

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Integrale monotono

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 57 (1977), p. 149-166

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__149_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Integrale monotono

GABRIELE H. GRECO (*)

Introduzione.

Sia $f: A \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile rispetto ad una misura ψ su A . La funzione f è ψ -integrabile e $\int_A f d\psi = \int_0^{+\infty} \psi(\{x: f(x) > \tau\}) d\tau$, cioè integrale della funzione f è l'integrale

elementare della funzione $g(\tau) = \psi\{x: f(x) > \tau\}$ monotona in τ . In modo naturale si ottiene una estensione del significato di integrale di una funzione $f: A \rightarrow [0, +\infty]$ al caso che ψ sia solo una funzione d'insieme non decrescente; cioè poniamo, per definizione,

$$\int_A f d\psi = \int_0^{+\infty} \psi\{x \in A: f(x) > \tau\} d\tau, \text{ qualora } f \text{ sia una qualsiasi funzione di } A \text{ in } [0, +\infty] \text{ e } \psi \text{ una funzione non decrescente di } \mathfrak{S}(A) \text{ in } [0, +\infty].$$

Sia $\alpha: \mathfrak{S}(A) \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona, cioè $\alpha(\emptyset) = 0$ e $\alpha(B) \leq \alpha(C)$ se $B \subset C$, poniamo $\int_A f d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{x \in A: f(x) > \tau\} d\tau$ per ogni $f \in [0, +\infty]^A$.

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. Matematico Università di Trento.

Sia $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$ con la proprietà

$$1) \lambda \in [0, +\infty), g \in \mathbf{B} \Rightarrow \lambda g, g \wedge \lambda, g \vee \lambda - \lambda \in \mathbf{B}$$

Si vedrà in seguito che l'applicazione $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty]$ è rappresentata da una funzione d'insieme monotona γ , cioè $T(f) = \int_A f d\gamma \quad \forall f \in \mathbf{B}$, se e solo se T verifica le proprietà

$$2) T(f) \leq T(g) \text{ se } f \leq g$$

$$3) T(\lambda f) = \lambda T(f) \text{ se } \lambda \in [0, +\infty)$$

$$4) T(f) = T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda)$$

$$5) T(f) = \lim_n T(f \wedge n)$$

$$6) T(f) = \lim_n T\left(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

Quando le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono soddisfatte, diciamo che l'applicazione T è un «integrale monotono su $\mathbf{B}$ ». Inoltre se T è un integrale monotono su $\mathbf{B}$, una funzione d'insieme monotona γ rappresenta T se e solo se $\beta_T \leq \gamma \leq \alpha_T$, dove β_T e α_T sono le funzioni d'insieme monotone, definite dalle posizioni

$$\alpha_T(B) = \inf \{ T(g) : g \in \mathbf{B}, g \geq \varphi_B \} \quad , \quad \forall B \subset A$$

$$\beta_T(B) = \sup \{ T(g) : g \in \mathbf{B}, g \leq \varphi_B \} \quad , \quad \forall B \subset A$$

Occupano un ruolo importante nello studio delle proprietà dell'integrale monotono gli insiemi $B \subset A$ tali che $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$. Diciamo che questi insiemi sono T -regolari; indichiamo con $\mathcal{R}_T$ la famiglia degli insiemi T -regolari e con δ_T la restrizione della funzione α_T alla famiglia $\mathcal{R}_T$. Se T è un integrale monotono e $\int_A f d\alpha_T = \int_A f d\beta_T$ allora l'insieme $\left\{ H : H = \{x : f(x) > \tau\} \text{ per qualche } \tau \in]0, +\infty] \text{ e } H \text{ non è } T\text{-regolare} \right\}$ è numerabile.

Nel teorema 2 si dimostrerà che per un integrale monotono $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty)$ con la proprietà

$$7) f \wedge g, f \vee g, f \vee g - g \in \mathbf{B} \text{ se } f, g \in \mathbf{B} \text{ e limitate}$$

esiste una rappresentazione γ che rende le funzioni $f \in \mathbf{B}$ γ -misurabili se e solo se

$$8) \quad T(f) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g) \text{ se } f, f \wedge g, f \vee g - g \in \mathbf{B}$$

Inoltre se le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sono verificate, si ottiene che la famiglia degli insiemi T -regolari $\mathcal{R}_T$ è un anello di insiemi e la funzione δ_T è additiva in $\mathcal{R}_T$, cioè $\delta_T(A \cup B) = \delta_T(A) + \delta_T(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

Se l'integrale monotono $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty)$ soddisfa le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e

$$9) \quad T(f) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(f_i) \text{ se } f, f_i \in \mathbf{B} \text{ limitate e } f \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

esiste una misura esterna μ , cioè una funzione d'insieme monotona e numerabilmente subadditiva, tale che $T(f) = \int_A f d\mu$ e ogni funzione f è μ -misurabile.

In questo caso δ_T è numerabilmente additiva, cioè $\delta_T(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$ se $H_i \in \mathcal{R}_T$ e $H_i \cap H_j = \emptyset$ per $i \neq j$; la misura esterna μ è definita da

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i) : H_i \in \mathcal{R}_T, \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \right\}, \quad \forall B \subset A.$$

Una interessante applicazione dell'integrale monotono è il teorema di Riesz sulla rappresentazione di funzionali lineari su spazi di funzioni continue.

Le notazioni e la terminologia sono quelle usuali. Indichiamo con φ_B la funzione caratteristica di un insieme B e con $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Inoltre poniamo $0 \cdot (+\infty) = 0$ e $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Ringrazio il prof. MARIO MIRANDA per avermi suggerito questa ricerca.

1. *Proprietà e assiomi dell'integrale monotono.*

DEFINIZIONE 1. *Dato un insieme A , sia $\mathfrak{S}(A)$ l'insieme delle parti di A . Diremo che una funzione d'insieme $\alpha: \mathfrak{S}(A) \rightarrow [0, +\infty]$ è monotona se verifica*

$$(i) \quad \alpha(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad X, Y \in \mathfrak{S}(A), X \subset Y \Rightarrow \alpha(X) \leq \alpha(Y)$$

DEFINIZIONE 2. *Diremo che una applicazione $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty]$, dove $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$ è un «integrale monotono su $\mathbf{B}$ », se per ogni $\lambda \in [0, +\infty)$ e per ogni $g, f \in \mathbf{B}$ valgono le seguenti proprietà:*

$$(i) \quad \lambda g \in \mathbf{B}$$

$$(ii) \quad g \wedge \lambda, g \vee \lambda - \lambda \in \mathbf{B}$$

$$(iii) \quad g \leq f \Rightarrow T(g) \leq T(f)$$

$$(iv) \quad T(\lambda g) = \lambda T(g)$$

$$(v) \quad T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$$

$$(vi) \quad T(g) = \lim_n T(g \wedge n)$$

$$(vii) \quad T(g) = \lim_n T\left(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

Se T è un integrale monotono, chiamiamo α_T e β_T le funzioni d'insieme monotone definite in $\mathfrak{S}(A)$ dalle posizioni:

$$\alpha_T(B) = \inf \{ T(g) : g \in \mathbf{B}, g \geq \varphi_B \} \quad \text{per ogni } B \subset A$$

$$\beta_T(B) = \sup \{ T(g) : g \in \mathbf{B}, g \leq \varphi_B \} \quad \text{per ogni } B \subset A$$

Inoltre indichiamo con $[\beta_T, \alpha_T]$ la famiglia delle funzioni d'insieme γ monotone, definite in $\mathfrak{S}(A)$ tali che $\beta_T(B) \leq \gamma(B) \leq \alpha_T(B)$, $\forall B \subset A$. Si noti che $[\beta_T, \alpha_T] \neq \emptyset$ perchè $\beta_T \leq \alpha_T$.

PROPOSIZIONE 1. *Sia α una funzione d'insieme monotona, definita in $\mathfrak{S}(A)$, e sia $\int_A - d\alpha: [0, +\infty]^A \rightarrow [0, +\infty]$ l'applicazione definita da $\int_A f d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha \{ x : f(x) > \tau \} d\tau$. Valgono le seguenti pro-*

proprietà :

(1) $\int_A - d\alpha$ è un integrale monotono su $[0, +\infty]^A$

(2) $\int_A f d\alpha = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \left\{ x : f(x) > \frac{k}{n} \right\}$

(3) Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione $\{g_k \wedge n\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente in A alla funzione $g \wedge n$, allora

$$\int_A g d\alpha \leq \minlim_k \int_A g_k d\alpha$$

(4) Se la successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)^A$ converge uniformemente alla funzione $g \in [0, +\infty)^A$, se esiste $f \in [0, +\infty)^A$ tale che $g_n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\int_A f d\alpha < +\infty$, allora $\int_A g d\alpha = \lim_n \int_A g_n d\alpha$

PROVA : le proprietà (1) e (2) sono ovvie conseguenze della definizione di $\int_A - d\alpha$, la validità della (3) segue da (1), tenendo conto

che per ogni $\varepsilon, \delta \in (0, +\infty)$ con $\delta > \minlim_k \int_A (g_k \wedge n) d\alpha$ si ha

$\int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon] d\alpha \leq \delta$. Infatti per l'uniforme convergenza della

successione $\{g_k \wedge n\}_{k \in \mathbb{N}}$ esiste $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $g \wedge n \leq g_{k(\varepsilon)} \wedge n + \varepsilon$ e $\int_A (g_{k(\varepsilon)} \wedge n) d\alpha \leq \delta$.

Dunque $(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon \leq g_{k(\varepsilon)} \wedge n$ e $\int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon] d\alpha \leq \int_A (g_{k(\varepsilon)} \wedge n) d\alpha \leq \delta$. Perciò per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\delta \geq \minlim_k$

$\int_A (g_k \wedge n) d\alpha$ si ha che $\int_A (g \wedge n) d\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon] d\alpha \leq \delta$ (vedi proprietà (iii) e (vii) della definizione 2).

Quindi $\int_A (g \wedge n) d\alpha \leq \minlim_k \int_A (g_k \wedge n) d\alpha \leq \minlim_k \int_A g_k d\alpha$. Infine per la proprietà (vi) dell'integrale monotono, si ha $\int_A g d\alpha = \lim_n \int_A (g \wedge n) d\alpha \leq \minlim_k \int_A g_k d\alpha$.

Per verificare (4) è sufficiente provare che $\maxlim_n \int_A g_n d\alpha \leq \int_A g d\alpha$.

Sia $\varepsilon, \delta \in (0, +\infty)$ con $\delta < \maxlim_n \int_A g_n d\alpha$. Per la convergenza uniforme della successione $\{g_n\}$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $g_{n(\varepsilon)} < g + \varepsilon$ e $\delta \leq \int_A g_{n(\varepsilon)} d\alpha$. Perciò $\delta \leq \int_A g_{n(\varepsilon)} d\alpha = \int_A (g_{n(\varepsilon)} \wedge \varepsilon) d\alpha + \int_A (g_{n(\varepsilon)} \vee \varepsilon - \varepsilon) d\alpha \leq \int_A (f \wedge \varepsilon) d\alpha + \int_A g d\alpha$; passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ha $\delta \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A (f \wedge \varepsilon) d\alpha + \int_A g d\alpha = \int_A g d\alpha$, poichè $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A (f \wedge \varepsilon) d\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_A f d\alpha - \int_A (f \vee \varepsilon - \varepsilon) d\alpha \right] = \int_A f d\alpha - \int_A f d\alpha = 0$. Dunque per $\delta \in (0, +\infty)$ si ha $\delta < \maxlim_n \int_A g_n d\alpha \Rightarrow \delta \leq \int_A g d\alpha$.

Quindi $\maxlim_n \int_A g_n d\alpha \leq \int_A g d\alpha$.

TEOREMA 1 Sia $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty]$ un integrale monotono su $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$. Una funzione d'insieme monotona γ , definita in $\mathcal{B}(A)$, rappresenta T , cioè $T(g) = \int_A g d\gamma$ per ogni $g \in \mathbf{B}$, se e solo se $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$

PROVA: La condizione « $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ » è necessaria. Infatti se γ è tale che $T(f) = \int_A f d\gamma$ per ogni $f \in \mathbf{B}$ si ha

$$g \leq \varphi_B \leq f, g \in \mathbf{B}, f \in \mathbf{B} \Rightarrow T(g) = \int_A g d\gamma \leq \int_A \varphi_B d\gamma = \gamma(B) \leq \int_A f d\gamma = T(f).$$

Quindi per ogni $B \subset A$ si ha $\beta_T(B) \leq \gamma(B) \leq \alpha_T(B)$, cioè $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$.

Ora proviamo che se $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ allora $T(f) = \int_A f d\gamma$ per ogni

$f \in \mathbb{B}$. La funzione d'insieme monotona γ verifica le seguenti proprietà:

$$a) \quad g \in B, \quad g \leq \varphi_B \Rightarrow T(g) \leq \gamma(B)$$

$$b) \quad g \in B, \quad g \geq \varphi_B \Rightarrow T(g) \geq \gamma(B).$$

Per la proprietà (v) della definizione 2, per ogni $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathfrak{B}(A)$

con $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n$ e per ogni $\{\lambda_i\}_i \subset [0, +\infty)$ si ha

$$(a') \quad g \in \mathbb{B}, \quad g \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \Rightarrow T(g) \leq \int_A \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \right) d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(B_i)$$

$$(b') \quad g \in \mathbb{B}, \quad g \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \Rightarrow T(g) \geq \int_A \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \right) d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(B_i)$$

1° CASO. Sia $g \in \mathbb{B}$, limitata e $\gamma \{x: g(x) > 0\} < +\infty$. Supponiamo che sia $g \leq 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi \{x: g(x) > i2^{-n}\} \leq$

$\leq g \leq \frac{1}{2^n} \varphi \{x: g(x) > 0\} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi \{x: g(x) > i2^{-n}\}$ e le funzioni

$g_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi \{x: g(x) > i2^{-n}\}$ convergono uniformemente a g in A .

Quindi da (a') e (b') segue $\int_A g_n d\gamma \leq T(g) \leq \frac{1}{2^n} \gamma \{x: g(x) > 0\} + \int_A g_n d\gamma$.

Per la proprietà (3) della proposizione 1 si ha $\lim_n \int_A g_n d\gamma = \int_A g d\gamma$. Perciò $\int_A g d\gamma \leq T(g) \leq \lim_n \frac{1}{2^n} \gamma \{x: g(x) > 0\} + \int_A g d\gamma$.

Essendo $\gamma \{x: g(x) > 0\} < +\infty$ si conclude con l'uguaglianza ri-

chiesta $T(g) = \int_A g d\gamma$, qualora $g \in \mathbf{B}$ limitata, $\gamma \{x: g(x) > 0\} < +\infty$ e $g \leq 1$.

Se la funzione $g \leq M$, si ha ancora l'uguaglianza $T(g) = \int_A g d\gamma$ per l'omogeneità dei due integrali monotoni T e $\int_A - d\gamma$.

2° CASO. Sia $g \in \mathbf{B}$ e $\gamma \{x: g(x) > 0\} < +\infty$. Dal 1° caso segue $T(g \wedge n) = \int_A (g \wedge n) d\gamma$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Quindi per la proprietà (vi) della definizione di integrale monotono si ha $T(g) = \lim_n T(g \wedge n) = \lim_n \int_A (g \wedge n) d\gamma = \int_A g d\gamma$.

3° CASO. Sia $g \in \mathbf{B}$. Se per qualche $\tau > 0$ accade che $\gamma \{x: g(x) > \tau\} = +\infty$. Allora $\tau \varphi_{\{x: g(x) > \tau\}} \leq g$; quindi per (b) si ha $T(g) \geq \tau \gamma \{x: g(x) > \tau\} = +\infty$ e per la monotonia dell'integrale monotono $\int_A - d\gamma$ si ha $\int_A g d\gamma \geq \int_A (\tau \varphi_{\{x: g(x) > \tau\}}) d\gamma = \tau \gamma \{x: g(x) > \tau\} = +\infty$. Perciò $T(g) = \int_A g d\gamma$. Invece se per ogni $\tau > 0$ è $\gamma \{x: g(x) > \tau\} < +\infty$, la funzione $g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$ ricade nel caso precedente.

Quindi per la proprietà (vii) dell'integrale monotono si ha

$$T(g) = \lim_n T\left(g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_n \int_A \left(g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) d\gamma = \int_A g d\gamma.$$

ESEMPIO 1°. Sia $C_0^+(\mathbf{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni continue, non negative e a supporto compatto in $\mathbf{R}^n$. Sia μ una misura di Radon su $\mathbf{R}^n$. Sia $T: C_0^+(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$ l'applicazione definita da $T(g) = \int_{\mathbf{R}^n} g d\mu$. Allora T è un integrale monotono continuo per successioni crescenti. Se $B \subset \mathbf{R}^n$ è limitato si ha $\alpha_T(B) = \mu(\bar{B})$ e $\beta_T(B) = \mu(\bar{B})$.

ESEMPIO 2°. Sia $C_0^+(\mathbb{R}^n)$ come nell'esempio 1°. Sia $T: C_0^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$ una applicazione con le proprietà:

$$(1) \quad T(\lambda g) = \lambda T(g), \quad \text{per } \lambda \in [0, +\infty) \text{ e } g \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$$

$$(2) \quad g \leq f \Rightarrow T(g) \leq T(f), \quad \text{per } g, f \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$$

$$(5) \quad T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda), \quad \text{per } \lambda \in [0, +\infty) \text{ e } g \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$$

Allora T è un integrale monotono continuo per successioni crescenti. Inoltre se $B \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme limitato e γ rappresenta T , si ha $\beta_T(B) = \beta_T(\bar{B}) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \gamma(B'_\varrho)$ e $\alpha_T(B) = \alpha_T(\bar{B}) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \gamma(B''_\varrho)$, dove $B'_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n - B) > \varrho\}$ e $B''_\varrho = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, B) < \varrho\}$.

ESEMPIO 3°. Sia $(A, \geq)$ un insieme diretto e sia $\mathbf{B} = \{f \in [0, +\infty]^A : \lim_{x \in A} f(x) \text{ esiste}\}$.

L'applicazione $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da $T(f) = \lim_{x \in A} f(x)$ è un integrale monotono su $\mathbf{B}$. Le funzioni monotone α_T e β_T verificano le uguaglianze $\int_A f d\alpha_T = \maxlim_{x \in A} f(x)$ e $\int_A f d\beta_T = \minlim_{x \in A} f(x)$ per ogni $f \in [0, +\infty]^A$.

ESEMPIO 4°. Sia X uno spazio topologico e $C^+(X)$ l'insieme delle funzioni continue non negative. Ogni funzionale $M: C^+(X) \rightarrow [0, +\infty)$ lineare, cioè $M(\lambda f) = \lambda M(f)$ e $M(f+g) = M(f) + M(g)$, è un integrale monotono su $C^+(X)$. Le proprietà (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (vii) seguono direttamente dalla linearità di M .

Per verificare la (vi), consideriamo una funzione $f \in C^+(X)$. La funzione $g = \sum_{i=1}^{\infty} i[f \wedge i - f \wedge (i-1)]$ è una funzione continua in X e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n(f \vee n - n) \leq g$. Perciò $n M(f \vee n - n) \leq M(g) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dunque $\lim_n M(f \vee n - n) = 0$. In conclusione $M(g) = \lim_n [M(g \wedge n) + M(g \vee n - n)] = \lim_n M(g \wedge n)$.

2. - Linearità dell'integrale monotono e insiemi regolari.

In questo paragrafo studiamo le relazioni esistenti fra l'integrale monotono lineare e la misurabilità di funzioni. Più precisamente nel teorema 2 si dimostrerà che un integrale monotono T è lineare in $\mathbf{B}$ se e solo se esiste una funzione di insieme α che rappresenta T e che rende le funzioni di $\mathbf{B}$ α -misurabili. Iniziamo con la definizione di insieme misurabile secondo Cathéodory.

DEFINIZIONE 3. Sia α una funzione d'insieme, definita in $\mathfrak{S}(A)$. Diremo che $B \in \mathfrak{S}(A)$ è α -misurabile se $\alpha(X) = \alpha(B \cap X) + \alpha(X - B)$ per ogni $X \in \mathfrak{S}(A)$.

Si deduce facilmente dalla definizione 5 che un insieme $B \in \mathfrak{S}(A)$ è α -misurabile se e solo se $\int_A f d\alpha = \int_B f d\alpha + \int_{A-B} f d\alpha$, $\forall f \in [0, +\infty]^A$ (NB . si pone $\int_B f d\alpha = \int_A f \varphi_B d\alpha$), quando α è una funzione d'insieme monotona in $\mathfrak{S}(A)$.

PROPOSIZIONE 2. Sia α una funzione definita in $\mathfrak{S}(A)$ tale che $\alpha(\emptyset) = 0$. Allora gli insiemi $\emptyset$, A sono α -misurabili e l'unione, l'intersezione, la differenza di due insiemi α -misurabili sono ancora α -misurabili.

DEFINIZIONE 4. sia α una funzione d'insieme definita in $\mathfrak{S}(A)$. Sia $f \in [0, +\infty]^A$. Diremo che f è α -misurabile se l'insieme $\left\{ \tau \in (0, +\infty) : \{x \in A : f(x) > \tau\} \text{ non è } \alpha\text{-misurabile} \right\}$ è numerabile.

Osserviamo che ogni f α -misurabile e limitata è limite uniforme di una successione di funzioni semplici che sono combinazioni lineari di insiemi misurabili.

DEFINIZIONE 5. Sia T un integrale monotono su $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$. Diremo che un insieme $B \in \mathfrak{S}(A)$ è T -regolare se $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$.

Indichiamo con $\mathfrak{R}_T$ la famiglia degli insiemi T -regolari e con δ_T la funzione d'insieme definita in $\mathfrak{R}_T$ dalla posizione $\delta_T(B) = \alpha_T(B)$.

Se l'integrale monotono T definito in $\mathbb{B}$ è finito, cioè $T(f) < +\infty$ per ogni $f \in \mathbb{B}$, si ottengono le uguaglianze: $\alpha_T(B) = \inf \{ \delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \supset B \}$ e $\beta_T(B) = \sup \{ \delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \subset B \}$ per ogni $B \in \mathfrak{F}(A)$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia T un integrale monotono su $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^A$. Sia $f \in [0, +\infty]^A$ e $\int_A f d\alpha_T < +\infty$. Allora $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T$ se e solo se l'insieme $K = \{ \tau \in (0, +\infty) : \{ x : f(x) > \tau \} \text{ non è } T\text{-regolare} \}$ è numerabile.*

PROVA. Posto $\varphi(\tau) = \alpha_T \{ x : f(x) > \tau \}$ e $\psi(\tau) = \beta_T \{ x : f(x) > \tau \}$ per $\tau \in (0, +\infty)$, si ha $\int_A f d\beta_T = \int_0^{+\infty} \psi(\tau) d\tau$ e $\int_A f d\alpha_T = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau$.

Se $K = \{ \tau \in (0, +\infty) : \varphi(\tau) \neq \psi(\tau) \}$ è numerabile, si ottiene $\int_0^{+\infty} \psi(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau$, quindi $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T$. D'altra parte, supponendo $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T$, basta provare

(1) l'insieme $C = \left\{ \tau \in (0, +\infty) : \varphi - \psi \text{ è continua in } \tau \right\}$ è numerabile.

(2) $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$ per ogni $\tau \notin C$.
per dimostrare che l'insieme K è numerabile. L'insieme C è numerabile perchè le funzioni ψ e φ sono monotone. Le funzioni φ e ψ soddisfano la relazione $0 \leq \psi(\tau) \leq \varphi(\tau) < +\infty$ per ogni $\tau \in (0, +\infty)$, perchè $\int_A f d\alpha_T < +\infty$ e $\beta_T \leq \alpha_T$. Quindi $\varphi(\tau) - \psi(\tau) \geq 0$ per $\tau > 0$ e da $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T$ segue $\int_0^{+\infty} (\varphi(\tau) - \psi(\tau)) d\tau = 0$.

Perciò $\varphi(t) = \psi(t)$ per ogni $\tau \in C$, perchè in ogni $\tau \in C$ la funzione $\varphi - \psi$ è continua.

PROPOSIZIONE 4. *Sia α una funzione monotona d'insieme definita in $\mathfrak{F}(A)$. Poniamo $\mathbb{B} = \{ f \in [0, +\infty]^A : f \text{ è } \alpha\text{-misurabile} \}$ e*

$\int_A f d\alpha < +\infty$ } e $T(f) = \int_A f d\alpha$ per ogni $f \in \mathbf{B}$. Allora per l'integrale monotono T valgono le seguenti proprietà:

$$(1) \int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T < +\infty \Rightarrow f \text{ è } \alpha\text{-misurabile}$$

$$(2) \int_A (f + g) d\alpha = \int_A f d\alpha + \int_A g d\alpha, \text{ per ogni } f \text{ e } g \in \mathbf{B}$$

$$(3) \text{ Se } f, g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \vee g, f \wedge g, f + g \in \mathbf{B}$$

$$(4) \text{ Se } f, g \in \mathbf{B} \text{ e } f, g \text{ sono limitate in } A \Rightarrow f \vee g - g \in \mathbf{B}$$

PROVA

(1) Tenuto conto della definizione 4 e della proposizione 3, è sufficiente dimostrare che ogni insieme T -regolare è α -misurabile, per ottenere (1). Sia G un insieme T -regolare. Esistono due insiemi J e H α -misurabili tali che $J \supset G \supset H$ e $\alpha(J) - \varepsilon \leq \alpha(G) \leq \alpha(H) + \varepsilon$.

Quindi per ogni $B \in \mathfrak{G}(A)$ si ha $\alpha(G) + \alpha(B) \geq \alpha(J) + \alpha(B) - \varepsilon \geq \alpha(J \cap B) + \alpha(J \cup B) - \varepsilon \geq \alpha(G \cap B) + \alpha(G \cup B) - \varepsilon$, e $\alpha(G) + \alpha(B) \leq \alpha(H) + \alpha(B) + \varepsilon \leq \alpha(G \cap B) + \alpha(G \cup B) + \varepsilon$. Dunque per ogni insieme $B \in \mathfrak{G}(A)$ è verificata l'uguaglianza $\alpha(G) + \alpha(B) = \alpha(B \cap G) + \alpha(G \cup B)$, cioè l'insieme G è α -misurabile.

(2) La linearità dell'integrale monotono $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni semplici α -misurabili, cioè sulle combinazioni lineari a coefficienti positivi di funzioni caratteristiche di insiemi α -misurabili, è ovvia.

La linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni α -misurabili limitate, si dimostra facilmente poichè ogni funzione α -misurabile limitata è limite uniforme di funzioni semplici α -misurabili.

Infine la linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni α -misurabili non limitate, segue dalla linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni limitate e α -misurabili e dalla disuguaglianza $(f + g) \wedge n \leq f \wedge n + g \wedge n \leq f + g$, valida per ogni $f, g \in [0, +\infty]^A$.

(3) Siano $f, g \in \mathbf{B}$. Le funzioni $f \vee g, f \wedge g$ sono α -misurabili perchè $\{x : [f \wedge g](x) > \tau\} = \{x : f(x) > \tau\} \cap \{x : g(x) > \tau\}$ e $\{x : [f \vee g](x) > \tau\} = \{x : f(x) > \tau\} \cup \{x : g(x) > \tau\}$ e l'intersezione o unione di insiemi α -misurabili è misurabile. Se f e g sono limitate e appartengono a $\mathbf{B}$, esiste una successione $\{s_n\}_n$ di funzioni semplici α -misurabili tali che $\{s_n\}_n$ converge uniformemente a $f + g$ e $s_n \leq f + g$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Quindi $\int_A (f + g) d\beta_T = \lim_n \int_A s_n d\beta_T = \lim_n \int_A s_n d\alpha_T = \int_A (f + g) d\alpha_T$, cioè $f + g$ è α -misurabile per la proprietà (1). Se f e g sono funzioni qualsiasi appartenenti a $\mathbf{B}$, anche le funzioni $f \wedge n, g \wedge n$ appartengono a $\mathbf{B}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\beta_T &\leq \int_A (f + g) d\alpha_T = \lim_n \int_A (f + g) \wedge n d\alpha_T \leq \\ &\leq \lim_n \int_A f \wedge n d\alpha_T + \lim_n \int_A g \wedge n d\alpha_T = \lim_n \int_A f \wedge n d\beta_T + \\ &+ \lim_n \int_A g \wedge n d\beta_T = \int_A f d\beta_T + \int_A g d\beta_T \leq \int_A (f + g) d\beta_T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{perchè } (f + g) \wedge n &\leq f \wedge n + g \wedge n \leq f + g, \quad \int_A f \wedge n d\beta_T = \\ &= \int_A f \wedge n d\alpha_T \quad \text{e} \quad \int_A g \wedge n d\beta_T = \int_A g \wedge n d\alpha_T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Perciò } f + g \text{ è una funzione } \alpha\text{-misurabile, poichè } \int_A (f + g) d\beta_T = \\ = \int_A (f + g) d\alpha_T < +\infty. \end{aligned}$$

(4) Siano f, g funzioni limitate, appartenenti a $\mathbf{B}$. Dimostriamo che $f \vee g - g \in \mathbf{B}$. La funzione $f \vee g - g$ è il limite uniforme di una successione $\{s_n\}_n$ di funzioni semplici α -misurabili tali che $s_n \leq f \vee g$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Per la proprietà (4) della preposizione 1 si ottiene

$$\int_A (f \vee g - g) d\beta_T = \lim_n \int_A s_n d\beta_T = \lim_n \int_A s_n d\alpha_T = \int_A (f \vee g - g) d\alpha_T.$$

Perciò la funzione $f \vee g - g$ è α -misurabile.

TEOREMA 2. Sia $T: \mathbf{B} \rightarrow [0, +\infty)$ un integrale monotono su $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$. Se per ogni paio di funzioni f, g limitate, appartenenti a $\mathbf{B}$ valgono le proprietà.

$$(i) \quad f \wedge g, f \vee g, f \vee g - g \in \mathbf{B}$$

$$(ii) \quad T(f) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g)$$

allora (1) la famiglia $\mathcal{R}_T$ degli insiemi T -regolari è un anello di insiemi α_T e β_T -misurabili.

(2) per ogni $f \in [0, +\infty)^A$ con $\int_A f d\alpha_T < +\infty$ si ha l'uguaglianza

$$\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T \text{ se e solo se } f \text{ è una funzione } \alpha_T \text{ e } \beta_T\text{-misurabile.}$$

PROVA. Siano $G, F \in \mathcal{S}(A)$. Per ogni $g, \bar{g}, f, \bar{f} \in \mathbf{B}$ tali che $g \leq \varphi_G \leq g \leq 1$ e $\bar{f} \leq \varphi_F \leq f \leq 1$ si ha $T(f) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g) \geq \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F)$ e $T(\bar{f}) + T(\bar{g}) = T(\bar{f} \vee \bar{g}) + T(\bar{f} \wedge \bar{g}) \leq \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F)$.

Quindi $\alpha_T(G) + \alpha_T(F) \geq \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F)$ e $\beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) \geq \beta_T(G) + \beta_T(F)$, per ogni $G, F \in \mathcal{S}(A)$. Perciò $\beta_T(G) + \beta_T(F) \leq \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) \leq \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F) \leq \alpha_T(G) + \alpha_T(F)$, per ogni G e $F \in \mathcal{S}(A)$, perchè $\beta_T \leq \alpha_T$. Pertanto se G e F sono insiemi T -regolari si ottiene $\beta_T(G) + \beta_T(F) = \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) = \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F) = \alpha_T(G) + \alpha_T(F)$, dunque gli insiemi $G \cup F$ e $G \cap F$ sono T -regolari e $\delta_T(G) + \delta_T(F) = \delta_T(G \cap F) + \delta_T(G \cup F)$.

Siano G e F insiemi T -regolari e sia $G \supset F$. Allora $G-F$ è T -regolare. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esistono delle funzioni $g, \bar{g}, f, \bar{f}$ appartenenti a $\mathbf{B}$ tali che $\bar{g} \leq \varphi_G \leq g \leq 1$, $\bar{f} \leq \varphi_F \leq f \leq 1$, $T(g) - T(\bar{g}) < \varepsilon$ e $T(f) - T(\bar{f}) < \varepsilon$. Le funzioni $g-\bar{f}$ e $\bar{g} \vee f-f$ appartengono a $\mathbf{B}$ per la proprietà (i) e sono tali che $g-\bar{f} \geq \varphi_{G-F} \geq \bar{g} \vee f-f$. Allora $T(g-\bar{f}) - T(\bar{g} \vee f-f) = T(g) - T(\bar{f}) - T(\bar{g} \vee f) + T(f) \leq [T(f) - T(\bar{f})] + [T(g) - T(\bar{g})] \leq 2\varepsilon$. Dunque l'insieme $G-F$ è T -regolare e la famiglia $\mathcal{R}_T$ è un anello.

Per dimostrare la misurabilità di un insieme T -regolare G rispetto alle funzioni d'insieme α_T e β_T , è sufficiente verificare che

$$(*) \quad \alpha_T(B) = \alpha_T(G \cap B) + \alpha_T(B-G) \quad \text{per ogni } B \subset A$$

$$(**) \quad \beta_T(B) = \beta_T(G \cap B) + \beta_T(B-G) \quad \text{per ogni } B \subset A$$

Le disuguaglianze $\alpha_T(B) \leq \alpha_T(B \cap G) + \alpha_T(B-G)$ e $\beta_T(B) \geq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B-G)$ sono state verificate nella prima parte della prova del teorema in questione. Perciò restano da verificare le disuguaglianze opposte: $\alpha_T(B) \geq \alpha_T(B \cap G) + \alpha_T(B-G)$ e $\beta_T(B) \leq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B-G)$ per ogni $B \subset A$. Siano H e Z insiemi T -regolari tali che $H \subset B \subset Z$. Si ha $\delta_T(H) = \delta_T(H \cap G) + \delta_T(H-G) \leq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B-G)$ e $\delta_T(Z) = \delta_T(Z \cap G) + \delta_T(Z-G) \geq \alpha_T(B \cap G) + \alpha_T(B-G)$. Quindi $\alpha_T(B) \geq \alpha_T(B \cap G) + \alpha_T(B-G)$ e $\beta_T(B) \leq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B-G)$, perchè $\alpha_T(B) = \inf \{\delta_T(Z) : Z \in \mathfrak{R}_T, Z \supset B\}$ e $\beta_T(B) = \sup \{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \supset B\}$. Dunque ogni insieme G T -regolare è α_T -misurabile e β_T -misurabile.

Per completare la prova del teorema rimane da dimostrare la proprietà (2). In virtù della proposizione 3 e della definizione 4, è sufficiente verificare la (2) quando f è la funzione caratteristica φ_B , di un insieme $B \subset A$. Perciò sia $B \subset A$ tale che $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$. L'insieme B è T -regolare. Quindi l'uguaglianza $\alpha_T(B) = \beta_T(B)$ implica che l'insieme B è α_T e β_T -misurabile, per quanto scritto sopra.

Invece se B è un insieme α_T e β_T -misurabile, risulta che B è T -regolare, cioè $\alpha_T(B) = \beta_T(B)$. Infatti esiste un insieme G T -regolare che contiene B , perchè $\alpha_T(B) = \inf \{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \supset B\}$. Per la proprietà (1) sappiamo che G è α_T e β_T -misurabile. Dalla misurabilità di B segue che $\beta_T(G) = \beta_T(B) + \beta_T(G-B)$ e $\alpha_T(G) = \alpha_T(B) + \alpha_T(G-B)$. Dunque $\beta_T(B) + \beta_T(G-B) = \alpha_T(B) + \alpha_T(G-B)$, cioè $\alpha_T(B) = \beta_T(B)$ perchè $\alpha_T \geq \beta_T$.

OSSERVAZIONE Sia T un integrale monotono, soddisfacente le ipotesi del teorema 2. Non è vero, in generale, che per ogni $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ le funzioni $f \in \mathbf{B}$ siano γ -misurabili. Infatti si consideri l'integrale monotono T , descritto nell'esempio 3, quando l'insieme diretto $(A, \geq)$ è l'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$ dotato dell'ordinamento usuale. La funzione d'insieme $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$, definita sugli insiemi B non T -regolari dalla posizione $\gamma(B) = \frac{1}{n_B + 1}$ dove $n_B = \min \{n \in B\}$, non

rende misurabili gli insiemi T -regolari; mentre gli insiemi T -regolari sono γ -misurabili per ogni $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ che rende γ -misurabili le funzioni $f \in \mathbb{B}$.

3. - *Integrale monotono e misure esterne.*

In questo paragrafo diamo le proprietà necessarie e sufficienti affinché un integrale monotono sia rappresentabile come un integrale associato ad una misura esterna.

Per misura esterna μ intendiamo una funzione d'insieme monotona $\mu: \mathfrak{G}(A) \rightarrow [0, +\infty]$, numerabilmente subadditiva, cioè $\mu(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i)$ se $H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$.

TEOREMA 3. *Sia $T: \mathbb{B} \rightarrow [0, +\infty)$ un integrale monotono su $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^A$. Se valgono le seguenti proprietà*

- (i) $g \wedge f, g \vee f, g \vee f \cdot f \in \mathbb{B}$ se $g, f \in \mathbb{B}$ e g, f sono limitate
- (ii) $T(g) = T(g \wedge f) + T(g \vee f \cdot f)$ se $g, f \in \mathbb{B}$ e g, f sono limitate
- (iii) $T(g) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i)$, se $g, g_i \in \mathbb{B}$, $g \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i$, g e g_i sono limitate

allora la funzione d'insieme μ definita da

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i) : H \in \mathfrak{R}_T \text{ e } \bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \right\} \text{ per ogni } B \subset A$$

è la massima misura esterna che rappresenta T e ogni $f \in \mathbb{B}$ è μ -misurabile.

PROVA. Per il teorema 2 gli insiemi T -regolari formano un anello e δ_T è additiva in $\mathfrak{R}_T$, cioè $\delta_T(H \cup G) = \delta_T(H) + \delta_T(G)$ se H e G sono insiemi T -regolari disgiunti. Gli insiemi T -regolari sono μ -misurabili. Infatti sia $H \in \mathfrak{R}_T$ e $B \subset A$ con $\mu(B) < +\infty$. Per ogni

$$\varepsilon > 0 \text{ esiste } \{H_i\}_i \subset \mathfrak{R}_T \text{ tale che } \mu(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i) - \varepsilon. \text{ Quindi}$$

$$\mu(B) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i \cap H) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i - H) \geq \mu(B \cap H) + \mu(B - H).$$

Perciò $\mu(B) \leq \mu(B \cap H) + \mu(B - H)$.

Da quest'ultima disuguaglianza e dalla subaddittività di μ segue che $\mu(B) = \mu(B \cap H) + \mu(B - H)$ per ogni $B \subset A$ e $H \in \mathcal{R}_T$. Dunque gli insiemi T -regolari sono μ -misurabili. Per il teorema 1 la funzione d'insieme μ rappresenta T , cioè $T(f) = \int_A f d\mu$ per ogni $f \in \mathbf{B}$, se e solo se $\mu(H) = \delta_T(H)$ per ogni insieme H T -regolare.

Per avere $\mu|_{\mathcal{R}_T} = \delta_T$, è sufficiente dimostrare che δ_T è numerabilmente subadditiva in $\mathcal{R}_T$. Allora sia $H \subset \sqcup H_i$ con $H \in \mathcal{R}_T$ e $H_i \in \mathcal{R}_T$, proviamo che $\delta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$. Per ogni $g \in \mathbf{B}$, $g \leq \varphi_H$ e per ogni $g_i \in \mathbf{B}$, $\varphi_{H_i} \leq g_i \leq 1$ si ha $g \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i$. Quindi per la proprietà (iii) si ottiene $T(g) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i)$, cioè $\beta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_T(H_i)$. Essendo H e H_i insiemi T -regolari, si ha $\delta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$, cioè δ_T è numerabilmente subadditiva e la funzione d'insieme μ coincide con δ_T sugli insiemi T -regolari.

OSSERVAZIONE

Altre espressioni della funzione d'insieme μ descritta nel teorema 3 sono :

$$1) \mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i) : g_i \in \mathbf{B} \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} g_i \geq \varphi_B \right\} \text{ per ogni } B \subset A$$

$$2) \mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i) : g_i \in \mathbf{B} \text{ e } \sup_i g_i \geq \varphi_B \right\} \text{ per ogni } B \subset A$$

$$3) \mu(B) = \inf \left\{ \lim_i T(g_i) : \{g_i\}_i \subset \mathbf{B}, g_i \leq g_{i+1}, \lim_i g_i \geq \varphi_B \right\} \text{ se } \mathbf{B}$$

è chiusa rispetto alle somme.

$$4) \mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_T(H_i) : H_i \in P(A), \sqcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \right\}, \text{ dove } P(A)$$

è la famiglia degli insiemi $H = \{x : f(x) > \tau\}$ per qualche $f \in \mathbf{B}$ e $\tau \in (0, +\infty)$.

$$5) \mu(B) = \inf \left\{ \beta_T(H) : H \in P(A), H \supset B \right\}, \text{ Se } P(A) \text{ è come in 4) ed è chiuso rispetto alle unioni numerabili.}$$

ESEMPIO 5°. Sia X uno spazio topologico e $C^+(X)$ l'insieme delle funzioni continue non negative. Ogni funzione $M : C^+(X) \rightarrow [0, +\infty)$ lineare è un integrale monotono [vedi esempio 4] che verifica le ipotesi del teorema 3. Se si indica con $P(X)$ la famiglia degli insiemi aperti $H = \{x : f(x) > \tau\}$ per qualche $f \in C^+(X)$ e $\tau \in (0, +\infty)$, la misura esterna μ definita dalla posizione $\mu(B) = \inf \{\beta_T(H) : H \in P(X), H \supset B\}$, è tale che $M(f) = \int_X f d\mu$ per ogni $f \in C^+(X)$ e ogni $f \in C^+(X)$ è μ -misurabile.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 marzo 1977.