RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO

Proprietà di fasci algebrici coerenti e lisci su varietà algebriche affini ad algebra fattoriale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 12-30

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__12_0>

PROPRIETÀ DI FASCI ALGEBRICI COERENTI E LISCI SU VARIETÀ ALGEBRICHE AFFINI AD ALGEBRA FATTORIALE

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO *)

Se A è un dominio d'integrità, è noto [6] che ogni A-modulo M di tipo finito e privo di torsione ammette un monomorfismo in un modulo libero con base finita; e quindi anche [5], che ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ coerente e liscio di rango r su una varietà algebrica affine $(V, \mathcal{A}_V)$ è isomorfo ad un sottofascio $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{A}^r_V$.

Orbene, nel caso in cui V sia un sottospazio chiuso dello spazio affine n-dimensionale S^n costruito sopra un corpo k commutativo algebricamente chiuso, le sezioni globali di $\mathcal{M}'$ possono rappresentarsi con r-ple di polinomi appartenenti rispettivamente ad r ideali I_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ di $A = \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ (n^0 5). Mediante polinomi estratti da I_i $(1 \leq i \leq r)$, sono riuscita [1]) a costruire dei sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ di divisori di V, di grado m, non composti con sistemi algebrici di di dimensione 1 e indice 1, per ogni m abbastanza grande (n^{i} 6-8). Inoltre questi sistemi lineari, privati delle componenti fisse, hanno il divisore generico irriducibile, attesochè ad essi si può applicare il 1^0 teorema di Bertini (n^0 9).

Stabilite queste premesse ho dimostrato che se $r > 1$ ed $n > 1$ fra le iniezioni di $\mathcal{M}^{(r)}$ in $\mathcal{A}^r_V$ ce n'è sempre qualcuna la cui im-

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito della attività del gruppo di ricerca n. 33 del C.N.R.

[1]) Dimostrazioni schematiche dei risultati contenuti in questo lavoro erano già state date nella mia nota « *Sui fasci algebrici coerenti e lisci sopra varietà affini* » C.E.D.A.M. Padova, (1964).

magine $\mathcal{M}'$, ha sezioni globali con chiuso proprio privo di componenti di cdm. 1, (chiuso di una sezione globale di $\mathcal{M}'$ essendo il luogo degli zeri della r-pla di polinomi che la rappresenta). Cioè che: *ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione e di rango $r > 1$, sopra un anello $A = k[x_1, \dots, x_n]$ di polinomi in $n > 1$ indeterminate, è isomorfo ad un sottomodulo di A^r che possiede qualche elemento il cui chiuso ha le componenti di cdm. minima maggiore di 1 in S^n. Se M è libero la proprietà sussiste anche per il rango 1.*

Questo teorema è vero (n^0 12) anche per ogni anello del tipo $A = k[x_1, \dots, x_n]$ che sia a fattorizzazione unica, e quindi per fasci algebrici coerenti e lisci sopra varietà affini a forme intersezione completa. Precisamente: *ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ coerente e liscio di rango $r > 1$ su di una varietà algebrica affine $V = (V, \mathcal{A}_V)$ ad algebra fattoriale e di dimensione maggiore di 1, è isomorfo ad un sottofascio di $\mathcal{A}_V^r$ che ammette qualche sezione con chiuso di cdm. minima maggiore di 1 in V. Questa proprietà sussiste anche nel caso del rango $r = 1$ purchè il chiuso degli zeri dell'ideale $\Gamma(\mathcal{M}^{(1)})$ contenga solo divisori di V.*

La presenza di sezioni del tipo suddetto mi permette di dimostrare che: *per ogni fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r > 1$, su una varietà algebrica affine $(V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1, ad algebra fattoriale, esiste una sequenza esatta del tipo*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathcal{M}^{(r)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(r-1)} \longrightarrow 0,$$

con $\mathcal{M}^{(r-1)}$ liscio; e di qui deduco che, fisse restando le ipotesi, *per $\mathcal{M}^{(r)}$ su $(V, \mathcal{A}_V)$, esistono $r - 1$ sequenze esatte del tipo*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_V^h \longrightarrow \mathcal{M}^{(r)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(r-h)} \longrightarrow 0, \qquad (1 \leq h \leq r-1)$$

di fasci lisci, tali che il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ sia contenuto nel chiuso di $\mathcal{M}^{(r-h)}$, per ogni h.

1. Indicheremo con k un corpo commutativo, algebricamente chiuso di caratteristica p arbitraria, appartenente ad un dominio universale Ω, e con S^n lo spazio affine $k \times k \times \dots \times k$, n-dimensionale su k. Lo S^n sarà dotato della topologia di Zariski, per la quale i chiusi sono

tutti e soli gli insiemi algebrici di k^n, cioè le totalità di zeri di ideali di $k[X]$.

L'insieme di tutti i polinomi di $k[X]$ nulli in ogni punto di un insieme algebrico H è un ideale (radicale) $I(H)$, che è primo se e solo se H è irriducibile (assolutamente, poichè k è algebricamente chiuso). $I(H)$ si dice *associato* ad H.

2. Se V è un chiuso irriducibile non vuoto di k^n ed $I(V)$ il suo ideale associato, l'anello $A[V] = k[X]/I(V)$ (isomorfo all'anello $k[x]$ delle coordinate di V, se (x) è un punto generico di V), i cui elementi possono identificarsi con le applicazioni intere di V in k, risulta un dominio d'integrità noetheriano.

Ricordiamo inoltre che la restrizione a k dell'omomorfismo canonico

$$\varphi : k[X] \to k[X]/I(V)$$

è iniettiva, perciò identificando $\varphi(k)$ con k e ponendo $\xi_i = \varphi(X_i)$ $(i = 1, 2 \dots n)$, l'anello $k[X]/I(V)$ risulta generato da $k, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ed il grado di trascendenza del suo corpo dei quozienti $k(V)$, pensato come estensione di k, si dice la dimensione di V. Se (x) è un punto generico di V, $k(x) \simeq k(V)$ si dice un corpo di funzioni su V razionali su k.

Considerata su V la topologia relativa rispetto a quella di S^n, se $\mathcal{A}_V$ è il fascio degli anelli locali di V, s'indica con V anche la varietà algebrica affine definita dallo spazio anellato $(V, \mathcal{A}_V)$, e si dimostra che non solo l'anello delle sezioni globali di $\mathcal{A}_V$, che può esser identificato con $A[V]$, è una k-algebra di tipo finito e priva di nullipotenti, ma che si ha corrispondenza biunivoca, in questo modo (a meno d'isomorfismi), fra varietà algebriche affini e k-algebre di tipo finito e prive di divisori dello zero (V è detta « varietà » solo se il suo chiuso è irriducibile).

3. Sia $V = (V, \mathcal{A}_V)$ una varietà affine, ed A_V il fascio costante su V a fibra isomorfa all'anello $A[V]$, allora $\mathcal{A}_V$ risulta atteggiato naturalmente a fascio di $A[V]$-moduli; e per ogni $A[V]$-modulo M di tipo finito, indicato con M_V il fascio costante su V a fibra iso-

morfa ad M, si può definire un fascio di $\mathcal{A}_V$-moduli

$$\mathcal{C}(M) = \mathcal{A}_V \bigotimes_{A_V} M_V .$$

Se si pone, per ogni omomorfismo φ di $A[V]$-moduli, $\mathcal{C}(\varphi) = i_{\mathcal{A}_V} \bigotimes_{A_V} \varphi$, l'operatore $\mathcal{C}(\varphi)$ risulta un funtore covariante esatto sulla categoria degli $A[V]$-moduli di tipo finito, con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V.

Viceversa associando ad ogni fascio algebrico coerente $\mathcal{M}$, su una varietà affine V, l'$A[V]$-modulo $\Gamma(V, \mathcal{M})$ delle sue sezioni globali su V (per cui è anche $A[V] = \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$), e ad ogni omomorfismo φ fra i fasci, l'omomorfismo $\Gamma(\varphi)$ indotto fra i moduli associati, resta definito un funtore $\Gamma(\ )$ covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V con valori nella categoria dei $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ moduli di tipo finito.

Tenuto conto di quanto detto alla fine del n^0 prec., e dei funtori $\mathcal{C}(\ )$ e $\Gamma(\ )$, che inducono fra la categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V e la categoria dei $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$-moduli di tipo finito due biiezioni una inversa all'altra (a meno d'isomorfismi), ci riferiremo, senza speciale avvertimento, a quella delle due categorie nella quale ci riuscirà di volta in volta più comodo o più significativo operare.

4. Diremo che un fascio $\mathcal{M}$ su una varietà algebrica V è *liscio* o privo di torsione, se per ogni sezione $s \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ sopra un aperto U di V, per la quale sia $s_{x_0} = 0$ in un punto $(x_0) \in U$, risulti anche $s = 0$ in tutto U.

Indicando con K_V il fascio algebrico costante e liscio delle funzioni razionali su V, si vede che ad ogni fascio $\mathcal{M}$ algebrico coerente su V, resta associato il fascio algebrico

$$\mathcal{M} \bigotimes_{\mathcal{A}_V} K_V ,$$

il quale è costante liscio ed isomorfo ad un fascio del tipo K_V^r.

Se $\mathcal{M}$ è liscio, dall'iniezione canonica $\mathcal{A}_V \rightarrow K_V$, tensorializzando con $\mathcal{M}$, si ottiene ancora un'iniezione

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M} \underset{\mathcal{A}_V}{\otimes} K_V \simeq K_V^r ;$$

se $\mathcal{M}$ non è liscio il nucleo dell'omomorfismo γ vien detto il sottofascio di torsione di $\mathcal{M}$. L'intero $r \geq 0$ si dice in ogni caso il rango di $\mathcal{M}$.

Notiamo che il funtore $\Gamma(\ )$ del n^0 prec., applicato a quanto sopra, ci riporta alla nozione di rango di un modulo M di tipo finito e privo di torsione su un dominio d'integrità A, come dimensione dello spazio vettoriale dedotto da M per estensione dell'anello degli scalari al corpo K dei quozienti di A, mediante l'iniezione canonica di A in K.

Ricordiamo infine che: un fascio algebrico coerente e liscio su una varietà affine V, ha rango r se e solo se esso è isomorfo ad un sottofascio $\mathcal{M}'$ del fascio $\mathcal{A}_V^r$, tale che sia

$$Supp.\ (\mathcal{A}_V^r / \mathcal{M}') \neq V,$$

questo supporto vien detto il *chiuso del fascio* $\mathcal{M}$. Si ha cioè nelle nostre ipotesi una iniezione

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}_V^r$$

la quale mediante $\Gamma(\ )$, conduce alla

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^r$$

nota, ([6], pag. 131), per i moduli di tipo finito privi di torsione su domini d'integrità.

5. Sia ora $V = S^n$, ed $\mathcal{M}$ un fascio algebrico coerente e liscio di rango r su S^n. Posto $M = \Gamma(S^n, \mathcal{M})$ ed $A = \Gamma(S^n, \mathcal{A}_{S^n}) \simeq k[X_1, \ldots$ $\ldots, X_n]$, in virtù dell'iniezione

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^r \tag{1}$$

considerata al n^0 prec., possiamo pensare M come sottomodulo di A^r, per cui un elemento $s \in M$ può rappresentarsi mediante

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \qquad s_i \in A.$$

Se indichiamo con $\beta = \{s^1, s^2, \dots, s^h\} \subset A^r$ un sistema di generatori di M, sarà certo $h \geq r$, poichè in qualunque punto (x) di S^n deve esistere una r-upla di germi $s_x^i \in \mathcal{M}_x$ linearmente indipendenti su $\mathcal{A}_x$, e d'altra parte, essendo $\mathcal{M}$ algebrico coerente l'$\mathcal{A}_x$-modulo $\mathcal{M}_x$ è generato da elementi di M, cioè da germi appartenenti a sezioni globali.

Gli elementi s^j, $(j = 1, 2, \dots, h)$ di β siano rappresentati da

$$s^j = (s_1^j, s_2^j, \dots, s_r^j)$$

e consideriamo, nella matrice

$$\left(\begin{matrix} s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_r^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_r^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^h & s_2^h & \dots & s_r^h \end{matrix}\right), \tag{2}$$

le colonne come elementi di A^h:

$$\sigma_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^h) \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Questi elementi σ_i sono tutti diversi da 0, altrimenti M sarebbe sottomodulo di A^{r-t} con $0 < t \leq r$, e il rango di M sarebbe minore di r (n^0 4).

Potremo usare in A^h una notazione (di prodotto scalare) del tipo:

$$\lambda\sigma_i = \sum_1^h {}_j \lambda_j s_i^j \in A \qquad \text{con } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \in A^h,$$

per cui, poichè un elemento s di M è dato da

$$s = \sum_1^h {}_j \lambda_j s^j \qquad \lambda_j \in A,\ s^j \in \beta \subset A^r,$$

e quindi risulta

$$s = \left(\sum_1^h{}_j \lambda_j s_1^j , \sum_1^h{}_j \lambda_j s_2^j , \dots , \sum_1^h{}_j \lambda_j s_r^j \right) ,$$

si ha

$$(3) \qquad (s \in M) \Longleftrightarrow s = (\lambda\sigma_1 , \lambda\sigma_2 , \dots , \lambda\sigma_r) \qquad \lambda \in A^h ,$$

dove $\lambda\sigma_i$ è dunque una combinazione lineare delle i-esime componenti dei generatori s^j di M, e quindi componente i esima di $s \in M$.

Inoltre l'insieme

$$I_i = \{\lambda\sigma_i\}_{\lambda \in A^h} \subset A$$

è un ideale di A che dipende dalla iniezione (1) del n⁰ 5, e quindi dall'immersione del fascio $\mathcal{M}$ in $\mathcal{A}_V^r$, e risulta canonicamente

$$I_i \simeq M \cap A_i^r$$

se A_i^r è il sottoinsieme di A^r costituito dagli elementi che hanno diversa da zero solo la i-esima componente.

6. Vogliamo ora immergere lo spazio S^n in uno spazio proiettivo P^n.

Ricordiamo perciò che uno spazio proiettivo di dimensione n su k può esser definito nel seguente modo:

Sia Y l'insieme aperto $k^{n+1} - \{0\}$ dello spazio affine $(n+1)$-dimensionale S^{n+1} dotato della topologia di Zariski. L'appartenenza di due punti di Y ad un medesimo sottospazio lineare di dimensione 1 di k^{n+1}, contenente il punto 0, definisce in Y una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$. Diciamo spazio proiettivo $P_n(k)$ o P^n di dimensione n su k, l'insieme quoziente $Y/\mathcal{R}$. Per cui se un punto (x) di Y ha le coordinate $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, queste costituiscono un «insieme di coordinate omogenee» per il «punto» di P^n corrispondente di (x) nella proiezione canonica

$$\pi : \ Y \longrightarrow Y/\mathcal{R} = P^n.$$

P^n può inoltre esser munito della topologia quoziente di quella di Y: un sottoinsieme chiuso di P^n è dunque l'immagine mediante π di un cono chiuso di S^{n+1}.

Per immergere ora il nostro S^n in un P^n, si potrà considerare l'insieme $Y = k^{n+1} - \{0\}$ e se $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un punto generico di S^n, iniettare S^n in Y mediante la

$$i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e quindi usare la proiezione canonica π di Y in P^n.

Risulterà che i coni C di dimensione $r+1$ di $S^{n+1} = Y + \{0\}$, con vertice in O, definiranno i chiusi W di dimensione r di P^n, in modo che un insieme di equazioni omogenee per il cono C si dirà « un insieme di equazioni omogenee per W » in P^n.

Da quanto sopra si deduce in particolare che il chiuso di una ipersuperficie V di S^n è rappresentato in P^n dall'equazione omogenea che rappresenta nello S^{n+1} di cui sopra, il cono proiettante V da O, e quindi se $f(X_1, \dots, X_n) = 0$ è l'equazione di grado m di V in S^n, si può ottenere una rappresentazione di V in P^n mediante l'equazione omogenea

$$X_0^m f(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0) = 0.$$

7. Sia ora $A' = k[X_0, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in $X_0 \dots X_n$ su k; se per ogni intero $l \geq 0$ indichiamo con A'_l il sottospazio vettoriale di A' formato dai polinomi omogenei di grado l, ($0 \in A'_l$ per ogni l), si ha:

$$A' = \bigoplus_{l \in N} A'_l$$

ed $A'_p A'_q \subset A'_{p+q}$, cioè A' è un'algebra graduata su k.

Osserviamo che, detta A^0 la totalità dei polinomi omogenei di A', l'applicazione ψ di $A = k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ in A^0 che manda un polinomio $f = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A$ di grado m, nel polinomio $f^0 = X_0^m f(X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0) \in A^0$ è iniettiva, ed indichiamo (riprendendo le notazioni del n^0 5) con σ_i^0 l'elemento $(s_i^{01}, s_i^{02}, \dots, s_i^{0h}) \in (A^0)^h$ corrispondente, mediante $\bigoplus_1^h \psi$, dell'elemento $\sigma_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^h) \in A^h$.

Scegliamo ora $\lambda_i^0 = (\lambda_{i,1}^0, \dots, \lambda_{i,h}^0) \in (A^0)^h$ con la condizione che, se $m_{i,j}$ è il grado di s_i^j, fissato un intero m tale che sia $m - m_{i,j} > 0$ per ogni $j = 1, 2, \dots, h$, risulti:

$$\text{grado } \lambda_{i,j}^0 = m - m_{i,j} \qquad (j = 1, 2, \dots, h).$$

Così abbiamo

$$s_i^{0j} \in A^0_{m_{i,j}} \qquad \lambda^0_{i,j} \in A^0_{m-m_{i,j}} \quad \text{e quindi } \lambda_i^0 \sigma_i^0 \in A^0_m .$$

Sia $\{\lambda_i^0 \sigma_i^0\}_{\lambda_i^0}$ l'insieme delle forme

$$\lambda_i^0 \sigma_i^0 = \lambda^0_{i,1} s_i^{01} + \lambda^0_{i,2} s_i^{02} + \dots + \lambda^0_{i,h} s_i^{0h} \tag{4}$$

di A^0_m, che si ottengono per tutti i $\lambda_i^0 = (\lambda^0_{i,1}, \lambda^0_{i,2}, \dots, \lambda^0_{i,h})$ di $(A^0)^h$, scelti come ora detto; queste forme $\lambda_i^0 \sigma_i^0$ si possono pensare come espressioni del tipo: $\sum_t \mu_t F_t(X)$, con $\mu_t \in k$ e gli $F_t(X) \in A^0_m$ linearmente indipendenti sopra k.

8. Sia ora (x) un punto generico di P^n su k, e supponiamo d'ora in poi $n > 1$. Con le forme (4) del n^0 prec., considerate in (x), si può definire un sottospazio vettoriale $L^{(m)}$ del corpo delle funzioni su P^n, il quale è di dimensione finita, e quindi i divisori (di zero) delle funzioni $\lambda_i^0 \sigma_i^0$ costituiscono un sistema lineare $\Lambda_i^{(m)}$ (« definito da $L^{(m)}$ ») ([11] pag. 270).

Dimostriamo che vale il seguente:

Teorema 1: *Il divisore generico del sistema lineare $\Lambda_i^{(m)}$, non è composto di varietà appartenenti ad un sistema algebrico di dimensione* 1 *ed indice* 1.

(Con la terminologia del caso classico: $\Lambda_i^{(m)}$ non è composto con un «*fascio*»). Infatti al n^0 5 abbiamo osservato che $\sigma_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^h) \in A^h$ è diverso da zero qualunque sia i, $1 \leq i \leq r$, e perciò qualche polinomio $s_i^j \in A$ non è nullo, e di conseguenza neanche s_i^{0j}; sia per esempio s_i^{01} diverso dal polinomio nullo. Allora $\Lambda_i^{(m)}$ contiene il sistema lineare Λ', dei divisori di tutte le funzioni dell'insieme $\{\lambda^0_{i,1} \; s_i^{01}\}_{\lambda^0_{i,1} \in A^0_{m-m_{i,1}}}$, cioè di tutti i divisori positivi di grado m di P^n che, hanno div (s_i^{01}) come componente fissa. Prescindendo da questa componente, da Λ' si ottiene un sistema lineare Λ, non ridotto a $\{0\}$, il quale non è certo composto con un sistema algebrico di dimensione 1, e indice 1, e quindi non lo è neanche Λ'.

(Infatti nelle nostre ipotesi, $n > 1$ ed $m - m_{i,1} > 0$, è dim. $\Lambda > 1$, ed il grado di trascendenza del corpo $\Omega(L^m)$, generato da L^m sopra Ω, è maggiore di 1 su Ω ([2] pag. 33)).

Da ciò segue che il sistema lineare $\Lambda_i^{(m)}$ verifica il teorema enunciato come volevasi.

9. Osserviamo che se $L_k^{(m)}$ è lo spazio vettoriale su k di definizione per $\Lambda_i^{(m)}$ e se p è la caratteristica di k, nelle nostre ipotesi esiste qualche elemento di $L_k^{(m)}$ che non è potenza p-esima di un elemento di $k(x)$, cioè $k(L_k^{(m)})$ non è contenuto in $\{k(x)\}^p$; è dunque valido per $\Lambda_i^{(m)}$, ([9] e [1]), il *teorema di* BERTINI :

« *Se un sistema lineare privo di componenti fisse, non è composto con un «fascio algebrico», l'elemento generico del sistema lineare è assolutamente irriducibile, purchè non sia* $k(L_k^{(m)}) \subset \{k(x)\}^p$».

Perciò visto anche il teorema 1 del n^0 precedente, si può qui affermare che :

Il sistema lineare $\Lambda_i^{(m)}$, *privato delle eventuali componenti fisse, ha il divisore generico irriducibile.*

Ricordiamo inoltre che un sistema lineare vien detto *riducibile su* k se ogni elemento del sistema è riducibile k.

10. Torniamo ora al modulo M ed alla (3) del n^0 5 :

$$(s \in M) \Longleftrightarrow s = (\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \dots, \lambda\sigma_r) \quad \lambda \in A^h.$$

Se $s^j = (s_1^j, s_2^j, \dots, s_r^j)$ è uno dei generatori di M, cioè una riga della matrice (2) del n^0 5, in conformità con le notazioni del n^0 7, operando in P^n, pensiamo dapprima le s_i^{0j} $(i = 1, 2, \dots, r)$ moltiplicate ciascuna per la minima potenza di X_0 occorrente perchè risultino tutte dello stesso grado m_j, (il polinomio nullo appartiene ad $\overset{0}{A}_m$ per qualunque m), indichiamo con $s_i'^j$ le forme così ottenute e sia $s'^j = (s_1'^j, \dots, s_r'^j)$.

Se $\overline{m}$ è il più grande degli m_j $(j = 1, 2, \dots, h)$, scelto un $m > \overline{m}$, consideriamo in $(A^0)^h$ tutti i $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_h')$ in cui il grado di λ_j' sia $m - m_j$, se m_j è il grado di $s_i'^j$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, cioè $\lambda_j' \in \overset{0}{A}_{m-m_j}$.

Fissato m, al variare di λ' in $(A^0)^h$, con la condizione detta, gli elementi di M del tipo

$$(5) \qquad s' = \lambda'_1 s'^1 + \lambda'_2 s'^2 + \dots + \lambda'_h s'^h = (\lambda' \sigma'_1, \lambda' \sigma'_2, \dots, \lambda' \sigma'_r)$$

considerati in un punto generico (x) di P^n su k, hanno allora le componenti $\lambda' \sigma'_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ che descrivono (v. n^0 8) r sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ di divisori tutti dello stesso grado m.

11. Diciamo chiuso $H(s)$ in S^n di un elemento $s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in M$, l'insieme algebrico sopra k definito da

$$s_1 = s_2 = \dots = s_r = 0$$

e, quindi, il chiuso di un elemento del tipo $s' = (\lambda' \sigma'_1, \lambda' \sigma'_2, \dots, \lambda' \sigma'_r)$ sarà determinato, (nelle coordinate omogenee di P^n), da

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda' \sigma'_1 \equiv \lambda'_1 s'^1_1 + \lambda'_2 s'^2_1 + \dots + \lambda'_h s'^h_1 = 0 \\ \lambda' \sigma'_2 \equiv \lambda'_1 s'^1_2 + \lambda'_2 s'^2_2 + \dots + \lambda'_h s'^h_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda' \sigma'_r \equiv \lambda'_1 s'^1_r + \lambda'_2 s'^2_r + \dots + \lambda'_h s'^h_r = 0. \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 2. *Se $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, con $n > 1$, è un anello di polinomi sopra un corpo k algebricamente chiuso, per ogni A-modulo M di tipo finito, privo di torsione e rango $r > 1$, esiste un monomorfismo*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} A^r$$

tale che $i(M)$ possiede qualche elemento s il cui chiuso ha le componenti di codimensione minima maggiore di 1 in S^n, (cioè di dimensione al più $n-2$). Per il rango 1 la proprietà è ancora verificata se M è libero.

Infatti:

Se il teorema non è già verificato dall'iniezione (1) del n^0 5, finora considerata, allora per ogni possibile m, e per qualunque scelta dei $\lambda'_j \in \overset{0}{A}_{m-m_j} (j = 1, 2, \ldots, h)$, dobbiamo avere, nelle (6):

$$\lambda' \sigma'_i \equiv \psi_{\lambda'} \cdot \mu_{i,\lambda'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{7}$$

dove $\psi_{\lambda'}$, massimo fattore indipendente da i, è di grado > 0. Cioè tutte le componenti di ogni elemento di M del tipo (5), hanno un fattore comune di grado positivo, che dà per siffatto elemento il divisore dello spazio appartenente al suo chiuso.

In tal caso si presenta una delle seguenti alternative:

a) Qualcuno dei sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ è non riducibile, e allora per l'ipotesi che nelle (7) sia grado $(\psi_{\lambda'}) > 0$, sarà generalmente $\mu_{i,\lambda'} \in k$ e, di conseguenza, essendo per un fissato m, tutte le forme $\lambda' \sigma'_1, \ldots, \lambda' \sigma'_r$ dello stesso grado, sarà anche per ogni i $(1 \leq i \leq r)$, $\mu_{i,\lambda'} \in k$ e $\Lambda_i^{(m)}$ non riducibile;

ovvero:

b) Per ogni m possibile e, (per quanto detto in a)), per ogni i, $\Lambda_i^{(m)}$ è riducibile, ma allora per il teorema di Bertini, visto il teorema 1 del n^0 8, i $\Lambda_i^{(m)}$ ammettono componenti fisse. In questo caso nella decomposizione di $\lambda' \sigma'_i$ in fattori primi (su k), si potranno mettere in evidenza due insiemi di fattori, uno, sia φ_i, che dà le componenti di $\Lambda_i^{(m)}$ definite su k (le quali evidentemente dipenderanno solo dalle s'^j_i, cioè dall'iniezione (1), e quindi saranno indipendenti anche da m), e l'altro $\varphi'_{i,\lambda'}$, che rappresenta un sistema lineare ridotto, associato a $\Lambda_i^{(m)}$.

Notiamo intanto che basta che per qualche m, $\Lambda_i^{(m)}$ sia riducibile, perchè lo siano i $\Lambda_i^{(m)}$ per ogni m, e quindi nel caso a), $\Lambda_i^{(m)}$ è non riducibile anche per ogni m.

Inoltre, nel caso b), se φ_i è fattore di $\psi_{\lambda'}$, esso è indipendente anche da i, indichiamolo con φ, e anzi poichè dipende dalle s'^j_i, ogni elemento s di M, può scriversi come segue

$$s = \varphi \cdot \bar{s},$$

cioè $M \subset \varphi \cdot A^r$, e l'omomorfismo

$$s \longrightarrow \bar{s} \tag{8}$$

individua un sottomodulo di A^r isomorfo ad M, per il quale, o il teorema è verificato, oppure ci si trova nel caso a).

Se invece, ancora nel caso b), φ_i è fattore di $\mu_{i,\lambda'}$, cioè $\mu_{i,\lambda'} = \varphi_i \cdot \mu'_{i,\lambda'}$, allora $\psi_{\lambda'} \cdot \mu'_{i,\lambda'}$ è generalmente irriducibile e per le considerazioni già fatte in a), $\mu'_{i,\lambda'} \in k$, e perciò qui è $\mu'_{i,\lambda'} = 1$; e, poichè come già detto, φ_i dipende solo dalle $s_i'^j$ e quindi compare nelle i-esime componenti di tutti gli elementi di M, e non soltanto di quelli del tipo (5), risulta

$$M \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \varphi_i A \subset A^r,$$

Ne segue che l'omomorfismo

$$(9) \qquad s \equiv \psi_{\lambda'} \cdot (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r) \longrightarrow \bar{s} \equiv \psi_{\lambda'} \cdot (1, 1, \dots, 1)$$

individua un sottomodulo di A^r isomorfo ad M.

Il possibile impiego degli omomorfismi (8) e (9), ci permette comunque (sia nel caso a) che nel caso b)), di considerare un'iniezione i di M in A^r, tale che, se il teorema voluto non è per essa verificato, allora ogni elemento s di M ha immagine $i(s) = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ in A^r con componenti tutte eguali $s_1 = s_2 = \dots = s_r$. Ma se ciò accade esiste anche un'iniezione i' di M in A^1, ed M risulta di rango 1, e in questo caso se $V(i(M))$ era un divisore di S^n, è $i'(M) \simeq A$ ed il teorema è ancora verificato (dalla sezione unitaria di A).

Riassumendo, quando M è di rango $r > 1$, dalla dimostrazione del teorema (2), segue che, se tutte le componenti $\lambda'\ \sigma'_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ di ogni elemento di M del tipo (5) hanno un fattore comune $\psi_{\lambda'}$ di grado positivo, questo fattore è indipendente (oltre che da i anche) da λ' e compare in ogni elemento s di M, cioè per ogni $s \in M$ è

$$s = \varphi \bar{s},$$

e il sottomodulo di A^r isomorfo ad M ottenuto mediante l'omomorfismo

$$s \longrightarrow \bar{s}$$

rende vera l'affermazione enunciata.

Insieme con il teorema 2, qui sopra dimostrato, vale anche ovviamente (n^0 3) il seguente

TEOREMA 2'. *Se $\mathcal{M}$ è un fascio algebrico coerente e liscio di rango $r > 1$, sulla varietà affine $V = S^n$, $(n > 1)$ esiste sempre una iniezione*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^r_{S^n}$$

tale che $i(\mathcal{M})$ possiede qualche sezione con il chiuso di codimensione minima maggiore di 1.

Siffatta propietà vale anche per il rango 1 se il chiuso degli zeri di $\Gamma(\mathcal{M})$ (pensato in $\Gamma(\mathcal{A}_V)$) contiene solo forme.

12. Sia ora V una varietà algebrica affine ad algebra fattoriale, di dimensione $d > 1$ dello S^n, immergiamola in P^n, e ricordiamo che, detto $X(\mu)$ il divisore positivo di P^n di equazione $\sum_{i=0}^{n} \mu_i F_i(X)=0$ (con le μ_i trascendenti sopra k e le F_i (X) forme dello stesso grado sopra k), se V non è contenuta in nessun $X(\mu)$, (cioè se (x) è un punto generico di V, le $F_i(x)$ siano linearmente indipendenti sopra k), allora il prodotto-intersezione $Y(\mu) = X(\mu) \cdot V$ è definito e dà un ciclo $(d - 1)$-dimensione razionale su $k(\mu)$, il quale è il divisore della funzione $\sum_{i=0}^{n} \mu_i F_i(x)$ su V.

Ne risulta che il sistema lineare di tutti i divisori positivi di P^n di un certo grado m abbastanza grande sega su V un sistema lineare di divisori positivi, il quale non è certamente composto con un sistema algebrico di dimensione 1 e indice 1, e di conseguenza il teorema 1) del n^0 8 rimane ancora valido su V (per m abbastanza grande).

Ne segue poi che nel caso in cui l'anello $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ non sia un anello di polinomi, purchè esso resti a fattorizzazione unica, continua a valere il teorema (2) del n^0 11.

Perciò se la varietà $V = S^n$ del teorema 2' viene sostituita con una varietà V ad algebra fattoriale, per cui un chiuso di condimensione 1 di V rimane sempre intersezione completa di V con una forma dell'ambiente, allora se ogni elemento $s \in M$ ha nel suo chiuso componenti di condimensione 1, vale ancora la decomposizione (7) del n^0 11, con $\psi^{\lambda'} \varepsilon A[V]$ e perciò rimangono valide tutte le considerazioni che costituiscono la dimostrazione del teorema 2.

Possiamo perciò senz'altro effermare che vale il seguente

TEOREMA 3. *Ogni fascio algebrico* $\mathcal{M}$ *coerente e liscio di rango* $r > 1$ *su di una varietà algebrica affine* V *ad algebra fattoriale e di dimensione maggiore di* 1, *è isomorfo ad un sottofascio di* $\mathcal{A}_V^r$ *che ammette sezioni con chiuso di codimensione minima maggiore di* 1 *in* V. *Ciò accade anche se* $r = 1$ *ed il chiuso degli zeri di* $\Gamma(\mathcal{M})$ *contiene solo divisioni di* V.

(Il chiuso di una sezione s risulta essere l'insieme dei punti di V in cui i germi rappresentati dalle componenti di s appartengono simultaneamente all'ideale massimale della fibra di $\mathcal{A}_V$).

13. Ricordiamo ora che ([3] n^0 4), di un fascio $\mathcal{M}$ privo di torsione su una varietà algebrica affine V, si dice che esso « *appartiene alla proprietà di estensione* » ($\mathcal{M} \varepsilon P. E.$), se ogni sezione definita fuori di un chiuso « ammissibile », cioè di cdm > 1 in V, si prolunga a tutta V, cioè è restrizioue di una sezione globale, univocamente determinata ([8] (5.21)) di $\mathcal{M}$ su V.

Ricordiamo inoltre che ([3] teor. 4) se $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono fasci algebrici coerenti e lisci, e se $\mathcal{M} \varepsilon P. E.$, il conucleo dell'omomorfismo

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}$$

è privo di torsione ammissibile, cioè ha il sottofascio di torsione privo di sezioni « concentrate » su chiusi ammissibili.

14. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4. *Sia* V *una varietà algebrica affine a forme intersezione completa, di dimensione maggiore di* 1, *ed* $\mathcal{M}^{(r)}$ *un fascio algebrico coerente e liscio su* V *di rango* $r > 1$. *Allora esiste sempre una sequenza esatta del tipo*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_V \longrightarrow \mathcal{M}^{(r)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(r-1)} \longrightarrow 0$$

di fasci lisci.

Infatti abbiamo visto (n^0 12) che nelle nostre ipotesi $\mathcal{M}^{(r)}$ è isomorfo ad un sottofascio $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{A}_V^r$ che ammette sezioni con chiuso ammissibile.

Sia $s^0 = (s_1^0, s_1^0, \dots, s_r^0)$ una siffatta sezione di $\mathcal{M}'$, e consideriamo l'omomorfismo

$$\mathcal{A}_V \to \mathcal{M}'$$

che si ottiene associando ad $f \in \mathcal{A}_V$ la sezione fs^0 di $\mathcal{M}'$.

Questo omomorfismo è evidentemente iniettivo e così pure quello associato

$$0 \to \mathcal{A}_V \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^{(r)}$$

e poichè $\mathcal{A}_V$ è il fascio degli anelli locali di V, e quindi per l'ipotesi fatta $\Gamma(\mathcal{A}_V)$ è a fattorizzazione unica, $\mathcal{A}_V \in P.\,E.$ ([8] (5.22) b)).

Ne segue (n^0 13) che il fascio quoziente $\mathcal{M}^{(r)}/\varphi(\mathcal{A}_V)$ potrebbe avere nel sottofascio di torsione solo sezioni tutte concentrate su chiusi di cdm. 1 di V e nulle altrove. Ma poichè, il chiuso di s^0 è privo di componenti di cdm 1, in $\mathcal{M}^{(r)}$ non esistono sezioni globali che stiano in $\varphi(\mathcal{A}_V)$ fuori di chiusi di cdm. 1 e non su tutta V.

Infatti o $f \in \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ e allora $fs^0 \in \Gamma(V, \mathcal{M}^{(r)})$ ed $fs^0 \in \varphi(\mathcal{A}_V)$ su tutta V, ovvero, poichè $\mathcal{A}_V \in P.E.$, f è definita fuori di un chiuso di cdm. 1 di V, ma allora poichè s^0 ha il chiuso ammissibile, la sezione fs^0 di $\mathcal{M}^{(r)}$ è definita solo fuori di un chiuso di cdm. 1 in V. Dovrà dunque essere :

$$t(\mathcal{M}^{(r)}/\varphi(\mathcal{A}_V) = 0.$$

D'altra parte il conucleo di φ ha rango $r - 1$, dunque la tesi del teorema è verificata, come volevasi, dalla sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{A}_V \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r)}/\varphi(\mathcal{A}_V) \to 0.$$

15. Il risultato precedente può esser completato come segue :

TEOREMA 5. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r > 1$, coerente e liscio sulla varietà algebrica affine V ad algebra fattoriale di dimensione maggiore di 1, sussistono $r - 1$ sequenze esatte di fasci lisci* *del tipo*

$$(10) \qquad 0 \to \mathcal{A}_V^h \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-h)} \to 0 \qquad 1 \leq h \leq r-1.$$

Infatti, procedendo per induzione su h, osserviamo anzitutto che per $h = 1$ l'esistenza della prima delle sequenze qui volute, è provata dalla costruzione fatta nella dimostrazione del teorema 4.

Supponiamo allora che, nelle nostre ipotesi, esista una sequenza esatta di fasci lisci, del tipo

$$0 \to \mathcal{A}_V^t \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-t)} \to 0$$

con $h = t < r-1$, e proviamo l'esistenza di una sequenza analoga con $h = t + 1 \leq r - 1$.

Allo scopo consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_V^t \arrow[r, "l_1"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{A}_V^{t+1} \arrow[r, "l_2"] & \mathcal{A}_V \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_V^t \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{(r)} \arrow[r, "g"] & \mathcal{M}^{(r-t)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & \mathcal{M}^{(r-t-1)} \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

nel quale l_1 ed l_2 sono gli omomorfismi canonici della somma diretta, la seconda riga è esatta per l'ipotosi induttiva e l'ultima colonna è esatta per il teorema 4.

Poichè $\mathcal{A}_V$ è proiettivo e g è suriettivo, esiste un isomorfismo m di $\mathcal{A}_V$ in $\mathcal{M}^{(r)}$ (tale che $g \cdot m = j$) e allora, essendo l_2 suriettivo, $f = m \cdot l_2$ è un omomorfismo di $\mathcal{A}_V^{t+1}$ in $\mathcal{M}^{(r)}$, il quale, poichè i e j sono iniettivi, risulta anch'esso iniettivo per il « *lemma dei* 5 » ([5] I, (1.3.11)).

Il diagramma precedente si può quindi completare nel seguente diagramma commutativo ([5] I, (1.3.10)

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_V^t \arrow[r, "l_1"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{A}_V^{t+1} \arrow[r, "l_2"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{A}_V \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_V^t \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{(r)} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{(r-t)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & Cn(f) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{(r-t-1)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

dove g^* è l'omomorfismo indotto da g, e la colonna centrale di questo diagramma è la sequenza esatta cercata ($Cn(f) = Ker(f)$ è liscio di rango $r - t - 1$); così il teorema è completamente dimostrato.

16. Per il teorema del n^0 precedente abbiamo dunque in particolare, nelle nostre ipotesi, una sequenza esatta

$$
0 \to \mathcal{A}_V^{r-1} \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{J} \to 0 \tag{11}
$$

con $\mathcal{J}$ fascio d'ideali su V, e si può affermare (v. anche [4] prop. 1), che vale il

Teorema 6. *Nelle ipotesi del teorema 5, il chiuso del fascio $\mathcal{M}^{(r)}$ è contenuto nel chiuso di $\mathcal{J}$.*

Infatti localizzando la sequenza (11) sui punti di V, si hanno le sequenze esatte

$$
0 \to \mathcal{A}_{V,x}^{r-1} \to \mathcal{M}_x^{(r)} \to \mathcal{J}_x \to 0
$$

le quali in ogni punto in cui la fibra $\mathcal{J}_x$ di $\mathcal{J}$ è libera, sono spezzanti e dunque in quel punto è libera anche la fibra $\mathcal{M}_x^{(r)}$ di $\mathcal{M}^{(r)}$, come volevasi.

Più in generale, anzi, in ognuna delle sequenze (10) del n^0 15:

$$
0 \to \mathcal{A}_V^h \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-h)} \to 0 \qquad 1 \leq h \leq r - 1,
$$

il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ è contenuto nel chiuso di $\mathcal{M}^{(r-h)}$, per ogni h.

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. Akizuki, *Theorems of Bertini on linear systems,* J. Math. Soc. Japan, vol. 3 n⁰ 1, pp. 170-180, (1951).

[2] M. Baldassarri, *Algebraic varieties* Ergeb. der Math., Springer-Verlag, Berlin, (1956).

[3] M. Baldassarri, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci,* Atti del Conv. Internaz. di geometria algebrica di Torino del 1961.

[4] Baldassarri-Ghezzo, *Sulle localizzazioni di ideali e moduli di tipo finito privi di torsione.* (*Proprietà del chiuso di un fascio ...*), Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, (1967).

[5] S. Baldassarri-Ghezzo, C. Margaglio, T. Millevoi, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica,* Ed. Cremonese, Roma, (1967).

[6] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra,* Princeton Univ. Press, (1956).

[7] S. Lang, *Introduction to algebraic geometry,* Tracts in Math. 5, Intersc. Publ. Inc., New York, (1958).

[8] C. Margaglio, *Anillos que satisfacen la propriedad de extension,* Padova-Curmama (1966-67).

[9] T. Matsusaka, *The theorem of Bertini on linear systems in modular fields,* Mem. Coll. of Sci., Univ. Kŷoto, Ser. A, XXVI, pp. 51-62, (1950).

[10] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents,* Ann. of Math., vol 61, n⁰ 2. pp. 197-278, (1955).

[11] A. Weil, *Foundations of algebraic geometry,* Amer. Math. Soc., Coll. Publ., XXIX, (1962).

[12] O. Zariski, *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini,* Trans. Amer. Math Soc., vol. 50, pp. 48-70, (1941).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 marzo 1968.