RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO DENTONI
MICHELE SCE

Funzioni regolari nell'algebra di Cayley

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 251-267

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__251_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Funzioni regolari nell'algebra di Cayley.

PAOLO DENTONI e MICHELE SCE (*)

1. Alcune considerazioni portano a ritenere che una teoria delle funzioni che conservi le caratteristiche essenziali di quella classica di una variabile complessa, possa svolgersi solo nelle algebre con divisione (1). Come è noto, tra le algebre reali alternative di dimensione finita risultano con divisione solo l'algebra dei numeri reali $\boldsymbol{R}$, dei numeri complessi $\boldsymbol{C}$, dei quaternioni Q e l'algebra di Cayley C (2). Nei quaternioni è stata da tempo sviluppata, ad opera di G. C. Moisil, R. Fueter e altri Autori, una teoria basata su una generalizzazione della condizione di Cauchy-Riemann $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$ (*funzioni regolari*). Questa teoria, sebbene carente della parte differenziale classica (derivate, primitive), ha ottenuto un notevole successo per quanto riguarda le proprietà integrali (teoremi di tipo Cauchy) e il collegamento con le funzioni armoniche. Scopo di questo lavoro è di estendere all'algebra di Cayley i risultati ottenuti da G. C. Moisil e R. Fueter nei quaternioni.

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico - Via dell'Università, 12 - 43100 Parma.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo G.N.S.A.G.A.

(1) As es., per un risultato di M. SCE [12], le algebre con divisione sono le sole algebre associative nelle quali le componenti delle funzioni regolari soddisfano a equazioni di tipo ellittico.

(2) Vedi p. es., R. D. SCHAFER [14], p. 48. Le algebre sopra elencate sono precisamente le *algebre reali con composizione* (Teorema di Hurwitz). Ciascuna di esse può ottenersi dalla precedente in modo analogo a quello che conduce dall'algebra $\boldsymbol{R}$ all'algebra $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}i$ (processo di Cayley-Dickson). Vedi p. es. N. JACOBSON [8].

La definizione di funzione regolare (D_1, n. 3) e alcuni risultati, come per esempio *il collegamento tra le funzioni regolari e le funzioni armoniche* (P_1, n. 3), si estendono al caso dell'algebra di Cayley C senza modifiche di rilievo. Più spesso, invece, sorgono difficoltà, dovute alla mancanza della proprietà associativa. Questa circostanza conduce in modo naturale ad introdurre in C una particolare classe di funzioni regolari f, caratterizzate dalla proprietà, banale nel caso associativo, che la funzione cf ($c \in C$) risulta regolare a destra (*funzioni biregolari*) (T_1, n. 3).

Questa classe di funzioni appare strettamente legata ad altre importanti classi di funzioni considerate nelle algebre (*funzioni primarie, funzioni intrinseche*) [3], le quali comprendono come caso particolare la serie di potenze a coefficienti scalari. In primo luogo si estende all'algebra C un risultato di R. F. Rinehart relativo ai quaternioni; precisamente, *nell'algebra di Cayley le funzioni primarie e le funzioni intrinseche risultano coincidenti* (T_2, n. 4). Si ottiene poi l'estensione all'algebra C di un teorema stabilito da R. Fueter per i quaternioni Q; precisamente risulta che *per ogni funzione intrinseca analitica f, la funzione $\Delta^3 f$ è biregolare* (T_3, n. 6). In particolare, *nell'algebra di Cayley per ogni serie di potenze convergente $f(x) = \sum a_n x^n$ ($a_n \in C$) la funzione $\Delta^3 f$ risulta regolare a destra* (C_1, n. 6).

L'interesse delle funzioni biregolari si rivela soprattutto in relazione al *teorema integrale*. Diversamente dal caso dei quaternioni, non sussiste nell'algebra di Cayley C un teorema integrale con riferimento ad una coppia di funzioni f, g regolari rispettivamente a destra, sinistra. Per la validità del teorema, *occorre che una delle due funzioni sia biregolare* (T_4, n. 7). Il teorema integrale consente però ugualmente di ottenere una *formula integrale di tipo Cauchy per le funzioni regolari nell'algebra C* (T_5, n. 8), assumendo come nucleo una opportuna funzione biregolare.

Dalla formula integrale discendono le classiche conseguenze. In particolare, *le componenti delle funzioni regolari sono di classe C^∞*.

2. L'algebra di Cayley.

Come è noto, l'algebra di Cayley C sul corpo $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali è l'insieme delle coppie ordinate di quaternioni, con la legge di mol-

---

[3] Per queste funzioni, vedi p. es., R. F. RINEHART [10].

tiplicazione

$$(1) \qquad (q_1, q_1') \cdot (q_2, q_2') = (q_1 q_2 - \bar{q}_2' q_1', \; q_2' q_1 + q_1' \bar{q}_2)$$

essendo $\bar{q}_2$, $\bar{q}_2'$ il quaternione *coniugato* di q_2, q_2' (4).

Denotata con $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3$ la base ordinaria nel corpo Q dei quaternioni, conviene considerare in C la base costituita dagli elementi

$$u_h = \begin{cases} (i_h, 0) & \text{per } h = 0, \ldots, 3, \\ (0, i_{h-4}) & \text{per } h = 4, \ldots, 7. \end{cases}$$

L'elemento u_0 funge da *elemento neutro* in C, e sarà nel seguito identificato con l'elemento neutro scalare 1.

L'algebra C risulta *non associativa*. Essa è però un'algebra alternativa (5), cioè in C l'*associatore* $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ è una funzione trilineare *alternante* nelle variabili $x, y, z \in C$. In particolare, sussistono le *leggi alternative sinistra, destra*

$$(2) \qquad a(ax) = a^2 x, \qquad (xa)a = xa^2$$

e la *legge flessibile*

$$(3) \qquad a(xa) = (ax)a.$$

Considerato l'elemento generico $x = \sum_{h=0}^{7} \xi_h u_h$ di C, si denotano poi con $\bar{x} = \xi_0 u_0 - \xi_1 u_1 - \ldots - \xi_7 u_7$ l'elemento *coniugato* di x, con $\mathrm{Tr}\, x = x + \bar{x}$ la *traccia* di x, e con $|x|^2 = \sum_{h=0}^{7} \xi_h^2 = N(x)$ la *norma* di x.

Il coniugio $x \rightsquigarrow \bar{x}$, come nel caso dei quaternioni, riesce intrinsecamente caratterizzato dall'essere l'unico *antiautomorfismo involutorio* di C tale che per ogni $x \in C$ si abbia $x + \bar{x}$, $x\bar{x} \in \boldsymbol{R}.1$ (6).

---

(4) Per le proprietà essenziali dell'algebra di Cayley, vedi p. es., N. JACOBSON [8], R. D. SCHAFER [14].

(5) Per le nozioni fondamentali sulle algebre non associative e in particolare alternative, vedi p. es., R. D. SCHAFER [14].

(6) Vedi p. es., R. D. SCHAFER [14], p. 45-49.

Risulta poi

$$x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 , \qquad |xy| = |x| \cdot |y| \quad (7) \tag{4}$$

e quindi ogni elemento $x \in C$ ammette inverso $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$ (8).

La norma N risulta una forma quadratica definita positiva su C. La sua forma bilineare associata

$$(x, y) = \tfrac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) \tag{5}$$

si dice *prodotto scalare* degli elementi $x, y \in C$, e dà all'algebra C la struttura di uno spazio di Hilbert reale. Rispetto al prodotto scalare (5), la base $u_0, \ldots, u_7$ scelta in C risulta *ortonormale*.

Dalle (4), (5) appare immediatamente che le nozioni di norma e prodotto scalare risultano *indipendenti dalla scelta di una base* in C.

3. Funzioni regolari.

Sia U un aperto di C, ed $f\colon U \to C$ una funzione di classe C^1 in U. Denotato con D l'operatore di Fueter e Moisil

$$D = u_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \ldots + u_7 \frac{\partial}{\partial \xi_7} , \tag{6}$$

si introduce la definizione:

D_1 – *Una funzione f, di classe C^1 in un aperto U di C, si dice regolare a sinistra, destra in U, se ivi risulta rispettivamente*

$$Df = \sum_{h=0}^{7} u_h \frac{\partial f}{\partial \xi_h} = 0 , \qquad fD = \sum_{h=0}^{7} \frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_h = 0 \quad (9) . \tag{7}$$

La definizione D_1 dipende dalla base scelta $u_0, \ldots, u_7$ in C. Tuttavia *l'insieme delle funzioni regolari a destra, sinistra rimane inalterato se*

---

(7) Vedi p. es., R. D. Schafer [14], p. 45-46.

(8) L'unicità dell'inverso può provarsi come nel caso associativo, servendosi delle relazioni $a(\bar{a}x) = (a\bar{a})x$, $(xa)\bar{a} = x(a\bar{a})$, equivalenti alle (2).

(9) Sulle funzioni regolari in un'algebra associativa, vedi p. es., G. C. Moisil [9], R. Fueter [4, 6]. Un'ampia bibliografia in V. Iftimie [7].

nelle (7) *in luogo di* $\{u_h\}$ *si assume un'altra arbitraria base ortonormale* $\{v_h\}$ *di* C (n. 2). Invero, la matrice del cambiamento di base $\{u_h\}$, $\{v_h\}$ risulta ortogonale. Segue facilmente l'asserto [10].

Considerato poi l'*operatore coniugato* di D

$$\bar{D} = u_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} - u_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \ldots - u_7 \frac{\partial}{\partial \xi_7},$$

sussistono le relazioni

$$D\bar{D} = \bar{D}D = \Delta \tag{8}$$

essendo Δ il Laplaciano in otto variabili. Ne segue la proposizione:

P_1 – *Ogni funzione* f *regolare a destra, sinistra in un aperto* U *di* C, *è ivi armonica, cioè risulta in* U:

$$\Delta f = 0 .$$

Per la dimostrazione, basta utilizzare la (8), tenendo presente che le funzioni regolari, come si vedrà al n. 8, sono di classe C^∞.

Una estesa classe di funzioni regolari a destra e a sinistra si costruisce utilizzando la proposizione:

P_2 – *Per ogni funzione* α *armonica in un aperto* U *di* C *e a valori scalari, la funzione* $f = \bar{D}\alpha = \alpha\bar{D}$ *riesce regolare a destra e a sinistra in* U.

L'asserto segue immediatamente dalla (8).

Le funzioni regolari f ottenute, in base alla proposizione P_2, a partire da una funzione armonica scalare α, si dicono *funzioni biregolari*. Esse sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

P_3 – *Una funzione* $f = \varphi_0 u_0 + \ldots + \varphi_7 u_7$, *di classe* C^1 *in un aperto* U *di* C, *risulta biregolare in* U, *se e solo se riescono ivi soddisfatte le relazioni*

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_7}; \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_h} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_0} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, 7), \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_h} \qquad (h, k = 1, \ldots, 7). \tag{10}$$

---

[10] Vedi M. Sce [11], p. 32, nota [8]. Vedi anche P. Dentoni [3].

Invero, le (9), (10) sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista una funzione scalare α con

$$\Delta\alpha = 0\,; \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_0} = \varphi_0\,, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_1} = -\varphi_1, \ldots, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_7} = -\varphi_7\,.$$

P_4 - *Una funzione f regolare a sinistra (a destra) in un aperto U di C, risulta in U biregolare se e solo se riesce ivi soddisfatta la* (10).

P_4 discende immediatamente dalla relazione

$$Df = \sum_{i,j=0}^{7} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i} u_i u_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right) u_i u_j + \\ + \sum_{h=1}^{7} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi_h} + \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_0}\right) u_h + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi_0} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} - \ldots - \frac{\partial\varphi_7}{\partial\xi_7}\right) u_0\,.$$

Un'altra caratterizzazione delle funzioni biregolari nell'algebra C è data dal teorema:

T_1 - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, di classe C^1 in un aperto U di C, sia biregolare in U, è che per ogni elemento $c \in C$ la funzione fc risulti regolare a sinistra in U* ([11]).

Invero, sia $f = \sum_h \varphi_h u_h$. Tenuto presente il carattere alternante dell'associatore può scriversi

$$(11) \qquad D(fc) = \sum_h u_h \left(\frac{\partial f}{\partial\xi_h} c\right) = (Df)\,c - \sum_h \left(u_h, \frac{\partial f}{\partial\xi_h}, c\right) = \\ = (Df)\,c + \sum_{1\leqslant h<k\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_h}\right)(u_h, u_k, c)\,.$$

Sia ora f biregolare in U. Per la proposizione P_4, l'ultimo membro di (11) è nullo, onde fc riesce regolare a sinistra. Inversamente, se fc è regolare a sinistra per ogni c (e quindi anche per $c = u_0$) si ha $D(fc) = Df = 0$ onde la (11) si riduce a

$$\sum_{1\leqslant h<k\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_h}\right)(u_h, u_k, c) = 0$$

([11]) Il teorema può anche enunciarsi con riferimento alla regolarità destra della funzione cf.

per ogni $c \in C$. Tenuto conto della proposizione P_1, per giungere all'asserto basta provare il lemma

L_1 – *Nell'algebra* C, *le trasformazioni lineari*

$$L_{h,k}(x) = (u_h, u_k, x) \qquad 1 \leqslant h < k \leqslant 7$$

sono fra loro linearmente indipendenti.

Ora, se nella relazione

$$\sum_{1 \leqslant h < k \leqslant 7} \lambda_{hk}(u_h, u_k, x) = 0 \qquad (\lambda_{hk} \in \boldsymbol{R}),$$

si pone successivamente $x = u_4$, $x = u_1$, $x = u_5$, si ottiene

$$\lambda_{12} - \lambda_{56} = 0, \qquad \lambda_{56} - \lambda_{47} = 0, \qquad \lambda_{47} + \lambda_{12} = 0$$

e quindi $\lambda_{12} = 0$. Per gli altri coefficienti λ_{hk} ci si riconduce al caso ora considerato, operando una conveniente permutazione sugli elementi della base ([12]).

Una notevole classe di funzioni regolari a destra e a sinistra, che rientra in quella delle funzioni biregolari, si ottiene partendo dalla considerazione delle *funzioni intrinseche* dell'algebra C. Ad esse è dedicato il n. 4.

4. Funzioni intrinseche nell'algebra di Cayley.

In un'arbitraria algebra A, si dicono *intrinseche* le funzioni f che risultino *permutabili con gli automorfismi dell'algebra*, cioè tali che si abbia

$$f(\omega x) = \omega f(x)$$

per ogni automorfismo ω di A ([13]).

([12]) Si consideri in C una base ausiliaria del tipo $v_0 = u_0$, $v_1 = u_h$, $v_2 = u_k$ $v_3 = u_h u_k$, $v_4 = u_s$, $v_5 = u_s u_h$, $v_6 = u_s u_k$, $v_7 = u_s(u_h u_k)$ Si riconosce facilmente, che le basi $\{u_i\}, \{v_i\}$ hanno le stesse tavole di moltiplicazione.

([13]) Sulle funzioni intrinseche nelle algebre, vedi R. F. RINEHART [10]. Per il caso dei quaternioni, vedi anche C. G. CULLEN [2].

Esempi di funzioni intrinseche sono forniti dalle *serie di potenze* $\sum \alpha_n x^n$, *a coefficienti* α_n *scalari*.

La classe più interessante di funzioni intrinseche, che comprende l'esempio ora citato, è costituito dalle *funzioni primarie*, che possono riguardarsi come ottenute per prolungamento all'algebra di ordinarie funzioni della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$. Nell'algebra di Cayley, la definizione è la seguente [14].

Sia

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\xi, \eta) + i\psi_2(\xi, \eta)$$

una funzione definita in un aperto del corpo complesso $\boldsymbol{C}$, a valori in $\boldsymbol{C}$, con le condizioni

$$\psi_1(\xi, -\eta) = \psi_1(\xi, \eta)\,, \qquad \psi_2(\xi, -\eta) = -\psi_2(\xi, \eta)\,. \tag{12}$$

Si consideri poi per l'elemento generico x di C la decomposizione canonica

$$x = \xi_0 \cdot 1 + \hat{x} \tag{13}$$

dove $\xi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} x$ e $\operatorname{Tr} \hat{x} = 0$. Posto $\lambda^2 = N(\hat{x}) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$, $X = (1/\lambda)\hat{x}$, la (13) si scrive

$$x = \xi_0 \cdot 1 + \lambda X\,. \tag{14}$$

Ciò premesso, la funzione

$$f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda) \cdot 1 + X\psi_2(\xi_0, \lambda) \tag{15}$$

che, in virtù delle (12), non dipende dal segno scelto per λ, si dice *la funzione primaria generata dalla funzione di variabile complessa* ψ.

Le funzioni primarie nell'algebra C risultano intrinseche [15]. In-

---

[14] In un'arbitraria algebra A, il prolungamento della funzione $\psi(\zeta)$ viene usualmente definito per mezzo della formula di interpolazione di Hermite. Si verifica senza difficoltà, in modo del tutto analogo al caso dei quaternioni (vedi R. F. RINEHART [10], Theor. 8.1), che nell'algebra di Cayley tale definizione coincide con quella indicata nel testo.

[15] Il risultato è ben noto, con riferimento ad una arbitraria algebra associativa. Vedi R. F. RINHEART [10], Theor. 4.4.

vero, per ogni automorfismo ω di C riesce

$$\omega x = \xi_0 \cdot 1 + \lambda \omega X$$

e poichè $|\omega X| = |X| = 1$, $\mathrm{Tr}\,\omega X = \mathrm{Tr}\,X = 0$ ([16]), segue l'asserto. Nel caso attuale sussiste anzi il teorema, estensione di un noto risultato relativo all'algebra dei quaternioni ([17]):

T_2 – *Nell'algebra di Cayley, le funzioni intrinseche coincidono con le funzioni primarie.*

Alla dimostrazione di T_2 è dedicato il n. 5.

5. Conviene premettere qualche lemma sugli automorfismi di C.

L_2 – *Per ogni coppia di elementi ortogonali a, b di C con $|a| = |b| = 1$, $\mathrm{Tr}\,a = \mathrm{Tr}\,b = 0$, esiste un automorfismo ω dell'algebra C tale che $\omega a = a$, $\omega b = -b$.*

Invero, sia c un elemento di C con $|c| = 1$, e ortogonale al sottospazio generato dagli elementi $1, a, b, ab$. Denotato con $\tilde{Q}$ il sottospazio di C generato dagli elementi $1, a, c, ac$ e tenuto conto delle (2), (4), (5) si verifica senza difficoltà che *$\tilde{Q}$ è una sottoalgebra, isomorfa all'algebra Q dei quaternioni.* L'elemento b, che per ipotesi riesce ortogonale ad $1, a, c$ risulta anche ortogonale ad ac. Invero per una nota proprietà del prodotto scalare in C ([18])

$$(ac, b) = (c, \bar{a}b) = -(c, ab) = 0\ .$$

In conclusione b è ortogonale a $\tilde{Q}$. Ciò premesso, si assume come automorfismo ω la trasformazione lineare (*riflessione*) di C in sè, nella quale gli elementi di $\tilde{Q}$ sono uniti e quelli del sottospazio $\tilde{Q}^{\perp}$, ortogonale a Q, cambiano di segno ([19]).

L_3 – *Per ogni coppia di elementi indipendenti x, y di C con $|x| = |y| = 1$, $\mathrm{Tr}\,x = \mathrm{Tr}\,y = 0$, esiste un automorfismo ω dell'algebra C*

([16]) Vedi p. es., N. Jacobson [8], p. 65.
([17]) Vedi R. F. Rinehart [10], p. 15.
([18]) Vedi p. es., N. Jacobson [8], p. 57, (8).
([19]) Vedi N. Jacobson [8], p. 66.

tale che risulti $\omega x = x$, $\omega y \neq y$.

Posto

$$a = x\,, \qquad b = \frac{y - (x, y)x}{|y - (x, y)x|}$$

(per ipotesi $y - (x, y)x \neq 0$), riesce $|b| = 1$, $\mathrm{Tr}\, b = 0$, $(a, b) = 0$ onde per L_2 esiste un automorfismo ω di C tale che $\omega x = x$, $\omega b = -b$ da cui

$$\omega y = 2(x, y)x - y \neq y\,.$$

L_4 - *Per ogni coppia di elementi* x, y *di* C *con* $|x| = |y|$, $\mathrm{Tr}\, x = \mathrm{Tr}\, y = 0$, *esiste un automorfismo* ω *di* C *tale che risulti* $\omega x = y$.

Ovviamente, può supporsi $x - y \neq 0$. Sia dapprima anche $x + y \neq 0$. Posto allora $a = (x + y)/|x + y|$, $b = (x - y)/|x - y|$ riesce $|a| = |b| = 1$, $\mathrm{Tr}\, a = \mathrm{Tr}\, b = 0$, $(a, b) = 0$ onde per L_2 esiste un automorfismo ω con $\omega a = a$, $\omega b = -b$. Ne discende facilmente l'asserto. Nel caso invece che $x + y = 0$, sia a un qualsiasi elemento di C con $|a| = 1$ e ortogonale a $1, x$. Posto allora $b = x/|x|$, il lemma L_2 conduce subito all'asserto.

Tuttociò premesso, si passa alla dimostrazione di T_2. Sia f una qualsiasi funzione intrinseca dell'algebra C; occorre provare che f è primaria. A tal fine, in analogia con la (14) si scriva

$$f(x) = \varphi_0 \cdot 1 + \mu Y \tag{16}$$

con φ_0, $\mu \in \boldsymbol{R}$, $\mathrm{Tr}\, Y = 0$, $|Y| = 1$. Denotato con ω un qualsiasi automorfismo di C tale che $\omega X = X$ (e quindi $\omega x = x$), risulta

$$\varphi_0 \cdot 1 + \mu Y = f(x) = f(\omega x) = \omega f(x) = \varphi_0 \cdot 1 + \mu \omega Y\,. \tag{17}$$

Sia ora $\mu \neq 0$. La (17) porge allora $\omega Y = Y$; dal lemma L_3 segue necessariamente la lineare dipendenza di X e Y, onde $Y = \varepsilon X$ con $\varepsilon = \pm 1$. Posto

$$\psi_1(\xi_0, \lambda, X) = \varphi_0\,; \qquad \psi_2(\xi_0, \lambda, X) = \varepsilon\mu$$

può scriversi in ogni caso

$$f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X) \cdot 1 + X\psi_2(\xi_0, \lambda, X) \tag{18}$$

ed evidentemente risulta

$$(19)\quad \psi_1(\xi_0, -\lambda, -X) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X)\,; \quad \psi_2(\xi_0, -\lambda, -X) = -\psi_2(\xi_0, \lambda, X)\,.$$

Le funzioni ψ_1, ψ_2 risultano indipendenti da X. Invero, sia X' un qualunque elemento di C con $\mathrm{Tr}\,X' = 0$, $|X'| = 1$. Per L_4 esiste un automorfismo ω di C tale che $\omega X = X'$, e pertanto sussistono le relazioni

$$f(\omega x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X')\cdot 1 + X'\psi_2(\xi_0, \lambda, X')$$

$$\omega f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X)\cdot 1 + X'\psi_2(\xi_0, \lambda, X)\,.$$

Poichè per ipotesi $f(\omega x) = \omega f(x)$, si ottiene

$$\psi_1(\xi_0, \lambda, X') = \psi_1(\xi_0, \lambda, X) = \psi_1(\xi_0, \lambda)$$

$$\psi_2(\xi_0, \lambda, X') = \psi_2(\xi_0, \lambda, X) = \psi_2(\xi_0, \lambda)$$

e cioè l'asserto. In particolare, le (18), (19) sono relazioni del tipo (15), (12) rispettivamente; in altri termini la funzione intrinseca f coincide con la funzione primaria generata dalla funzione di variabile complessa $\psi(\xi + i\eta) = \psi_1(\xi, \eta) + i\psi_2(\xi, \eta)$.

Il teorema T_2 è così completamente dimostrato.

Nel seguito, intervengono principalmente le funzioni intrinseche f generate da funzioni $\psi(\zeta)$ *olomorfe*. Le funzioni f si dicono in tal caso *funzioni intrinseche analitiche*, e comprendono fra l'altro le *funzioni definite da serie convergenti di potenze positive o negative della variabile x di C, a coefficienti scalari*:

$$(20)\qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n \qquad (\alpha_n \in \boldsymbol{R})\,.$$

Non è difficile verificare, invero, che la (20) è la funzione primaria generata dalla funzione olomorfa

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta^n\,.$$

6. Funzioni intrinseche analitiche e funzioni biregolari.

La considerazione delle funzioni intrinseche analitiche consente di costruire nell'algebra di Cayley C una importante classe di funzioni regolari a destra e a sinistra, contenuta fra le funzioni biregolari (n. 3).

Precisamente, denotato con Δ il Laplaciano nelle variabili $\xi_0, \ldots, \xi_7$, sussiste il seguente teorema, estensione di un noto risultato di R. Fueter nei quaternioni ([20]):

T_3 – *Per ogni funzione intrinseca analitica f in un aperto U di C, la funzione*

$$g = \Delta^3 f \tag{21}$$

risulta biregolare in U.

Le funzioni (21), *con f intrinseca analitica, coincidono precisamente con le funzioni biregolari ottenute da una funzione armonica $\alpha(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_7)$ che risulti dipendente soltanto dalle due quantità ξ_0 e $\xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$.*

La prima affermazione contenuta in T_3 discende immediatamente da un risultato più generale di M. Sce, relativo ai moduli quadratici ([21]).

Per dimostrare la seconda parte di T_3, si consideri dapprima una qualsiasi funzione intrinseca analitica f. Dalla (15) si ottiene senza difficoltà ([22])

$$D\Delta^2 f = -48\left(\frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4}\frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda} + 3\frac{1}{\lambda^5}\psi_2\right). \tag{22}$$

Pertanto la funzione $\alpha = D\Delta^2 f$ è una funzione scalare. Essa dipende dalle sole quantità ξ_0, $\lambda^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$ perchè per le (12) il secondo membro della (22) è funzione pari di λ. Inoltre riesce per la (8)

$$\bar{D}\alpha = \Delta^3 f = g\,, \qquad \Delta\alpha = Dg = 0$$

onde la funzione biregolare $g = \Delta^3 f$ è ottenuta da una funzione armonica α del tipo richiesto.

Viceversa, sia ora α una funzione armonica delle variabili $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_7$ dipendente dalle sole quantità $\xi_0, \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$ Si noti anzitutto che α può riguardarsi come una funzione $\alpha(\xi_0, \lambda)$ delle due variabili reali ξ_0 e $\lambda = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2}$, con la proprietà $\alpha(\xi_0, -\lambda) = \alpha(\xi_0, \lambda)$. Ciò pre-

---

([20]) Vedi R. Fueter [4], p. 314.

([21]) Vedi M. Sce [13], p. 224, n. 6. Si tenga presente la proposizione P_4, dopo aver osservato che f, e quindi anche g, soddisfa la (10).

([22]) I calcoli possono abbreviarsi con l'uso delle relazioni (8), (9) di M. Sce [13].

messo, si consideri la funzione

$$(23)\qquad \psi_2(\xi_0, \lambda) = \frac{5}{48}\int_0^{\xi_0} \frac{\lambda^3(\xi_0 - \vartheta) - \lambda(\xi_0 - \vartheta)^3}{2}\alpha(\vartheta, 0)d\vartheta - \\ -\frac{1}{48}\int_0^{\lambda} \frac{\lambda^3\nu - \lambda\nu^3}{2}\alpha(\xi_0, \nu)d\nu\,,$$

che, come facilmente si verifica, è soluzione dell'equazione

$$(24)\qquad \frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4}\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda} + 3\frac{1}{\lambda^5}\psi_2 = -\frac{1}{48}\alpha\,.$$

Tenuto conto che per ipotesi risulta

$$0 = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_0^2} + \ldots + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_7^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_0^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\lambda^2} + \frac{6}{\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\,,$$

non è poi difficile verificare che ψ_2 *è funzione armonica delle due variabili* ξ_0, λ. Siano ora

$$(25)\qquad \psi_1(\xi_0, \lambda) = \int_0^{\xi_0} \frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda}(\vartheta, 0)\,d\vartheta - \int_0^{\lambda} \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi_0}(\xi_0, \nu)\,d\nu$$

la funzione armonica coniugata di ψ_2 e $\psi(\zeta)$ la funzione olomorfa

$$\psi(\xi_0 + i\lambda) = \psi_1(\xi_0, \lambda) + i\psi_2(\xi_0, \lambda)\,.$$

Poichè $\alpha(\xi_0, \lambda)$ è funzione pari nel secondo argomento, dalle (23), (25) appare che ψ_2 e ψ_1 riescono funzioni rispettivamente dispari e pari di λ, onde risultano soddisfatte le (12). Sia allora f *la funzione intrinseca analitica generata dalla funzione* ψ. Tenuta presente la (24), dalla (22) segue

$$D\Delta^2 f = \alpha$$

onde ricordando la (8) può scriversi

$$g = \bar{D}\alpha = \Delta^3 f\,.$$

Pertanto la funzione g proviene, tramite l'operatore Δ^3, dalla funzione intrinseca analitica f. Il teorema T_3 è così completamente dimostrato.

Si segnala il seguente corollario di T_3:

C_1 – *Per ogni serie di potenze*

$$f(x) = \sum a_n x^n \qquad (a_n \in C)\ (^{23}),$$

convergente in un aperto U *di* C, *la funzione*

$$g = \Delta^3 f$$

risulta regolare a destra in U.

Per la dimostrazione, si prova anzitutto come nel classico teorema di derivazione di una serie termine a termine, che può scriversi

$$\left(\sum_n a_n x^n\right) D = \sum_n (a_n x^n) D\,.$$

Poichè la funzione x^n è intrinseca analitica, C_1 discende allora immediatamente da T_3, tenuto presente il teorema T_1 del n. 3.

7. Teorema integrale.

Si denota ora con dx^* la *forma aggiunta* (24) della forma differenziale $dx = \sum_h d\xi_h u_h$, cioè la 7-forma

$$dx^* = \sum_h (-1)^{h+1} d\xi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_h} \wedge \ldots \wedge d\xi_7 u_h\,.$$

Il teorema integrale dato da G. C. Moisil e R. Fueter per le funzioni regolari nell'algebra Q dei quaternioni (25), si estende all'algebra di Cayley C nella forma seguente:

---

(23) Nelle algebre alternative, la notazione ax^n non è ambigua, non dipendendo il risultato dal modo di associare i singoli fattori. Vedi p. es., R. D. Schafer [14], Theor. 3.1, p. 29.

(24) Vedi p. es., V. Choquet-Bruhat [1], p. 97.

(25) Vedi G. C. Moisil [9], p. 169; R. Fueter [4], p. 312.

T_4 – *Sia g una funzione di classe C^1 in un aperto U di C. Condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia*

$$\int_{\Gamma_7} (f dx^*)\, g = 0 \tag{26}$$

per ogni funzione f regolare a destra in U, e per ogni 7-ciclo Γ_7 di classe C^1, omologo a zero in U, è che la funzione g risulti biregolare in U ([26]).

Per la dimostrazione, si osservi anzitutto che, denotato con $\boldsymbol{d}$ il differenziale esterno, riesce in U

$$\boldsymbol{d}((f dx^*) g) = \left(\sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_h \right) g + \sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} \right) d\xi_0 \dots d\xi_7 =$$

$$= \sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} d\xi_0 \dots d\xi_7 .$$

Per il teorema di Green-Stokes ([27]), la (26) equivale quindi alla relazione

$$\sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} = 0 \tag{27}$$

per ogni f regolare a destra in U. Per $f = 1$ si ha in particolare $Dg = 0$, onde può scriversi

$$\sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} = \sum_h \left(f, u_h, \frac{\partial g}{\partial \xi_h} \right)$$

$$= \sum_h \left(u_h, \frac{\partial g}{\partial \xi_h}, f \right)$$

$$= - \sum_h u_h \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_h} f \right) ,$$

e pertanto la (27) equivale all'essere $D(gc) = 0$ per ogni elemento $c \in C$. Il teorema T_1 conduce subito all'asserto.

([26]) Un teorema analogo a T_4 sussiste con riferimento all'integrale $\int_{\Gamma_7} g(dx^* f)$, con f regolare a sinistra.

([27]) Vedi p. es., B. Segrè [15], Cap. II, n. 46.

8. Formula integrale.

Come mostra il teorema T_4, per ottenere in C una formula di rappresentazione integrale delle funzioni regolari, analoga a quella di G. C. Moisil e R. Fueter nei quaternioni ([28]), occorre assumere come nucleo una funzione biregolare. Il nucleo classico $1/x$ non è biregolare nell'algebra C. Esso è tuttavia una funzione intrinseca analitica in $C-\{0\}$ (n. 5), e pertanto riesce ivi biregolare la funzione $\Delta^3(1/x)$ (Teor. T_3). Si perviene così al teorema:

T_5 – *Se f è una funzione regolare a destra in un aperto U di C, e Σ_7 una qualsiasi superficie 7-dimensionale chiusa di classe C^1 contenuta in U, risulta*

$$f(z)=\frac{1}{48\pi^4}\int_{\Sigma_7}(f(x)dx^*)\,\Delta^3\frac{1}{x-z} \tag{28}$$

per ogni z interno a Σ_7 ([29]) ([30]).

Per la dimostrazione, mediante il teorema T_4, ci si riconduce a calcolare il secondo membro della (28) su una 7-sfera S_7 di centro z e raggio r conveniente. Tenuto conto poi che riesce $\Delta^3\big(1/(x-z)\big)=$ $=-12^2\cdot 16\big((x-z)^{-1}/|x-z|^6\big)$ e che su S_7 risulta $dx^*=-\big((x-z)/r\big)\,d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S_7, può scriversi ([31])

$$\int_{S_7}(f(x)dx^*)\,\Delta^3\frac{1}{x-z}=\frac{12^2\cdot 16}{r^7}\int_{S_7}f(x)\,d\sigma\,.$$

Facendo ora tendere a zero il raggio r di S_7, e tenuto conto che l'area di S_7 vale $\pi^4 r^7/3$ si perviene subito alla (28).

In modo del tutto analogo al caso delle funzioni regolari nell'algebra

---

([28]) Vedi G. C. Moisil [9], p. 171; R. Fueter [4], p. 318.

([29]) Una formula analoga sussiste ovviamente per le funzioni regolari a sinistra.

([30]) Si intende qui che Σ_7 sia semplicemente allacciata col punto z. Nel caso generale interviene come fattore a primo membro della (28) l'indice di allacciamento.

([31]) Si tengano presenti le relazioni riportate nella nota ([8]).

dei quaternioni ([32]), dalla rappresentazione integrale ora trovata discendono per le funzioni regolari nell'algebra di Cayley C le classiche conseguenze. In particolare, *le componenti delle funzioni regolari sono di classe* C^{ω}.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. CHOQUET-BRUHAT, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

[2] C. G. CULLEN, *An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions*, Duke Math. J., **32** (1965), 139-148.

[3] P. DENTONI, *Funzioni regolari in un'algebra e cambiamenti di base*, Rend. Lincei, **51** (1971), 274-281.

[4] R. FUETER, *Die funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reelen Variablen*, Comm. Math. Helvetici, **7** (1934-35), 307-330.

[5] R. FUETER, *Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comm. Math. Helvetici, **8** (1935-36), 371-378.

[6] R. FUETER, *Die Theorie der regulären Funktionen einer quaternionen Variablen*, C. R. Congrès Int. Oslo, 1936, t. I, Oslo, 1937, p. 75-91.

[7] V. IFTIMIE, *Fonctions Hypercomplexes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, **9** (1965), 279-332.

[8] N. JACOBSON, *Composition algebras and their automorphisms*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **7** (1958), 55-80.

[9] G. C. MOISIL, *Sur les quaternions monogènes*, Bull. Sci. Math. Paris, **55** (1931), 168-174.

[10] R. F. RINEHART, *Elements of a theory of intrinsic functions on algebras*, Duke Math. J., **27** (1960), 1-19.

[11] M. SCE, *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse*, I. Rend. Lincei, **16** (1954), 30-35.

[12] M. SCE, *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali*, Rend. Lincei, **18** (1955), p. 32.

[13] M. SCE, *Sulle serie di potenze nei moduli quadratici*, Rend. Lincei, **23** (1957), 220-225.

[14] R. D. SCHAFER, *An introduction to nonassociative algebras*, Acad. Press, New York, 1966.

[15] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, I, Docet, Roma, 1951.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 dicembre 1972.

([32]) Vedi R. FUETER [4], p. 319-330; [5], p. 371-378.