RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OTTO MUTZBAUER

Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 195-208

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__195_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2.

OTTO MUTZBAUER (*)

1. Einleitung

Auf sehr elementare Weise werden in dieser Arbeit den torsionsfreien abelschen Gruppen des Ranges 2 Invarianten, sog. Charakteristiken, zugeordnet (Lemma 1), die man am ehesten noch mit den Invarianten (Charakteristiken, Typen) torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 1 vergleichen kann. Es wird eine formelmäßige Beziehung für Charakteristiken hergeleitet, die isomorphe Gruppen beschreiben (Satz 1).

Wie bei vielen bekannten Invarianten, z. B. von Campbell [4] und Kurosh [6] (siehe auch Szekeres [8] und Arnold [1]), handelt es sich auch in dieser Arbeit grundsätzlich um eine Umformulierung des Isomorphieproblems in eine Form, die selbst i.a. keine Lösung zuläßt. Im Gegensatz zu den genannten Arbeiten wird jedoch hier für viele (und keineswegs nur triviale) Fälle eine Lösung möglich. Teilweise führt die Frage nach Isomorphie allerdings auf ein zahlentheoretisches Problem, für das mir keine Lösung bekannt ist, nämlich:

Gibt es zur unendlichen Folge $\{z_p\}$ natürlicher Zahlen (p ist aus einer unendlichen Menge von Primzahlen) mit $0 \leqslant z_p < p^{l_p}$ $(0 < l_p < \infty)$ eine rationale Zahl r, die die jeweiligen p-adischen Standardentwick-

(*) Indirizzo dell'A.: Math. Inst. der Universität Würzburg, 87 Würzburg, Am Hubland, BRD.

lungen

$$r = z_p + \sum_{i=l_p}^{\infty} p^i \varrho_{pi} \qquad (0 \leqslant \varrho_{pi} < p)$$

hat?

Hingewiesen sei auf die Arbeit von Richman [7], der u.a. eine Teilklasse torsionsfreier abelscher Gruppen des Rangs 2 bis auf Isomorphie klassifiziert hat.

Eine Anwendung der Methode, die in dieser Arbeit verwandt wird, auf torsionsfreie abelsche Gruppen von beliebigem endlichen Rang erscheint mir, trotz erhöhtem technischen Aufwand, vielversprechend.

Für das folgende seien $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{P}$ die Mengen der natürlichen, der ganzen und der Primzahlen. Für alle anderen Notationen wird, sofern keine eigenen Definitionen gegeben werden, auf Fuchs [5] verwiesen.

2. Charakteristiken

Torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2 sollen durch Invarianten beschrieben werden, die den Namen Charakteristiken erhalten, um Analogien zur Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen des Ranges 1 aufzuzeigen.

Sei $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j p^j \in \boldsymbol{Q}_p^*$ eine ganze p-adische Zahl in Standardform, d.h. $0 \leqslant \alpha_j < p$. Die $(k-1)$-te Partialsumme von α werde mit $\alpha^{(k)}$ bezeichnet:

$$\alpha^{(k)} := \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p^j \qquad (k \in \boldsymbol{N}) .$$

Sei $\beta \in \boldsymbol{K}_p^*$ ein Element des Körpers der p-adischen Zahlen (kurz: p-adische Zahl), so wird für natürliches $k \in \boldsymbol{N}$ definiert:

$$\beta^{(k)} := \begin{cases} \beta^{(k)} & \text{für } \beta \in \boldsymbol{Q}_p^* , \\ \left((\beta^{-1})^{(k)}\right)^{-1} & \text{für } \beta \notin \boldsymbol{Q}_p^* \text{ und } (\beta^{-1})^{(k)} \neq 0 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Jeder p-adischen Zahl $\beta \in \boldsymbol{K}_p^*$ wird die Folge

$$\beta = \{\beta^{(k)} | k \in \boldsymbol{N}\}$$

p-adischer Zahlen zugeordnet und gleichfalls mit β bezeichnet, wenn Zweideutigkeiten ausgeschlossen sind. Eigens definiert werden die Folgen:

$$p^{\infty} = \{(p^{\infty})^{(k)} | k \in \boldsymbol{N}\} := \{p^k | k \in \boldsymbol{N}\} \quad \text{(Limes gleich 0)}$$

und

$$p^{-\infty} = \{(p^{-\infty})^{(k)} | k \in \boldsymbol{N}\} := \{p^{-k} | k \in \boldsymbol{N}\} .$$

Dieser Folge entspricht keine p-adische Zahl, vielmehr wird $p^{-\infty}$ analog wie das Symbol ∞ (bei den reellen Zahlen) behandelt. Für solche Folgen p-adischer Zahlen werden Addition und Multiplikation gliedweise erklärt. Für Folgen, deren Limiten p-adische Zahlen sind, ergeben sich die gewohnten Operationen in $\boldsymbol{K}_p^*$.

$$(1) \qquad \begin{cases} \{\alpha^{(k)}\} + \{\beta^{(k)}\} := \{(\alpha^{(k)} + \beta^{(k)})^{(k)}\} , \\ \{\alpha^{(k)}\} \cdot \{\beta^{(k)}\} := \{(\alpha^{(k)} \cdot \beta^{(k)})^{(k)}\} . \end{cases}$$

Für $\alpha \in \boldsymbol{K}_p^*$ gilt speziell:

$$p^{-\infty}\alpha = \{p^{-k}\alpha^{(k)}\} , \quad p^{-\infty} \cdot p^{\infty} = 1 , \quad p^{-\infty} + \alpha = p^{-\infty} , \quad p^{-\infty} \cdot 0 = 0 .$$

Jede torsionsfreie abelsche Gruppe G des Ranges 2—im folgenden kurz Gruppe genannt—läßt sich als Erweiterung

$$(2) \qquad 0 \to \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle \to G \to \bigoplus_{p \in \boldsymbol{P}} [\boldsymbol{Z}(p^{m_p}) \oplus \boldsymbol{Z}(p^{n_p})] \to 0 \quad \text{(exakt)}$$

schreiben, mit unabhängigen Elementen $u, v \in G$—genannt Basis von G—und $0 \leqslant m_p \leqslant n_p \leqslant \infty$. Im rationalen Vektorraum V der Dimension 2 mit der Basis u, v werde für $p \in \boldsymbol{P}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Q}_p^*$ und $0 \leqslant l \leqslant \infty$ eine Folge von Elementen aus V ausgezeichnet:

$$(3) \qquad p^{-l}(\alpha u + \beta v) := \{(p^{-l})^{(k)}\alpha^{(k)}u + (p^{-l})^{(k)}\beta^{(k)}v | k \in \boldsymbol{N}\} .$$

Die Gruppe G läßt sich in V einbetten und gestattet nach (2) und (3) mit der Basis $u, v \in G$ die folgende Darstellung als Gruppenerzeugnis:

$$(4) \qquad \begin{cases} G = \langle u, v, p^{-m_p}(\alpha_p u + \beta_p v), p^{-n_p}(\gamma_p u + \delta_p v) | p \in \boldsymbol{P} \rangle \\ \text{mit } \alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p \in \boldsymbol{Q}_p^* \text{ und } \alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p \text{ Einheit in } \boldsymbol{Q}_p^* . \end{cases}$$

D.h. G ist das Erzeugnis einer Basis $u, v \in G$ und von je einem Urbild eines erzeugenden Elements des Faktors $G/\langle u, v\rangle$. Dazu nimmt man die üblichen Erzeugendensysteme, z.B. für $0 \leqslant l \leqslant \infty$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Z(p^l) = \langle a_{k+1} \in Z(p^l) | 0 \leqslant k < l \rangle \\ p a_{k+1} = a_k \quad \text{und} \quad a_0 = 0\,. \end{cases}$$

Diese Wahl des Erzeugendensystems von G hat wegen der Unabhängigkeit der erzeugenden Elemente des Faktors zur Folge, daß die Determinante $\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p$ eine Einheit in $\boldsymbol{Q}_p^*$ ist. Für $m_p < \infty$ kann nach (3) angenommen werden:

$$\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \alpha, \beta < p^{m_p}\,.$$

Die Folge A der Matrizen

$$A_p = \begin{pmatrix} p^{-m_p}\alpha_p & p^{-n_p}\gamma_p \\ p^{-m_p}\beta_p & p^{-n_p}\delta_p \end{pmatrix},$$

deren Elemente selbst Folgen sind, für alle Primzahlen

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{A} := \{A_p | p \in \boldsymbol{P}\} \quad \text{(Charakteristik)}$$

beschreibt die Gruppe G bis auf Isomorphie eindeutig; und umgekehrt läßt sich einer jeden Gruppe G bzgl. einer festen Basis und einem festen Erzeugendensystem des Faktors genau eine Charakteristik A der Form (6) zuordnen. Man schreibt

$$G \sim \mathrm{A} \quad \text{oder} \quad G = \langle u, v | \mathrm{A} \rangle$$

sofern die Angabe der zugehörigen Basis nötig ist.

Bei fester Basis lassen sich die Charakteristiken A von G und die Erzeugendensysteme des Faktors $G/\langle u, v\rangle$ einander umkehrbar eindeutig zuordnen. Der Übergang zwischen Erzeugendensystemen der Form (5) des Faktors wird durch jeweils einen Automorphismus des Faktors vermittelt, so daß man bei fester Basis zwischen Charakteristiken und Automorphismen des Faktors eine umkehrbar eindeutige Beziehung herstellen kann; und man wird versuchen, die Charakteristik mit Hilfe eines Automorphismus so umzuformen, daß einer Gruppe G

bzgl. einer festen Basis genau eine « normierte » Charakteristik zukommt.

Es wird bewiesen, daß die « normierten » Charakteristiken $\mathbb{M} = \{M_p | p \in \boldsymbol{P}\}$ von der folgenden Gestalt sind:

$$(7) \qquad \begin{cases} M_p := \begin{pmatrix} p^{-m_p} & p^{-n_p}\pi_p \\ 0 & p^{-n_p} \end{pmatrix} \\ \text{mit } \pi_p \in \boldsymbol{K}_p^* \text{ und } \pi_p = \pi_p^{(|n_p - m_p|)} \\ \text{für } m_p \leqslant n_p \text{ gilt } \pi_p \in \boldsymbol{Q}_p^*, \\ \text{für } m_p > n_p \text{ gilt } \pi_p \in \boldsymbol{K}_p^* \setminus \boldsymbol{Q}_p^* \text{ oder } \pi_p = 0\,. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller « normierten » Charakteristiken $\mathbb{M} = \{M_p | p \in \boldsymbol{P}\}$, wobei M_p die Gestalt (7) hat.

Jeder Charakteristik $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$ läßt sich bis auf Isomorphie genau eine Gruppe $G \sim \mathbb{M}$ zuordnen, vermittels $\mathbb{M}^* := \{M_p^* | p \in \boldsymbol{P}\}$:

$$M_p^* := \begin{pmatrix} p^{-m_p} & 0 \\ p^{-m_p}\pi_p^{-1} & p^{-n_p} \end{pmatrix} \quad \text{für } \pi_p \notin \boldsymbol{Q}_p^*,$$

$$M_p^* := M_p \quad \text{sonst.}$$

$\mathbb{M}^*$ ist bis auf eventuelle, aber nach (4) unwesentliche, Spaltenvertauschungen von der Form (6) und beschreibt somit nach (4) genau eine Gruppe $G \sim \mathbb{M}^*$. Da $\mathbb{M}^*$ und $\mathbb{M}$ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sind, ist die Bezeichnung

$$G \sim \mathbb{M} \quad \text{bzw.} \quad G = \langle u, v | \mathbb{M} \rangle$$

sinnvoll.

Die kennzeichnende Eigenschaft der « normierten » Charakteristiken —im folgenden wird die Bezeichnung « normiert » weggelassen—beschreibt das folgende Lemma.

LEMMA 1. Jeder torsionsfreien abelschen Gruppe des Ranges 2 läßt sich bzgl. einer festen Basis genau eine Charakteristik aus $\mathfrak{M}$ zuordnen.

BEWEIS. Mit der Basis $u, v \in G$ läßt sich G wie in (4) als Gruppenerzeugnis schreiben. Die Charakteristik $\mathbb{A}$ von G ist von der Form (6) und $G = \langle u, v | \mathbb{A} \rangle$.

Da die Automorphismengruppe des Faktors $G/\langle u, v\rangle$ in (2) das vollständige direkte Produkt der Automorphismengruppen aller Primärkomponenten ist, können die lokalen p-Strukturen von G, beschrieben durch die Matrizen A_p, einzeln mit Automorphismen der jeweiligen Primärkomponenten des Faktors umgeformt werden. Automorphismen der p-Primärkomponente lassen sich als Matrizen aus $GL(2, \boldsymbol{Q}_p^*)$ darstellen. Dabei ist $GL(2, \boldsymbol{Q}_p^*)$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über dem Ring $\boldsymbol{Q}_p^*$. Geht man mit Hilfe eines Automorphismus Λ_p beschrieben durch die Matrix $L_p \in GL(2, \boldsymbol{Q}_p^*)$ zu einem anderen Erzeugendensystem des Faktors über, so wird die lokale p-Struktur von G durch die Matrix $R_p := A_p \tilde{L}_p$ beschrieben. Alle auftretenden Matrizen haben Elemente, die Folgen p-adischer Zahlen sind. Die Multiplikation erfolgt nach den Rechenregeln (1). Die Matrix A_p läßt sich stets in eine Matrix der Form (7) umformen. Sei zur Abkürzung

$$A_p = \begin{pmatrix} p^{-m}\alpha & p^{-n}\gamma \\ p^{-m}\beta & p^{-n}\delta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{Q}_p^*,\ m \leqslant n\,,$$

$\alpha = \alpha^{(m)}$, $\beta = \beta^{(m)}$, $\gamma = \gamma^{(n)}$, $\delta = \delta^{(n)}$ und $\Delta := \alpha\delta - \beta\gamma$ Einheit in $\boldsymbol{Q}_p^*$. Dann gilt mit

$$\tilde{L}_p := \Delta^{-1} \begin{pmatrix} p^{m-n}\delta & 0 \\ -\beta & p^{n-m}\Delta\delta^{-1} \end{pmatrix},$$

wenn $\delta \neq 0$ keine Einheit ist, bzw.

$$\tilde{L}_p := \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -p^{n-m}\beta & \Delta\delta^{-1} \end{pmatrix},$$

wenn δ Einheit ist, bzw.

$$\tilde{L}_p := \begin{pmatrix} 0 & \beta^{-1} \\ \gamma^{-1} & -p^{n-m}\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1} \end{pmatrix},$$

wenn $\delta = 0$ ist, d.h. β, γ sind Einheiten, entweder

$$A_p\tilde{L}_p = \begin{pmatrix} p^{-n} & p^{-m}\gamma\delta^{-1} \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix} \quad (\gamma\delta^{-1} \notin \boldsymbol{Q}_p^*)$$

oder

$$A_p \tilde{L}_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\gamma\delta^{-1} \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \quad (\gamma\delta^{-1} \in \boldsymbol{Q}_p^*)$$

oder

$$A_p \tilde{L}_p = \begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{R} := \{(A_p \tilde{L}_p)^{(|n_p - m_p|)} | p \in \boldsymbol{P}\} \in \mathfrak{M}$.

Dabei sei

$$\begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\varrho \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix}^{(|n-m|)} := \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\varrho^{(|n-m|)} \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix}.$$

Ist z.B. γ keine Einheit, so ist δ Einheit ($\gamma\delta^{-1} \in \boldsymbol{Q}_p^*$) und L_p hat die Form:

$$L_p = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -\beta & \Delta\delta^{-1} \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{Q}_p^*).$$

Dieser Automorphisms transformiert A_p in der gewünschten Weise. Als Rechenregel wird wie üblich

$$\infty + x = \infty \quad \text{für alle } x \in \boldsymbol{Z}$$

vereinbart.

Nimmt man an, daß es für eine Basis $u, v \in G$ zwei verschiedene Charakteristiken $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$ für G gibt, z.B. mit $\pi, \pi' \in \boldsymbol{Q}_p^*$, $\pi \neq \pi'$ und

$$M_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi' \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} = M'_p,$$

so gibt es ein ganzzahliges l mit $0 \leqslant l < n - m$ und eine Einheit $\pi^* \in \boldsymbol{Q}_p^*$ mit $\pi - \pi' = p^l \pi^*$. Es gilt:

$$p^{-(m+l+1)}(v + \pi^{(m+l+1)} u) - p^{-(m+l+1)}(v + \pi'^{(m+l+1)} u) = p^{-(m+1)}(\pi^{*(m+1)} u) \in G.$$

Also gilt auch $p^{-(m+1)}u$, $p^{-(m+1)}v \in G$ und $Z(p^{(m+1)}) \oplus Z(p^{(m+1)})$ wäre Untergruppe von $G/\langle u, v\rangle$. Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt und Lemma 1 ist bewiesen.

3. Basistransformationen

Mit Lemma 1 ist das Isomorphieproblem für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2 auf Transformationsuntersuchungen von Charakteristiken aus $\mathfrak{M}$, auf Grund eines Basiswechsels, zurückgeführt.

Für

$$\mathbb{M} = \{M_p | p \in \boldsymbol{P}\} \in \mathfrak{M} \quad \text{mit} \quad M_p = \begin{pmatrix} p^{-m_p} & p^{-n_p}\pi_p \\ 0 & p^{-n_p} \end{pmatrix}$$

sei die rationale Gruppe

$$R(\mathbb{M}) := \langle p^{-m_p}, p^{-n_p} | p \in \boldsymbol{P} \rangle$$

definiert.

LEMMA 2. Seien $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$, $G = \langle u, v | \mathbb{M} \rangle$ und $a, b \in \boldsymbol{Q}$ rational. Dann ist $au + bv \in G$ genau dann, wenn

$$(8) \quad \begin{cases} \text{(i)} & a, b \in R(\mathbb{M}) \\ & \text{und wenn für alle Primzahlen } p \in \boldsymbol{P} \text{ gilt:} \\ \text{(ii)} & p^{m_p}(b\pi_p - a) \in \boldsymbol{Q}_p^* \quad \text{für } m_p \leqslant n_p \text{ und } m_p < \infty, \\ & p^{n_p}(a\pi_p^{-1} - b) \in \boldsymbol{Q}_p^* \quad \text{für } m_p > n_p \text{ und } \pi_p \neq 0, \\ & p^{n_p} b \in \boldsymbol{Q}_p^* \quad \text{für } m_p > n_p \text{ und } \pi_p = 0. \end{cases}$$

BEWEIS. $w := au + bv \in G = \langle u, v | \mathbb{M} \rangle$ genau dann, wenn w eine ganzzahlige Linearkombination des Erzeugendensystems (4) von G ist.

$$w = \sum_{\substack{p \in P \\ \pi_p \in \boldsymbol{Q}_p^*}} [x_p(v + \pi_p^{(l)} u) + y_p u] + \sum_{\substack{p \in P \\ \pi_p \notin \boldsymbol{Q}_p^*}} [x_p(u + (\pi_p^{-1})^{(l)} v) + y_p v]$$

mit hinreichend großem $l \in \boldsymbol{N}$ und ($p^\infty a \in \boldsymbol{Q}_p^*$ heißt $a \in \boldsymbol{Q}$)

$$p^{\max(m_p, n_p)} x_p, \quad p^{\min(m_p, n_p)} y_p \in \boldsymbol{Q}_p^*$$

für alle Primzahlen $p \in \boldsymbol{P}$, und Lemma 2 ist bewiesen.

Nach Lemma 2 genügt bei Kenntnis von $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$ eine Partialbruchzerlegung der Zahlen a, b um festzustellen, ob $au + bv \in G$ ist.

DEFINITION. Seien $A \in GL(2, \boldsymbol{Q})$, $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$, $G = \langle u, v | \mathbb{M} \rangle$ und

$$u^A = au + bv, \quad v^A = cu + dv.$$

Dann beschreibt A bzgl. $\mathbb{M}$ eine Basistransformation, wenn u^A, v^A eine Basis von G ist.

$GL(\mathbb{M})$ bezeichne die Menge der $A \in GL(2, \boldsymbol{Q})$, die bzgl. $\mathbb{M}$ eine Basistransformation beschreiben.

Eine rationale 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ beschreibt nach Lemma 2

also genau dann eine Basistransformation bzgl. $\mathbb{M}$, d.h. $A \in GL(\mathbb{M})$, wenn gilt:

(i) $ad - bc \neq 0$,

(ii) für a, b gilt Bedingung (8),

(iii) für c, d gilt Bedingung (8).

4. Klassifizierung

Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit, nämlich die Antwort auf die Frage, wann zwei Charakteristiken isomorphe Gruppen beschreiben, ist naturgemäß sehr technisch, da angegeben werden muß, wie sich Charakteristiken einer Gruppe durch einen Basiswechsel transformieren.

Die regulären rationalen 2×2-Matrizen können als Operatoren auf der Menge $\mathfrak{M}$ wie folgt aufgefaßt werden. Sei $A \in GL(2, \boldsymbol{Q})$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Für $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$ werde das Ergebnis der Operation A auf $\mathbb{M}$ mit $\mathbb{M}^A$ bezeichnet, $\mathbb{M} \to \mathbb{M}^A$, durch die Festlegung (Indizierung mit p ist weggelassen)

$$M_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \to M_p^A = \begin{pmatrix} p^{-m^A} & p^{-n^A}\pi^A \\ 0 & p^{-n^A} \end{pmatrix} \tag{9}$$

für alle Primzahlen $p \in \boldsymbol{P}$. Genauer wird vereinbart:

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} \text{Seien } k, x, y, z \in \boldsymbol{Z},\ k \geqslant 0, \text{ minimal bzgl. } p^x a, p^x b, p^y c, p^y d \in \boldsymbol{Q}_p^*, \\ p^z(c + a\pi), \quad p^z(d + b\pi), \quad p^{x+z-k}(ad - bc) \in \boldsymbol{Q}_p^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } m \leqslant n \\ p^z(a + c\pi^{-1}), \quad p^z(b + d\pi^{-1}), \quad p^{y+z-k}(ad - bc) \in \boldsymbol{Q}_p^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } m > n (\pi = 0 \Rightarrow \pi^{-1} := 0). \end{cases}$$

Seien

$$(11)\qquad \begin{cases} m' := \begin{cases} \max(m+x,0) & \text{für } m \leqslant n \\ \max(n+y,0) & \text{für } m > n\,, \end{cases} \\ n' := \begin{cases} \max(n+z,0) & \text{für } m \leqslant n \\ \max(m+z,0) & \text{für } m > n\,, \end{cases} \\ k' := \min(k, \min(m', n'))\,. \end{cases}$$

Einige Fälle werden zusammengefaßt:

$$(*)\qquad \begin{cases} m \leqslant n\,, & m' \leqslant n' & \text{und} & [p^{z}(d+b\pi)]^{(n'-m'+k')} = 0\,, \\ m > n\,, & m' \leqslant n', & \pi \neq 0 & \text{und} & [p^{z}(b+d\pi^{-1})]^{(n'-m'+k')} = 0\,, \\ m > n\,, & m' > n' & \text{und} & & (p^{v}d)^{(m'-n'+k')} = 0\,, \\ m \leqslant n\,, & m' > n' & \text{und} & & (p^{x}b)^{(m'-n'+k')} = 0\,, \\ m > n\,, & m' \leqslant n', & \pi = 0 & \text{und} & (p^{x}b)^{(n'-m'+k')} = 0\,. \end{cases}$$

Es wird definiert:

$$(12)\quad \pi^{A} := \begin{cases} [(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1}]^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m \leqslant n,\ m' \leqslant n' \\ & \text{oder } m > n,\ m' \leqslant n',\ \pi \neq 0 \\ & \text{ohne } (*) \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m \leqslant n,\ m' > n' \\ & \text{oder } m > n,\ m' \leqslant n',\ \pi = 0 \\ & \text{ohne } (*) \\ \left(\frac{c}{d}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für } m > n,\ m' > n' \\ & \text{ohne } (*)\,, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

und weiter

$$(13)\qquad \begin{cases} m^{A} := \begin{cases} \max(m', n') & \text{für } \pi^{A} \notin \boldsymbol{Q}_{p}^{*} \text{ oder für } (*) \\ \min(m', n') - k' & \text{für } \pi^{A} \in \boldsymbol{Q}_{p}^{*} \text{ und nicht } (*)\,, \end{cases} \\ n^{A} := \begin{cases} \min(m', n') - k' & \text{für } \pi^{A} \notin \boldsymbol{Q}_{p}^{*} \text{ oder für } (*) \\ \max(m', n') & \text{für } \pi^{A} \in \boldsymbol{Q}_{p}^{*} \text{ und nicht } (*)\,. \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist die Operation $\mathbb{M} \to \mathbb{M}^A$ vollständig beschrieben. Man stellt fest, daß stets gilt:

$$m^A > n^A \quad \text{für} \quad \pi^A \notin \boldsymbol{Q}_p^*$$

$$m^A \leqslant n^A \quad \text{für} \quad 0 \neq \pi^A \in \boldsymbol{Q}_p^*;$$

weiter ist

$$\sum_{p \in \boldsymbol{P}} |m_p + n_p - m_p^A - n_p^A| < \infty \qquad (\infty - \infty := 0)\,,$$

und für fast alle Primzahlen, $p \in \boldsymbol{P}$ gilt entweder $m_p^A = m_p$ und $n_p^A = n_p$ oder $m_p^A = n_p$ und $n_p^A = m_p$:

Einen Zusammenhang zwischen Basistransformation und der Operation $\mathbb{M} \to \mathbb{M}^A$ stellt die anschließende Aussage her.

LEMMA 3. Seien $\mathbb{M} \in \mathfrak{M}$, $G = \langle u, v|\mathbb{M}\rangle$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{M})$ und

$$u^A := au + bv\,, \qquad v^A := cu + dv\,.$$

Dann gilt:

$$\langle u, v|\mathbb{M}\rangle = \langle u^A, v^A|\mathbb{M}^A\rangle\,.$$

BEWEIS. Sei $A \in GL(\mathbb{M})$ mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (andere Bezeichnung als im Lemma!), dann gilt $u = au^A + bv^A$, $v = cu^A + dv^A$ und die erzeugenden Elemente von $G = \langle u, v|\mathbb{M}\rangle$ mit $M_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix}$ lassen sich bzgl. der neuen Basis $u^A, v^A \in G$ neu schreiben. Von den möglichen Fallunterscheidungen sei exemplarisch der Fall $m \leqslant n$ (d.h. $\pi \in \boldsymbol{Q}_p^*$) herausgegriffen. Die Elemente

$$p^{-m}u\,, \qquad p^{-n}(v + \pi u)$$

schreiben sich mit den Bezeichnungen (9) bis (13), (*) und mit der weiteren Falleinschränkung

$$0 \leqslant m' := m + x < n' := n + z\,,$$

$$p^{-m'}(p^x a u^A + p^x b v^A)\,, \quad p^{-n'}[p^z(c + a\pi)\,u^A + p^z(d + b\pi)\,v^A].$$

Elementare Umformungen ergeben:

$$p^{-m'+k'}u^A, \quad p^{-m'+k'}v^A, \quad p^{-n'}[p^z(c+a\pi)u^A + p^z(d+b\pi)v^A].$$

In dieser Form liegt ein Erzeugendensystem von G wie in (4) vor, das sich mit der Methode im Beweis von Lemma 1 in eine « normierte » Form bringen läßt. Die Matrix A_p hat im angegebenen Fall die Gestalt:

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & p^{-n'}[p^z(c+a\pi)]^{(n')} \\ p^{-m'+k'} & p^{-n'}[p^z(d+b\pi)]^{(n')} \end{pmatrix} \quad (p^z(d+b\pi) \text{ keine Einheit}),$$

$$A_p = \begin{pmatrix} p^{-m'+k'} & p^{-n'}[p^z(c+a\pi)]^{(n')} \\ 0 & p^{-n'}[p^z(d+b\pi)]^{(n')} \end{pmatrix} \quad (p^z(d+b\pi) \text{ Einheit}).$$

Ist $p^z(d+b\pi) \neq 0$ keine Einheit, so gilt:

$$R_p = \begin{pmatrix} p^{-n'} & p^{-m'+k'}[(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1}]^{(n'-m'+k')} \\ 0 & p^{-m'+k'} \end{pmatrix}$$

mit $m^A := n'$, $n^A := m' - k'$ und $(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1} \notin \boldsymbol{Q}_p^*$.

Ist $p^z(d+b\pi)$ Einheit, so gilt:

$$R_p = \begin{pmatrix} p^{-m'+k'} & p^{-n'}[(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1}]^{(n'-m'+k')} \\ 0 & p^{-n'} \end{pmatrix}$$

mit $m^A := m' - k'$, $n^A := n'$ und $(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1} \in \boldsymbol{Q}_p^*$.

Ist $[p^z(d+b\pi)]^{(n'-m'+k')} = 0$, so gilt:

$$R_p = \begin{pmatrix} p^{-n'} & 0 \\ 0 & p^{-m'+k'} \end{pmatrix}$$

mit $m^A := n'$ und $n^A := m' - k'$.

Behandelt man alle Fälle, die bei der Definition der Operation $\mathrm{M} \to \mathrm{M}^A$ auftreten, auf diese Weise, dann erhält man das behauptete Ergebnis und der Beweis von Lemma 3 ist damit abgeschlossen.

Satz 1. M und M' aus $\mathfrak{M}$ beschreiben genau dann isomorphe Gruppen, wenn ein $A \in GL(\mathrm{M})$ existiert mit $\mathrm{M}' = \mathrm{M}^A$.

BEWEIS: Zwei Charakteristiken beschreiben genau dann isomorphe Gruppen, wenn sie durch Basistransformationen aus einander hervorgehen. Mit Lemma 3 ist der Beweis des Satzes 1 erbracht.

Satz 1 macht keine Aussage darüber, wie die Matrix A, die $\mathbf{M}$ in $\mathbf{M}'$ überführt, zu berechnen ist. Einige Eigenschaften von A, lassen sich allerdings sofort an $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ ablesen.

(i) $A \in GL(\mathbf{M})$,

(ii) $A^{-1} \in GL(\mathbf{M}')$.

Es gilt $\mathbf{M}^A = \mathbf{M}^{-A}$, aber auch darüber hinaus ist A i.a. nicht eindeutig durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ bestimmt. A ist genau dann bis aufs Vorzeichen durch $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ festgelegt, wenn die Automorphismengruppe von $G \sim \mathbf{M}$ die Ordnung 2 hat.

Sätze, die sich mit der Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen befassen, haben meist die typische Gestalt, wie auch Satz 1, d.h. sie fordern zum Nachweis der Isomorphie die Existenz einer Matrix, ohne eine Angabe, wie diese Matrix zu berechnen sei. Insofern handelt es sich auch hier nur um eine Umformulierung des Isomorphieproblems. Allerdings läßt sich die Matrix A in vielen Fällen berechnen. Beschreiben $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ isomorphe Gruppen, so gelten über (i) und (ii) hinaus die Formeln:

$$\pi_p' = [(c + a\pi_p)(d + b\pi_p)^{-1}]^{(|n_p' - m_p'|)}$$

oder

$$\pi_p' = \left(\frac{a}{b}\right)^{(|n_p' - m_p'|)}, \qquad \pi_p' = \left(\frac{c}{d}\right)^{(|n_p' - m_p'|)}.$$

Sind für einige Primzahlen p die Differenzen $|n_p' - m_p'|$ unendich, so kann es möglich sein, a, b, c und d aus den obigen Formeln zu berechnen. Ist die Differenz $|n_p' - m_p'|$ nur für endlich viele Primzahlen von Null verschieden und auch hier nur endlich, so sind a, b, c und d zwar nicht eindeutig bestimmt aber auch in diesem Fall kann zumindest eine Möglichkeit für A angegeben werden. Anders dagegen ist die Situation, wenn keine unendlichen Differenzen $|n_p' - m_p'|$ auftreten, wohl aber unendlich viele endliche Differenzen ungleich Null. Hierfür ist mir kein allgemeines Verfahren bekannt, mit dessen Hilfe man aus den obigen Formeln a, b, c und d errechnen könnte, abgesehen natürlich von besonders günstig gelagerten Fällen.

LITERATUR

[1] D. M. ARNOLD, *A duality for torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring*, Proc. London Math. Soc., (3) **24** (1972), pp. 204-216.
[2] R. A. BEAUMONT - R. S. PIERCE, *Torsion-free rings*, Ill. J. Math., **5** (1961), pp. 61-98.
[3] R. A. BEAUMONT - R. S. PIERCE, *Torsion free groups of rank two*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 38 (1961).
[4] M. O'N. CAMPBELL, *Countable torsion-free abelian groups*, Proc. London Math. Soc., **10** (1960), pp. 1-23.
[5] L. FUCHS, *Infinite abelian groups*, Academic Press, New York (1970, 1973).
[6] A. G. KUROSH, *Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range*, Ann. Math., **38** (1937), pp. 175-203.
[7] F. RICHMAN, *A class of rank-2 torsion free groups*, Studies on Abelian Groups (Paris, 1968), pp. 327-333.
[8] G. SZEKERES, *Countable abelian groups without torsion*, Duke Math. J., **15** (1948), pp. 293-306.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 ottobre 1975.