

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI SAMBIN

## **Un'estensione del teorema di Löb**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 52 (1974), p. 193-199

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__193_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Un'estensione del teorema di Löb.

GIOVANNI SAMBIN <sup>(1)</sup>

**SUMMARY** - Let  $T$  be a theory with a unary predicate  $T'(x)$  and a term  $\bar{\varphi}$  for every formula  $\varphi$  s.t.  $T'(\bar{\varphi})$  means «  $\varphi$  is provable in  $T$  ». Formally, we want  $T'$  to satisfy i)-iii) below. If in addition  $T'$  admits diagonalization on formulas (Gödel's diagonalization lemma) it is possible to prove Löb's theorem for  $T$ , i.e.  $\vdash_T T'(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi$  iff  $\vdash_T \varphi$  for any formula  $\varphi$ .

In this paper we prove an extension of Löb's result, in the following sense: from the single instance of the diagonalization property « for any  $\varphi$  there exists  $\psi$  s.t.  $\vdash_T \psi \leftrightarrow (T'(\bar{\psi}) \rightarrow \varphi)$  » we get the formalization  $\vdash_T T'(\overline{T'(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi}) \rightarrow T'(\bar{\varphi})$  of Löb's theorem (lemma 2) which allows us to prove  $\vdash_T T'(\overline{\alpha(\varphi)}) \rightarrow \varphi \Rightarrow \vdash_T T'(\overline{\alpha(\varphi)}) \leftrightarrow T'(\overline{\alpha(1)})$  (theorem 4) where  $\alpha(\varphi)$  is any formula containing  $\varphi$  as subformula not under the scope of quantifiers, 1 is any theorem of  $T$  and  $\alpha(1)$  is the result of replacement of  $\varphi$  by 1 in  $\alpha(\varphi)$ . It is easily seen that Löb's theorem is obtained from theorem 4 in the particular case  $\alpha = \varphi$ .

Nel corso di ricerche, suggeritemi da R. Magari (vedi [5] § 8), sulle teorie che consentono la definizione di un predicato di dimostrabilità che soddisfi le usuali condizioni di derivabilità, mi sono imbattuto in un risultato che estende, almeno in una direzione, il teorema di Löb in [3].

In questa breve nota espongo tale estensione, tralasciando per ora una più attenta analisi dei problemi connessi.

---

<sup>(1)</sup> Indirizzo dell'A.: Via Buzzacarini, 51 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

Sia  $T$  una teoria assiomatica in cui esistano una formula  $\dot{T}(x)$  con una variabile libera e un termine  $\bar{\varphi}$  per ogni enunciato (formula chiusa)  $\varphi$  di  $T$  tali che la formula  $\dot{T}(\bar{\varphi})$  esprima convenientemente l'asserzione «  $\varphi$  è un teorema di  $T$  ». Richiediamo cioè che  $\dot{T}$  soddisfi le seguenti condizioni di derivabilità per tutti gli enunciati <sup>(2)</sup>  $\varphi, \psi$ :

- i)  $\vdash_{\overline{T}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\bar{\varphi})$ ,
- ii)  $\vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\overline{\varphi \rightarrow \psi}) \rightarrow (\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\bar{\psi}))$ ,
- iii)  $\vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\overline{\dot{T}(\bar{\varphi})})$ .

Le condizioni i) e ii) sono ricavate da [2] e iii) è provata da Löb in [3] per teorie che soddisfino altre naturali condizioni.

Diremo adeguata (suitable in [6]) una teoria del tipo sopra descritto. Per il seguito sarà utile il seguente lemma (vedi anche [4] e [6]).

**LEMMA 1.** In ogni teoria adeguata  $T$  e quali che siano gli enunciati  $\varphi, \psi$  si ha:

- a)  $\vdash_{\overline{T}} \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\bar{\psi})$ ,
- b)  $\vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\overline{\varphi \wedge \psi}) \leftrightarrow (\dot{T}(\bar{\varphi}) \wedge \dot{T}(\bar{\psi}))$  <sup>(3)</sup>,
- c)  $\vdash_{\overline{T}} (\dot{T}(\overline{\varphi \rightarrow \psi}) \wedge \dot{T}(\bar{\varphi})) \leftrightarrow (\dot{T}(\bar{\psi}) \wedge \dot{T}(\bar{\varphi}))$ .

**DIM.** Da  $\vdash_{\overline{T}} \varphi \rightarrow \psi$  si ha  $\vdash_{\overline{T}} \overline{\varphi \rightarrow \psi}$  e quindi  $\vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\bar{\psi})$  per ii), cioè a). Inoltre, dalla tautologia  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$  si ha

$$\vdash_{\overline{T}} \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow (\dot{T}(\bar{\psi}) \rightarrow \dot{T}(\overline{\varphi \wedge \psi})),$$

che dà un verso di b). L'altro segue da i) e ii). Un verso di c) si ottiene da ii) tautologicamente, l'altro è immediato da a).

Chiaramente, la definizione di teoria adeguata non è significativa

<sup>(2)</sup> Non mi sfugge il fatto che i)-iii) possono essere rafforzate imponendo, con opportune modifiche, che siano soddisfatte per ogni formula (non necessariamente chiusa). La semplificazione qui adottata non è essenziale per i risultati che seguono, come sarà ben chiaro dal tipo di dimostrazioni usate. Inoltre, per uniformità di linguaggio, anche risultati già noti saranno formulati in questo modo.

Ricordo che  $\dot{T}(x)$  viene denotato anche con  $\text{Prov}(x)$  nella letteratura.

<sup>(3)</sup> È anche facile provare che  $\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\varphi \wedge \psi)} \leftrightarrow \dot{T}(\bar{\varphi}) \wedge \dot{T}(\bar{\psi})$  implica ii).

se non si impongono ulteriori condizioni, come si può vedere notando che ogni teoria  $T$  è adeguata per ogni  $\hat{T}(x)$  scelto in modo che  $\vdash_T \forall x \hat{T}(x)$ . Ciononostante, l'uso di tale nomenclatura è giustificata dalla sua comodità.

In [3] Löb dimostra che se  $T$  è una teoria adeguata e adatta a rappresentare le funzioni recursive, allora da  $\vdash_T \hat{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi$  si deduce  $\vdash_T \varphi$  per ogni enunciato  $\varphi$ .

Tale teorema può anche essere « letto » nel modo seguente: nelle stesse assunzioni su  $T$ , se  $\vdash_T \hat{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi$ , allora  $\hat{T}(\bar{\varphi})$  è dimostrabilmente equivalente (in  $T$ ) alla formula ottenuta da  $\hat{T}(\bar{\varphi})$  « sostituendo » <sup>(4)</sup>  $\varphi$  con un qualsiasi enunciato logicamente valido (che indichiamo con **1**), cioè  $\vdash_T \hat{T}(\bar{\varphi}) \leftrightarrow \hat{T}(\mathbf{1})$ .

Nel teorema seguente si estende il risultato di Löb, nel senso dato dalla « lettura » suggerita, al caso in cui la formula che compare sotto l'azione di  $\hat{T}$  non è necessariamente  $\varphi$ , ma contiene  $\varphi$  come sottoformula non sotto quantificatori. Inoltre, nello spirito del suggerimento di R. Magari, si possono modificare le assunzioni necessarie per la dimostrazione, nel tentativo di determinare le proprietà più caratteristiche di  $\hat{T}$ .

Infatti, anche una rapida lettura permette di stabilire che l'unica assunzione direttamente usata nella prova di Löb oltre all'adeguatezza della teoria è la seguente:

\*) per ogni enunciato  $\varphi$  esiste un enunciato  $\psi$  tale che  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \leftrightarrow (\hat{T}(\bar{\psi}) \rightarrow \varphi)$ .

Come si vede dai seguenti lemma 2 e corollario 3, \*) può essere sostituito da una condizione (iv) nel seguito che meglio si presta ad una assiomatizzazione delle proprietà di  $\hat{T}$  in termini di equazioni (vedi [5] § 8).

**LEMMA 2.** In ogni teoria adeguata  $T$  e per ogni enunciato  $\varphi$ , se  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \hat{T}(\psi \rightarrow \varphi)$  allora  $\psi$  è univocamente determinato da  $\varphi$ , nel senso che  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \hat{T}(\bar{\varphi})$ .

---

(4) Questo tipo di sostituzione non è comune (si tratta di sostituire occorrenze di formule con formule) ma credo intuitivamente chiaro. Vedremo più avanti un accenno a come si possa definire rigorosamente tale concetto.

DIM. Sia  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \overline{\dot{T}(\psi \rightarrow \varphi)}$ . Allora, poichè per il lemma 1

$$\vdash_T \overline{\dot{T}(\psi \rightarrow \varphi)} \wedge \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\bar{\varphi}),$$

si ha  $\vdash_T \psi \wedge \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$ .

Ma da iii) e il lemma 1 segue  $\vdash_T \psi \rightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$ , per cui  $\vdash_T \psi \rightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$ . L'implicazione  $\vdash_T \dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \psi$  è conseguenza del lemma 1, per cui in definitiva  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$ .

COROLLARIO 3. Per ogni teoria adeguata  $T$ , sono equivalenti:

a) per ogni  $\varphi$  esiste  $\psi$  tale che  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \overline{\dot{T}(\psi \rightarrow \varphi)}$ ,

b) per ogni  $\varphi$   $\vdash_T \overline{\dot{T}(\overline{\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi})} \leftrightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$ .

DIM. Se  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \overline{\dot{T}(\psi \rightarrow \varphi)}$ , dal lemma 2 si ricava  $\vdash_T \psi \leftrightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$  e quindi  $\vdash_T (\psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi)$  da cui

$$\vdash_T \dot{T}(\bar{\varphi}) \leftrightarrow \overline{\dot{T}(\overline{\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi})},$$

cioè b).

Viceversa, se b) vale, a) è soddisfatta per  $\psi$  equivalente a  $\dot{T}(\bar{\varphi})$ . A questo punto è chiaro che \*) discende dalla seguente:

iv)  $\vdash_T \overline{\dot{T}(\overline{\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi})} \leftrightarrow \dot{T}(\bar{\varphi})$  per ogni  $\varphi$ .

Infatti \*) è soddisfatta quando  $\psi$  è  $\overline{\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi}$  <sup>(5)</sup>. La preferibilità di iv) rispetto a \*) sta nel fatto che, una volta assunto  $\dot{T}$  come primitivo, una sua formulazione globale all'interno di  $T$  è data dalla formula universale  $\vdash_T \forall x (Fm(x) \rightarrow (\overline{\dot{T}(\overline{\dot{T}(x) \rightarrow x})} \leftrightarrow \dot{T}(x)))$  <sup>(6)</sup>, mentre la stessa cosa non è valida per \*).

Per brevità, chiamiamo forma booleana nella variabile  $x$  ogni espressione costruita a partire da  $x$  e da un numero finito di enunciati  $\psi_1, \dots, \psi_n$  facendo uso dei connettivi logici.

Ovviamente, una forma booleana  $\alpha(x)$  non è un oggetto del lin-

<sup>(5)</sup> Viceversa, come provato in [4], teor. 2.1, da (\*) si deduce iv) e quindi in definitiva, con facili passaggi, si ottiene l'equivalenza delle condizioni (\*), (3.a), iv) e  $\vdash_T (\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\overline{\dot{T}(\overline{\dot{T}(\bar{\varphi}) \rightarrow \varphi})} \rightarrow \varphi)$ .

<sup>(6)</sup>  $Fm(x)$  esprime «  $x$  è una formula » e  $\overline{\dot{T}(x) \rightarrow x}$  calcola  $\overline{\dot{T}(x) \rightarrow x}$  in funzione di  $x$ .

guaggio, ma, sostituendo in  $\alpha(x)$  la variabile  $x$  con un enunciato  $\varphi$ , si ottiene un usuale enunciato in cui  $\varphi$  non compare sotto quantificatori. Indichiamo con  $\alpha(\varphi)$  il risultato di questo tipo di sostituzione.

**TEOREMA 4.** In ogni teoria adeguata  $T$  per cui iv) valga, per ogni forma booleana  $\alpha(x)$  ed enunciato  $\varphi$ , se  $\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\alpha(\varphi))} \rightarrow \varphi$  allora

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\alpha(\varphi))} \leftrightarrow \overline{T(\alpha(\mathbf{1}))} .$$

**DIM.** Se  $\alpha(x)$  è combinazione di  $x$  e  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , tramite elementari risultati di natura combinatoria si può determinare effettivamente una formula di tipo congiunzioni di disgiunzioni di  $\varphi$  e  $\psi_1, \dots, \psi_n$  o loro negazioni ed equivalente ad  $\alpha(\varphi)$ . Inoltre tale forma canonica è equivalente ad una formula di tipo  $(\neg\varphi \vee \beta_1) \wedge (\varphi \vee \beta_2) \wedge \beta_3$  con  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) combinazione booleana di  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Nello stesso modo è facile vedere che  $\alpha(\mathbf{1})$  equivale a  $\beta_2 \wedge \beta_3$  e quindi per provare il teorema basta provare  $\vdash_{\overline{T}} \chi \leftrightarrow \overline{T(\beta_2 \wedge \beta_3)}$ , avendo posto  $\chi = \overline{T(\varphi \vee \beta_1) \wedge (\neg\varphi \vee \beta_2) \wedge \beta_3}$ .

In un verso, da  $\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\overline{\varphi})} \rightarrow \overline{T(\overline{\varphi \vee \beta_1})}$  e usando il lemma 1, si ha

$$1) \quad \vdash_{\overline{T}} \overline{T(\overline{\varphi})} \wedge \overline{T(\overline{\beta_2})} \wedge \overline{T(\overline{\beta_3})} \rightarrow \chi .$$

Usando iv) si prova facilmente che dall'ipotesi (che equivale a  $\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \varphi$ ) segue

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\overline{T(\overline{\beta_2})} \wedge \overline{T(\overline{\beta_3})})} \rightarrow \overline{T(\overline{\varphi})} ,$$

per cui iii) dà

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\overline{\beta_2})} \wedge \overline{T(\overline{\beta_3})} \rightarrow \overline{T(\overline{\varphi})} ,$$

e quindi, da 1),

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T(\overline{\beta_2 \wedge \beta_3})} \rightarrow \chi .$$

Viceversa, da  $\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T(\overline{\varphi \rightarrow \beta_2})}$  e ii) si ottiene

$$2) \quad \vdash_{\overline{T}} \chi \wedge \overline{T(\overline{\varphi})} \rightarrow \overline{T(\overline{\beta_2})} .$$

Ma dall'ipotesi e dal fatto che  $\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T(\overline{\chi})}$ , si ha

$$\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T(\overline{\varphi})} ,$$

per cui, da 2),

$$\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T}(\overline{\beta_2}),$$

e quindi, poichè  $\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T}(\overline{\beta_3})$ ,

$$\vdash_{\overline{T}} \chi \rightarrow \overline{T}(\overline{\beta_2 \wedge \beta_3}).$$

Dal teorema segue come ovvio corollario l'unicità (sempre a meno di dimostrabile equivalenza) dell'enunciato  $\psi$  per cui valga

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T}(\overline{(\psi \vee \beta_1) \wedge (\neg \psi \vee \beta_2) \wedge \beta_3}) \rightarrow \psi,$$

per ogni scelta di  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ .

Inoltre, è utile notare esplicitamente che, identificando in maniera opportuna formule e forme booleane con numeri naturali (vedi ad esempio [1]), la funzione che per ogni forma booleana  $\alpha$  calcola  $\alpha(1)$  risulta recursiva e quindi, in particolare,  $\alpha(1)$  non dipende dall'enunciato  $\varphi$  considerato nel teorema.

È anche facile vedere che, nelle stesse ipotesi del teorema, si può ottenere

$$\vdash_{\overline{T}} (\overline{T}(\overline{\alpha(\varphi)}) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\overline{T}(\overline{\alpha(\varphi)}) \leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha(1)})),$$

da cui segue una versione formalizzata della proprietà espressa dal teorema stesso, cioè

$$\vdash_{\overline{T}} \overline{T}(\overline{\overline{T}(\overline{\alpha(\varphi)}) \rightarrow \varphi}) \rightarrow \overline{T}(\overline{\overline{T}(\overline{\alpha(\varphi)}) \leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha(1)})}).$$

Sembra plausibile che uno studio accurato del lemma di diagonalizzazione nei termini qui indicati possa chiarire alcuni problemi sul predicato  $\overline{T}(x)$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S. FEFERMAN, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, *Fund. Math.*, **49** (1960), 35-92.
- [2] D. HILBERT - P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin, vol. 1, 1934; vol. 2, 1939.

- [3] M. LÖB, *Solution of a problem of Leon Henkin*, Journ. Symb. Log., **20** (1955), 115-118.
- [4] A. MACYNTIRE - H. SIMMONS, *Gödel's diagonalization technique and related properties of theories*, Colloq. Math., **28** (1973), 165-180.
- [5] R. MAGARI, *Significato e verità nell'aritmetica peaniana. (Sulle limitazioni dei sistemi formali, II)*, Ann. Mat. pura e appl., in corso di pubblicazione.
- [6] H. SIMMONS, *Topological aspects of suitable theories*, ciclostilato 1972, University of Aberdeen, Scotland.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 febbraio 1974.