dx$$

a causa della convergenza di $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ad u in $C^0(\bar{\Omega})$ e debolmente in $H_0^1(\Omega)$. Inoltre si ha

$$(49) \quad \min_{m \rightarrow \infty} \lim \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (u_m)_{x_i} (u_m)_{x_j} dx \geq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx$$

essendo la funzione

$$\varphi \rightarrow \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} dx}$$

una norma in $H_0^1(\Omega)$ equivalente alla norma usuale (si lascia al lettore la facile verifica di questo fatto).

Pertanto la (49) non è altro che la ben nota semicontinuità inferiore sequenziale della norma rispetto alla convergenza debole.

Dalle (48), (49) segue la (47); si può quindi passare al minimo limite nella (46). Tenendo conto della (47) e del fatto che $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, si ottiene

$$a(u, u) \leq a(u, v) \quad \text{per ogni } v \in \mathbf{k}$$

cioè u è soluzione della disequazione variazionale (5).

5. - Regolarità ed unicità della soluzione.

LEMMA 8. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, sia $u \in \mathbf{k}$ una soluzione della disequazione variazionale (5). Allora u è (essenzialmente) limitata in Ω .*

DIMOSTRAZIONE. La funzione u è inferiormente limitata in Ω , e si ha $u \geq 0$ q. o. in Ω . Infatti dalla (5) si deduce che risulta

$a(u, \varphi) \geq 0$ per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$: basta prendere nella (5) $v = u + \varphi$, con φ non negativa ed appartenente ad $H_0^1(\Omega)$. Di qui e dalla (4') applicata a $-u$ si ottiene appunto che $u \geq 0$ q. o. in Ω .

Dimostriamo ora che u è superiormente (essenzialmente) limitata in Ω . Sia w la funzione la cui esistenza è supposta nella ipotesi (4). Anzi, più precisamente, scegliamo come funzione w la soluzione del problema di Dirichlet (14); si è già osservato che tale soluzione esiste, è unica, è continua in $\bar{\Omega}$ e risulta

$$(50) \quad \min_{\bar{\Omega}} w > 0.$$

Sia per assurdo ess $\sup_{\Omega} u = +\infty$; posto, per ogni k reale

$$\Omega(k) = \{x \in \Omega : u(x) > kw(x)\}$$

risulta allora

$$(51) \quad \text{mis } \Omega(k) > 0 \quad \text{per ogni } k \text{ reale.}$$

D'altra parte, dal fatto che $u \in L_2(\Omega)$ e dalla (50), si ottiene

$$(52) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{mis } \Omega(k) = 0.$$

Poichè la funzione ψ che compare nella definizione del convesso $\mathbf{k}$ è continua in $\bar{\Omega}$ e quindi ivi limitata, esiste un numero positivo k_0 tale che

$$(53) \quad kw(x) \geq \psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega} \text{ e per ogni } k \geq k_0.$$

Posto, per $k \geq k_0$,

$$w_k = \max(u - kw, 0)$$

per note proprietà dello spazio $H_0^1(\Omega)$ risulta allora $w_k \in H_0^1(\Omega)$, $w_k \geq 0$ q. o. in Ω . Inoltre evidentemente è $w_k = 0$ q. o. in $\Omega \setminus \Omega(k)$ e per la (53) si ha pure $u - w_k \in \mathbf{k}$.

Allora ponendo $v = u - w_k$ nella (5) se ne deduce

$$(54) \quad a(u, w_k) \leq 0 \quad \text{per ogni } k \geq k_0.$$

Inoltre è pure evidentemente

$$(55) \quad a(kw, w_k) = 0 \quad \text{per ogni } k \geq k_0$$

quindi dalle (54), (55) si ottiene

$$(56) \quad a(u - kw, w_k) \leq 0 \quad \text{per ogni } k \geq k_0.$$

Essendo, come si è già osservato, $w_k = 0$ q. o. in $\Omega \setminus \Omega(k)$ la (56) si può riscrivere

$$a(w_k, w_k) \leq 0 \quad \text{per ogni } k \geq k_0,$$

da cui si deduce, per le ipotesi fatte sulla forma bilineare $a(.,.)$:

$$(57) \quad c_0 \|(w_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|b_i + d_i\|_{L_n(\Omega(k))} \|w_k\|_{L_2^*(\Omega(k))} \|(w_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))} + \\ + \|c\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \|w_k\|_{L_2^*(\Omega(k))}^2$$

essendo $2^* = 2n/(n-2)$. Ricordiamo ora la nota disuguaglianza

$$(58) \quad \|v\|_{L_2^*(R^n)} \leq K_{10} \|v_x\|_{L_2(R^n)}$$

valida per ogni $v \in H_0^1(R^n)$, ove K_{10} è una costante dipendente solo da n . Dalle (57), (58) si deduce

$$(59) \quad c_0 \|(w_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}^2 \leq \\ \leq K_{10} \left[\sum_{i=1}^n \|b_i + d_i\|_{L_n(\Omega(k))} + K_{10} \|c\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \right] \|(w_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}^2$$

Per la (52) si può scegliere k così grande che risulti

$$K_{10} \left[\sum_{i=1}^n \|b_i + d_i\|_{L_n(\Omega(k))} + K_{10} \|c\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \right] < c_0$$

da cui seguirebbe $(w_k)_x = 0$ q. o. in Ω e quindi $w_k = 0$ q. o. in Ω , assurdo perchè in contrasto con la (51). Il lemma è così provato.

TEOREMA 9. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, sia $u \in \mathbf{k}$ soluzione della disequazione variazionale (5). Allora u è continua in $\bar{\Omega}$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo per brevità con $a'(\cdot, \cdot)$ la forma bilineare su $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a'(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v \right\} dx$$

per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Per il lemma precedente, detta u una soluzione della disequazione variazionale (5), la funzione u risulta (essenzialmente) limitata in Ω . Sia $\hat{u}$ la soluzione del problema al contorno

$$(60) \quad \begin{cases} a'(\hat{u}, \varphi) = - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n d_i u \varphi_{x_i} + c u \varphi \right\} dx & \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \hat{u} \in H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Allora per i risultati di [9] risulta $\hat{u} \in C^0(\bar{\Omega})$. Detta v una qualunque funzione del convesso $\mathbf{k}$, dalle (5) e (60) segue

$$(61) \quad a'(u - \hat{u}, v - u) \geq 0 .$$

Sia ora φ una funzione tale che $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq \psi - \hat{u}$ q. o. in Ω ; allora risulta evidentemente $\varphi + \hat{u} \in \mathbf{k}$, per cui ponendo $v = \varphi + \hat{u}$ nella (61) si ottiene

$$(62) \quad a'(u - \hat{u}, \varphi - u + \hat{u}) \geq 0 .$$

Indicato con $\mathbf{k}'$ il convesso

$$\mathbf{k}' = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) : \varphi \geq \psi - \hat{u} \quad \text{q. o. in } \Omega \}$$

si vede che la funzione $u - \hat{u}$ appartiene a $\mathbf{k}'$ ed è soluzione della disequazione variazionale (62) per ogni $\varphi \in \mathbf{k}'$. Poichè, come già osservato, la funzione $\hat{u}$ è continua in $\bar{\Omega}$, la disequazione variazionale (62) è esattamente dello stesso tipo della (5), colla sola differenza che in essa compare la forma bilineare $a'(\cdot, \cdot)$ in luogo di $a(\cdot, \cdot)$. Per questa ragione alla disequazione (62) possono essere appli-

cati i risultati di [4], valendo per l'equazione associata il principio di massimo [1], [9].

Pertanto per i risultati di [4], tuttora validi per questo caso, la funzione $u - \hat{u}$, soluzione della (62), è continua in $\bar{\Omega}$. Poichè pure $\hat{u}$, come si è detto, è continua in $\bar{\Omega}$, ne segue che u è continua in $\bar{\Omega}$.

TEOREMA 10. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2. Allora la disequazione variazionale (5) ammette al più una soluzione.*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1, u_2 due soluzioni della disequazione variazionale (5); per il teorema precedente esse sono entrambe continue in $\bar{\Omega}$. Basta applicare il lemma 3 con $\psi_1 = \psi$ per ottenere $u_1 \leq u_2, u_2 \leq u_1$ in $\bar{\Omega}$, cioè la tesi.

6. - Ostacolo continuo non appartenente ad $H^1(\Omega)$.

Nel presente paragrafo consideriamo il caso in cui la funzione ostacolo appartenga a $C^0(\bar{\Omega})$, senza necessariamente appartenere ad $H^1(\Omega)$.

Data una funzione $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$, indichiamo con $u(\psi)$ la soluzione della disequazione variazionale (5). Per i risultati precedenti la funzione $u(\psi)$ esiste, è unica ed è continua in $\bar{\Omega}$.

LEMMA 10. *Siano ψ', ψ'' funzioni tali che $\psi', \psi'' \leq 0$ su $\partial\Omega$, $\psi', \psi'' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\min_{\bar{\Omega}} (\psi' - \psi'') > 0$. Allora risulta*

$$0 \leq u(\psi') - u(\psi'') \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi' - \psi'') \text{ in } \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per brevità $u' = u(\psi')$, $u'' = u(\psi'')$. Per il lemma 3 risulta intanto $0 \leq u' - u''$ in $\bar{\Omega}$.

Dalla dimostrazione del teorema 7 si deduce che esistono successioni $\{\psi'_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\psi''_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, $\psi'_m, \psi''_m \leq 0$ su $\partial\Omega$, tali che

$$a(\psi'_m, v) = \int_{\Omega} f'_m v \, dx, \quad a(\psi''_m, v) = \int_{\Omega} f''_m v \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, con $f'_m, f''_m \in L_p(\Omega)$, $p > n$ ($m = 1, 2, \dots$),

$$(63) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{\bar{\Omega}} (|\psi'_m - \psi'| + |\psi''_m - \psi''|) = 0.$$

Posto per brevità

$$u'_m = u(\psi'_m), \quad u''_m = u(\psi''_m) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

sempre dalla dimostrazione del teorema 7 si ottiene che

$$(64) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \max_{\bar{\Omega}} (|u'_m - u'| + |u''_m - u''|) = 0.$$

Dall'ipotesi $\psi''(x) < \psi'(x)$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e dalla (63) segue che per ogni m abbastanza grande risulta

$$(65) \quad \min_{\bar{\Omega}} (\psi'_m - \psi''_m) > 0.$$

Applicando il lemma 5 si ottiene

$$(66) \quad 0 \leq u'_m - u''_m \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi'_m - \psi''_m) \text{ in } \Omega$$

valida per ogni m abbastanza grande.

Passando al limite nella (66) per $m \rightarrow +\infty$ e tenendo conto delle (63), (64) si ha la tesi.

TEOREMA 11. *Sia $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$, $\psi < 0$ su $\partial\Omega$. Posto*

$$u = \inf \{g \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : g \geq 0 \text{ su } \partial\Omega, g \geq \psi \text{ in } \Omega,$$

$$a(g, v) \geq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega\},$$

$$\tilde{u} = \inf \{u(\psi') \in H_0^1(\Omega) : \psi' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \psi' \geq \psi \text{ in } \Omega, \psi' \leq 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

$$\hat{u} = \sup \{u(\psi'') \in H_0^1(\Omega) : \psi'' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \psi'' \leq \psi \text{ in } \Omega\},$$

allora risulta $u = \tilde{u} = \hat{u} \in C^0(\bar{\Omega})$.

DIMOSTRAZIONE. (Lewy-Stampacchia [5]). 1) Facciamo vedere che $\tilde{u} \leq u$. Per le ipotesi fatte sulla funzione ψ , per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile

determinare due funzioni $\psi'_\varepsilon, \psi''_\varepsilon$ tali che $\psi'_\varepsilon, \psi''_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$, $\psi''_\varepsilon(x) < \psi(x) < \psi'_\varepsilon(x)$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$, $\psi'_\varepsilon \leq 0$ su $\partial\Omega$, $\max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - \psi''_\varepsilon) < \varepsilon$. Posto per brevità

$$u'_\varepsilon = u(\psi'_\varepsilon) \quad , \quad u''_\varepsilon = u(\psi''_\varepsilon)$$

dal lemma precedente segue

$$(67) \quad 0 \leq u'_\varepsilon - u''_\varepsilon \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - \psi''_\varepsilon) < K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega}.$$

Essendo $\tilde{u} \leq u'_\varepsilon$ in $\bar{\Omega}$ (per definizione di $\tilde{u}$), $u''_\varepsilon \leq u$ in $\bar{\Omega}$ (per il lemma 2) si deduce

$$\tilde{u} \leq u'_\varepsilon = u''_\varepsilon + u'_\varepsilon - u''_\varepsilon \leq u''_\varepsilon + K_1 \varepsilon \leq u + K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega}.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha :

$$(68) \quad \tilde{u} \leq u \text{ in } \bar{\Omega}.$$

2) In modo analogo, poichè risulta $u''_\varepsilon \leq \hat{u}$ in $\bar{\Omega}$ per definizione di $\hat{u}$ e $u \leq u'_\varepsilon$ in $\bar{\Omega}$, si ottiene

$$\hat{u} \geq u''_\varepsilon = u'_\varepsilon - (u'_\varepsilon - u''_\varepsilon) \geq u'_\varepsilon - K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - \psi''_\varepsilon) \geq u - K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega}$$

e per l'arbitrarietà di ε

$$(69) \quad u \leq \hat{u} \text{ in } \bar{\Omega}.$$

3) Dai lemmi 3 e 10 è immediato che

$$(70) \quad \hat{u} \leq \tilde{u} \text{ in } \bar{\Omega}.$$

Dalle (68), (69), (70) segue che $u = \tilde{u} = \hat{u}$ in $\bar{\Omega}$; la continuità di u in $\bar{\Omega}$ è conseguenza del fatto che la funzione $\tilde{u}$ è superiormente semicontinua in $\bar{\Omega}$, mentre la funzione $\hat{u}$ è inferiormente semicontinua in $\bar{\Omega}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **22** (1967), 368-372.
- [2] M. CHICCO, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **87** (1970), 1-10.
- [3] M. CHICCO, *Sulle disuguaglianze negli spazi $H^{k,p}(\Omega)$* . Matematiche (Catania) **28** (1973), 18-29.
- [4] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 153-188.
- [5] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, *On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities*, Arch. Rat. Mech. Anal., **42** (1971), 241-253.
- [6] M. E. MARINA, *Esistenza ed unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale associata ad un operatore non coercivo*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **10** (1974), 500-511.
- [7] M. K. V. MURTHY-G. STAMPACCHIA, *A variational inequality with mixed boundary conditions.*, Israel J. Math. **13** (1972), 188-224.
- [8] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici con dati discontinui dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **51** (1960), 1-38.
- [9] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 189-258.
- [10] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Proc. Nato Advanced Study Inst., Theory and applications of monotone operators, Venice 1968, 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 settembre 1976.