

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDUARDO H. A. GONZÀLEZ

Sul problema della goccia appoggiata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 55 (1976), p. 289-302

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__289_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__289_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sul problema della goccia appoggiata.

EDUARDO H. A. GONZÁLEZ (*)

0. — Introduzione.

Recentemente sono state applicate nuove tecniche variazionali, quali gli insiemi di perimetro localmente finito e le funzioni aventi derivate misure, allo studio di problemi di teoria della capillarità. In [1] M. Emmer ha considerato il problema della superficie libera di un liquido contenuto in un cilindro verticale provando un teorema di esistenza, unicità e regolarità della soluzione. In questo lavoro voglio considerare il problema della goccia di liquido appoggiata su un piano orizzontale (**). A differenza del problema considerato da Emmer, che è per sua natura non-parametrico, cioè trattabile nella classe delle superfici grafico di funzioni, il problema della goccia appoggiata è parametrico e cioè tale da doversi trattare, a meno di non assumere a priori simmetrie che pur sembrano dimostrabili a posteriori, in classi di superfici più generali dei grafici di funzioni. Le superfici che si prestano bene allo scopo sono le frontiere degli insiemi di perimetro finito, introdotte da E. De Giorgi [3]. Queste stesse superfici giocano un ruolo molto importante, seppure indiretto, nella dimostrazione della regolarità della soluzione del problema trattato da Emmer.

Per poter enunciare in termini matematici il problema che voglio trattare ritengo utile richiamare il significato di alcuni simboli:

R^n indicherà lo spazio euclideo a n dimension, $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto generico di R^n , H_{n-1} la misura di Hausdorff $n - 1$ dimensionale (vedi [4] pag. 171). Se con E denoteremo un insieme di R^n misurabile

(*) Indirizzo dell'A.: Università, di Trento - Facoltà di Scienze.

(**) Per maggiori informazioni sulle questioni matematiche che hanno origine da problemi di capillarità rimandiamo all'articolo espositivo di R. Finn [2].

secondo Lebesgue, con φ_E denoteremo la sua funzione caratteristica e con $D\varphi_E$ il gradiente di φ_E (nel senso delle distribuzioni, vedi [5], [6]). Con $\int_{\Omega} |D\varphi_E|$, Ω aperto di R^n , indicheremo la variazione totale di $D\varphi_E$ su Ω , cioè

$$(0.1) \quad \int_{\Omega} |D\varphi_E| = \sup \left\{ \int_E \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} dx; g_i \in C_0^1(\Omega), \sum_{i=1}^n g_i^2(x) \leq 1, \forall x \in R^n \right\}.$$

Diremo che E ha perimetro finito se $\int_{R^n} |D\varphi_E| < +\infty$.

Con $\mathcal{E}$ indicheremo la classe degli insiemi $E \in R^n$ di misura 1 e perimetro finito e contenuti nel semispazio $\{x: x_n > 0\}$, cioè

$$(0.2) \quad \mathcal{E} = \left\{ E \subset R^n \cap \{x: x_n > 0\}; \int_{R^n} |D\varphi_E| < +\infty, \text{mis } E = 1 \right\}.$$

Ricordiamo che (vedi [8]) per ogni $E \in \mathcal{E}$, φ_E ha una traccia su $\{x: x_n = 0\}$ che denoteremo ancora con φ_E . Detta traccia è sommabile su $\{x: x_n = 0\}$ e verifica la disuguaglianza

$$(0.3) \quad \int_{\{x: x_n = 0\}} \varphi_E dH_{n-1} < \int_{\{x: x_n > 0\}} |D\varphi_E|.$$

Per ogni $\nu \in R$ possiamo allora considerare su $\mathcal{E}$ il funzionale

$$(0.4) \quad \mathcal{F}_{\nu}(E) = \int_{\{x: x_n > 0\}} |D\varphi_E| + \nu \int_{\{x: x_n = 0\}} \varphi_E dH_{n-1} + \int_E x_n dx$$

(L'integrale $\int_E x_n dx$ può essere $+\infty$; in tal caso sarà $\mathcal{F}_{\nu}(E) = +\infty$).

Detto funzionale rappresenta, nel caso $n = 3$, a meno di una costante moltiplicativa, l'energia totale di un liquido di densità costante occupante la regione E ; il termine $\int_{\{x: x_n > 0\}} |D\varphi_E|$, che misura la parte di frontiera di E non appoggiata sull'iperpiano $\{x: x_n = 0\}$ rappresenta l'energia della superficie libera, $\nu \int_{\{x: x_n = 0\}} \varphi_E dH_{n-1}$ l'energia dovuta all'attrazione fra liquido e superficie di appoggio e $\int_E x_n dx$ l'energia dovuta alla gravità. La costante ν dipende dalla densità del liquido, dalla

gravità, dalla tensione superficiale sulla superficie di appoggio oltre che dalla scelta delle unità di misura.

Il problema è di minimizzare il funzionale $\mathcal{F}_r$. Nel paragrafo 1 vedremo che attraverso un procedimento di simmetrizzazione, l'esistenza del minimo di $\mathcal{F}_r$ può essere studiata in una classe particolare di insiemi. Nel paragrafo 2 si prova l'esistenza del minimo di $\mathcal{F}_r$ in detta classe. Restano aperti i problemi di unicità e regolarità della soluzione.

1. — Simmetrizzazione.

Premettiamo il seguente

LEMMA 1. Sia $r: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty]$ regolare. Posto

$$A = \{(y, x_n): y \in \mathbf{R}^{n-1}, |y| < r(x_n)\}$$

si ha, $\forall \Omega \subset \mathbf{R}$ aperto, $\forall g \in C'_0(\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega)$

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \int \varphi_A D_n g(y, x_n) dy dx_n = \\ = \frac{1}{n-1} \int r^{n-1}(x_n) \left(\frac{d}{dx_n} \int_{|y|=1} g(yr(x_n), x_n) dH_{n-2}(y) \right) dx_n \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo in primo luogo che

$$\begin{aligned} (1.2) \quad \int \varphi_A D_n g(y, x_n) dy dx_n &= \int_{|y| \leq r(x_n)} dx_n \int D_n g(y, x_n) dy = \\ &= \int_{|y| \leq 1} dx_n \int D_n g(yr(x_n), x_n) r^{n-1}(x_n) dy \end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$D_n g(yr(x_n), x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} g(yr(x_n), x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} D_i g(yr(x_n), x_n) y_i r'(x_n)$$

e quindi

$$(1.3) \quad r^{n-1}(x_n) D_n g(yr(x_n), x_n) = r^{n-1}(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} g(yr(x_n), x_n) - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} D_i g(yr(x_n), x_n) y_i r^{n-1}(x_n) r'(x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} (r^{n-1}(x_n) g(yr(x_n), x_n)) - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_i} (g(yr(x_n), x_n) y_i) r^{n-2}(x_n) r'(x_n).$$

Da questa e dalla (1.2) si ottiene

$$(1.4) \quad \int \varphi_A D_n g(y, x_n) dy dx_n = \int dx_n \int_{|y| \leq 1} \frac{\partial}{\partial x_n} (r^{n-1}(x_n) g(yr(x_n), x_n)) dy - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{|y| \leq 1} dx_n \int \frac{\partial}{\partial y_i} (g(yr(x_n), x_n) y_i) r^{n-2}(x_n) r'(x_n) dy = \\ = - \sum_{i=1}^{n-1} \int dx_n \int_{|y| \leq 1} \frac{\partial}{\partial y_i} (g(yr(x_n), x_n) y_i) r^{n-2}(x_n) r'(x_n) dy$$

essendo g a supporto compatto.

Dalla formula di Green si ha

$$(1.5) \quad \int_{|y| \leq 1} dx_n \int \frac{\partial}{\partial y_i} (g(yr(x_n), x_n) y_i) r^{n-2}(x_n) r'(x_n) dy = \\ = \int_{|y|=1} dx_n \int g(yr(x_n), x_n) y_i r^{n-2}(x_n) r'(x_n) y_i dH_{n-2}(y)$$

e quindi

$$(1.6) \quad \int \varphi_A D_n g(y, x_n) dy dx_n = \\ = - \int_{|y|=1} dx_n \int g(yr(x_n), x_n) r^{n-2}(x_n) r'(x_n) dH_{n-2}(y)$$

dalla quale si ottiene la (1.1) mediante una semplice integrazione per parti. c.v.d.

Dimostriamo adesso il seguente lemma di simmetrizzazione:

LEMMA 2. Sia $\int_{\mathbf{R}^n} |D\varphi_E| < +\infty$ e $\text{mis } E < +\infty$. Posto

$$\varrho(x_n) = \left(\omega_{n-1}^{-1} \int_{y \in \mathbf{R}^{n-1}} \varphi_E(y, x_n) dy \right)^{1/n-1}$$

$$E^s = \{(y, x_n) : y \in \mathbf{R}^{n-1}, |y| < \varrho(x_n)\}$$

si ha, $\forall \Omega \subset \mathbf{R}$ aperto

$$(1.7) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E^s}| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_E|$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\tau_h^{(1)} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $\tau_h^{(2)} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ due successioni regolarizzanti, cioè

$$(1.8) \quad \begin{cases} 0 \leq \tau_h^{(1)} \leq 1 & \tau_h^{(1)}(y) = 0 & \text{per } |y| > h^{-1} \\ 0 \leq \tau_h^{(2)} \leq 1 & \tau_h^{(2)}(x_n) = 0 & \text{per } |x_n| > h^{-1} \\ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \tau_h^{(1)}(y) dy = 1, & \int_{\mathbf{R}} \tau_h^{(2)}(x_n) dx_n = 1 \end{cases}$$

Poniamo

$$(1.9) \quad \tau_h(y, x_n) = \tau_h^{(1)}(y) \cdot \tau_h^{(2)}(x_n)$$

$$(1.10) \quad \psi_h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_E(\xi) \tau_h(x - \xi) d\xi.$$

È noto che $\psi_h(x) \rightarrow \varphi_E(x)$ quasi ovunque in $\mathbf{R}^n$ e (vedi [6])

$$(1.11) \quad \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \psi_h| \geq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_E|$$

$$(1.12) \quad \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \psi_h| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \overline{\Omega}} |D_n \varphi_E|.$$

Poniamo

$$\varrho_h(x_n) = \left(\omega_{n-1}^{-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \psi_h(y, x_n) dy \right)^{1/n-1}$$

$$E_h^s = \{(y, x_n) : y \in \mathbf{R}^{n-1}, |y| < \varrho_h(x_n)\}$$

Si ha

$$(1.13) \quad \int \psi_h(y, x_n) dy = \int \tau_h^{(2)}(t - x_n) \left[\int \varphi_E(\xi, t) \tau_h^{(1)}(\xi - y) d\xi dy \right] dt = \\ = \int \tau_h^{(2)}(t - x_n) [\varphi_E(\xi, t) d\xi] dt$$

e per noti teoremi

$$(1.14) \quad \int \tau_h^{(2)}(t - x_n) \left[\int \varphi_E(\xi, t) d\xi \right] dt \rightarrow \int \varphi_E(\xi, x_n) d\xi \quad \text{q.o. } x_n \in \mathbf{R}.$$

Ne segue che per quasi tutti gli $x_n \in R$ deve essere

$$(1.15) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_E(y, x_n) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \psi_h(y, x_n) dy$$

e quindi $\varrho_h(x_n) \xrightarrow{h} \varrho(x_n)$ per quasi tutti gli $x_n \in R$, ciò che implica

$$\varphi_{E_h^*}(x) \xrightarrow{h} \varphi_{E^*}(x)$$

quasi ovunque in R^n .

Ne segue allora che (vedi (1.11)), $\forall \Omega \subset \mathbf{R}$ aperto,

$$(1.16) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E^*}| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E_h^*}|.$$

Per definizione (vedi [6]) si ha

$$(1.17) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E_h^*}| = \sup \left\{ \int \varphi_{E_h^*} D_n g(y, x_n) dy dx_n, g \in C'_0(\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega), |g| \leq 1 \right\}.$$

D'altra parte, dal lemma 1 con $A = E_h^*$, $r = \varrho_h$, si ha

$$(1.18) \quad \int \varphi_{E_h^*} D_n g(y, x_n) dy dx_n = \\ = \int \omega_{n-1} \varrho_h^{n-1}(x_n) dx_n \frac{d}{dx_n} \left(\int_{|y|=1} \frac{g(y \varrho_h(x_n), x_n)}{(n-1) \omega_{n-1}} dH_{n-2}(y) \right).$$

Quindi

$$(1.19) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E_h}| \leq \leq \sup_{\mathbf{R}^n} \left\{ \int \psi_h D_n G(x_n) dy dx_n, G \in C'_0(\Omega), |G| \leq 1 \right\}$$

giacchè per definizione è

$$\omega_{n-1} \varrho_h^{n-1}(x_n) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \psi_h(y, x_n) dy$$

Poichè vale ovviamente

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi_h D_n G(x_n) dy dx_n \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \psi_n| \quad \forall G \in C'_0(\Omega), |G| \leq 1$$

avremo, ricordando (1.16), (1.17) e (1.18) che

$$(1.20) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E^*}| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \psi_h|.$$

Dalle (1.11) e (1.12) si ha, nel caso $\int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \partial \Omega} |D_n \varphi_E| = 0$, che

$$(1.21) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_{E^*}| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_E|.$$

La (1.21) vale in realtà per ogni $\Omega \subset \mathbf{R}$, poichè esiste al più una infinità numerabile di punti $a_j \in \mathbf{R}$ tali che

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \{a_j\}} |D_n \varphi_E| > 0$$

quindi, se $\Omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} (\alpha_h, \beta_h)$, si può scrivere

$$\Omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_h + \varepsilon_h^i, \beta_h - \varepsilon_h^i)$$

con

$$\alpha_h + \varepsilon_h^i \neq a_j, \quad \beta_h - \varepsilon_h^i \neq a_j \quad \forall h, i, j, \quad \varepsilon_h^i \downarrow 0 \quad \forall h$$

e allora

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_E| = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_h \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times (\alpha_h + \varepsilon_h^i, \beta_h - \varepsilon_h^i)} |D_n \varphi_E| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_h \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times (\alpha_h + \varepsilon_h^i, \beta_h - \varepsilon_h^i)} |D_n \varphi_E| = \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D_n \varphi_E|$$

c.v.d.

Osserviamo adesso che, posto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |(D_1 \varphi_E, \dots, D_{n-1} \varphi_E)| &= \\ &= \sup \left\{ \int \varphi_E(x) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} dx, \quad g_i \in C_0^1(\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega), \quad \sum_{i=1}^{n-1} g_i^2 \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

si ha (vedi [9], teorema 3.3)

$$(1.22) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |(D_1 \varphi_E, \dots, D_{n-1} \varphi_E)| = \int_{\Omega} dx_n \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |D_y \varphi_E(y, x_n)|$$

dove per $D_y \varphi_E(y, x_n)$ intendiamo il gradiente di $\varphi_E(y, x_n)$ rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_{n-1}$.

Analogamente

$$(1.23) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |(D_1 \varphi_{E^s}, \dots, D_{n-1} \varphi_{E^s})| = \int_{\Omega} dx_n \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |D_y \varphi_{E^s}(y, x_n)|.$$

Poichè gli insiemi $\{y \in \mathbf{R}^{n-1}; (y, x_n) \in E^s\}$ sono sfere $n-1$ dimensionali e si ha che

$$H_{n-1}\{y: (y, x_n) \in E^s\} = H_{n-1}\{y: (y, x_n) \in E\} \quad \forall x_n \in \mathbf{R}$$

dalla disuguaglianza isoperimetrica (vedi [7]) segue che

$$(1.24) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |D_y \varphi_{E^s}(y, x_n)| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |D_y \varphi_E(y, x_n)| \quad \forall x_n \in \mathbf{R}$$

Dalla (1.22) (1.23) e (1.24) si ha

$$(1.25) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |(D_1 \varphi_{E^s}, \dots, D_{n-1} \varphi_{E^s})| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |(D_1 \varphi_E, \dots, D_{n-1} \varphi_E)| \quad \forall \Omega \subset \mathbf{R} \text{ aperto}.$$

Per il lemma di [7] pagina 38, § 3, si avrà dalle (1.25) e (1.7)

$$(1.26) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D\varphi_{E^*}| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \times \Omega} |D\varphi_E| \quad \forall \Omega \subset \mathbf{R} \text{ aperto},$$

e l'eguaglianza in (1.26) implica l'eguaglianza in (1.24) per quasi tutti gli $x_n \in \Omega$, da cui segue che per quasi tutti gli $x_n \in \Omega$ l'insieme $\{y: (y, x_n) \in E\}$ è una sfera $n-1$ dimensionale.

Da tutto questo segue che, per quanto riguarda il funzionale $\mathcal{F}_v$, (vedi (0.4)) possiamo dire che

$$\mathcal{F}_v(E^*) \leq \mathcal{F}_v(E) \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

e l'eguaglianza vale solo se l'insieme E ha sezioni orizzontali sferiche. Se indichiamo pertanto con $\mathcal{E}^*$ la sottofamiglia di $\mathcal{E}$ costituita dagli insiemi che hanno sezioni orizzontali sferiche centrata sull'asse x_n , si ha

$$\inf_{\mathcal{E}^*} \mathcal{F}_v = \inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_v.$$

Per quanto riguarda quindi l'esistenza del minimo del funzionale $\mathcal{F}_v$, basterà limitarci a considerare $\mathcal{F}_v$ ristretto alla classe $\mathcal{E}^*$.

2. - Esistenza del minimo del funzionale $\mathcal{F}_v$.

Cominciamo con lo stabilire le condizioni perchè risulti

$$(2.1) \quad \inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_v > -\infty.$$

Dalla (0.4) si ha

$$(2.2) \quad v \geq -1 \Rightarrow \mathcal{F}_v(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Nel caso $v < -1$ osserviamo che, posto $E_\varepsilon = \{(y, x_n); |y| < \varrho_\varepsilon, 0 < x_n < \varepsilon\}$ dove $\varepsilon \cdot \omega_{n-1} \cdot \varrho_\varepsilon^{n-1} = 1$, si ha

$$(2.3) \quad \mathcal{F}_v(E_\varepsilon) = \omega_{n-1} \varrho_\varepsilon^{n-2} [\varepsilon(n-1) + \varepsilon^2 \varrho_\varepsilon + (1+v)\varrho_\varepsilon]$$

e quest'ultima espressione tende a $-\infty$ per ε che tende a 0. Nel caso

$\nu = -1$ dalla (2.3) si ha

$$(2.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{-1}(E_\varepsilon) = 0$$

quindi $\inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_{-1} = 0$, e lo zero non può essere un valore assunto da $\mathcal{F}_{-1}$ perchè nella (0.3) la disuguaglianza è stretta per ogni $E \in \mathcal{E}$. L'ipotesi necessaria per l'esistenza del minimo di $\mathcal{F}_\nu$ risulta quindi essere $\nu > -1$.

OSSERVAZIONE. Fisicamente ν rappresenta il coseno dell'angolo formato dalla normale uscente dal liquido nel punto di contatto con la superficie d'appoggio con la normale alla superficie d'appoggio orientata verso il basso. Nel caso $\nu = -1$ quindi il liquido tenderebbe ad appiattirsi sulla superficie d'appoggio.

Assumiamo quindi $\nu > -1$ e indichiamo con M un qualunque numero reale maggiore di $\inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_\nu$. Indichiamo con $\mathcal{E}_M^s$ la classe

$$\{E \in \mathcal{E}^s; \mathcal{F}_\nu(E) < M\}.$$

Avremo

$$(2.5) \quad \int_E x_n dx \leq M, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E| \leq c(M, \nu) \quad \forall E \in \mathcal{E}_M^s$$

Lo stesso argomento che prova la (0.3) implica

$$(2.6) \quad \int \varphi_E(y, t) dy \leq \int_{x_n > t} |D\varphi_E(y, x_n)| \quad \forall t \geq 0,$$

da cui si ha

$$(2.7) \quad \int \varphi_E(y, t) dy \leq c(M, \nu) \quad \forall E \in \mathcal{E}_M^s \quad \forall t \geq 0$$

e quindi anche

$$(2.8) \quad E \subset \{(y, x_n); |y| \leq \tilde{c}(M, \nu), x_n \geq 0\} \quad \forall E \in \mathcal{E}_M^s$$

In altre parole gli insiemi $E \in \mathcal{E}_M^s$ risultano essere contenuti nel cilindro verticale illimitato superiormente

$$\{(y, x_n); |y| \leq \tilde{c}(M, \nu), x_n \geq 0\}.$$

Stabilito questo, passiamo a dimostrare il seguente teorema di compattezza:

TEOREMA 1. $\mathcal{E}_M^s$ è compatta in $L^1(R^n)$, cioè per ogni successione $\{E_h\} \subset \mathcal{E}_M^s$ esiste una sottosuccessione $\{E_{h_j}\}$ convergente in $L^1(R^n)$ ad un $E_0 \in \mathcal{E}_M^s$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{E_h\} \subset \mathcal{E}_M^s$ fissata. Essendo

$$\int_{R^n} |D\varphi_{E_h}| \leq c(M, \nu) \quad \forall h$$

risulta, in virtù del teorema di compattezza per gli insiemi di perimetro finito (vedi [6]), che esiste una sottosuccessione $\{E_{h_j}\} \subset \{E_h\}$ convergente nel senso di $L^1_{\text{loc}}(R^n)$. Tale convergenza è nel nostro caso valida anche in $L^1(R^n)$. Infatti, essendo

$$\int_{E_h} x_n dx \leq M \quad \forall h$$

esiste una costante l_0 indipendente da h tale che

$$(2.10) \quad \int_l^\infty dx_n \int_{R^{n-1}} \varphi_{E_h}(y, x_n) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } l > l_0, \quad \forall h.$$

Quindi

$$(2.11) \quad \int_{R^n} |\varphi_{E_{h_k}} - \varphi_{E_{h_{k'}}}| dx = \int_0^l dx_n \int_{|y| \leq \hat{c}(M, \nu)} |\varphi_{E_{h_k}}(y, x_n) - \varphi_{E_{h_{k'}}}(y, x_n)| dy + \\ + \int_0^\infty dx_n \int_{R^{n-1}} |\varphi_{E_{h_k}}(y, x_n) - \varphi_{E_{h_{k'}}}(y, x_n)| dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

se $l > l_0$ e k, k' sono abbastanza grandi. c.v.d.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 2 (semicontinuità di $\mathcal{F}_\nu$). Per $|\nu| \leq 1$ il funzionale $\mathcal{F}_\nu$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza in $L^1(R^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano E_h, E in $\mathcal{E}$ tali che

$$(2.12) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_{E_h} - \varphi_E| dx = 0.$$

È noto che, per ogni $\delta > 0$, esiste $c(\delta)$ tale che

$$(2.13) \quad \left| \nu \int_{\{x: x_n = 0\}} (\varphi_E - \varphi_{E_h}) dH_{n-1} \right| \leq \int_{\{x: 0 < x_n < \delta\}} |D(\varphi_E - \varphi_{E_h})| + c(\delta) \int_{\{x: 0 < x_n < \delta\}} |\varphi_E - \varphi_{E_h}| dx.$$

Quindi, per quasi tutti i $\delta > 0$ si ha che

$$(2.14) \quad \int_{\{x: x_n > 0\}} (|D\varphi_E| - |D\varphi_{E_h}|) + \nu \int_{\{x: x_n = 0\}} (\varphi_E - \varphi_{E_h}) \leq dH_{n-1} \\ \leq \int_{\{x: x_n > \delta\}} (|D\varphi_E| - |D\varphi_{E_h}|) + c(\delta) \int_{\{x: 0 < x_n < \delta\}} |\varphi_E - \varphi_{E_h}| dx + 2 \int_{\{x: 0 < x_n < \delta\}} |D\varphi_E|.$$

Essendo il funzionale

$$E \rightarrow \int_A |D\varphi_E|, \quad A \subset \mathbf{R}^n$$

semicontinuo rispetto alla convergenza in $L^1(\mathbf{R}^n)$ (vedi [3]) segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h(\varepsilon)$ tale che

$$(2.15) \quad \int_{\{x: x_n > 0\}} |D\varphi_E| + \nu \int_{\{x: x_n = 0\}} \varphi_E dH_{n-1} < \\ < \int_{\{x: x_n > 0\}} |D\varphi_{E_h}| + \nu \int_{\{x: x_n = 0\}} \varphi_{E_h} dH_{n-1} + \varepsilon \quad \text{se } h > h(\varepsilon)$$

Il risultato segue adesso tenendo conto della semicontinuità del funzionale

$$E \rightarrow \int_E x_n dx \quad \text{c.v.d.}$$

TEOREMA DI ESISTENZA. Per $-1 < \nu \leq 1$ esiste $E_0 \in \mathcal{E}^s$ tale che

$$\mathcal{F}_\nu(E_0) = \inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_\nu$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $\mu_\nu = \inf_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_\nu$, sia $\{E_h\} \subset \mathcal{E}_M^s$ una successione minimizzante, e cioè

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\nu(E_h) = \mu_\nu.$$

Per il teorema 1 esiste una sottosuccessione $\{E_{h_j}\} \subset \{E_h\}$ convergente nel senso di $L^1(R^n)$ ad un insieme $E_0 \in \mathcal{E}^s$. Ora, dalla semicontinuità di $\mathcal{F}_\nu$ (teorema 2) segue che

$$\mu_\nu = \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\nu(E_{h_j}) \geq \mathcal{F}_\nu(E_0)$$

e cioè

$$\mathcal{F}_\nu(E_0) = \mu_\nu$$

il che conclude la dimostrazione. c.v.d.

Ringrazio il Prof. M. Miranda che mi ha guidato in questa ricerca.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. EMMER, *Esistenza, unicità e regolarità nelle superfici di equilibrio nei capillari*, Ann. Univ. Ferrara, **18**, no. 6 (1973).
- [2] R. FINN, *Capillarity Phenomena*, Universitat Bonn (1973).
- [3] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura (r-1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Annali di mat. pura ed appl., serie 4, **36** (1954).
- [4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).
- [5] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Parigi (1966).
- [6] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, **18**, fasc. I (1964).
- [7] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nelle classi degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Memorie Accad. Naz. Lincei, serie 8, **5** (1958).

- [8] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **38** (1967).
- [9] M. MIRANDA, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, **18**, fasc. IV (1964).

Manoscritto pervenuto alla redazione il 20 luglio 1975.