RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO DE FRANCHIS

Sul fluido ideale di riferimento, di un certo tipo generale, rispetto a cui è minima l'energia cinetica relativa di un dato sistema materiale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 65-71

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__65_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL FLUIDO IDEALE DI RIFERIMENTO, DI UN CERTO TIPO GENERALE, RISPETTO A CUI È MINIMA L'ENERGIA CINETICA RELATIVA DI UN DATO SISTEMA MATERIALE

FRANCO DE FRANCHIS *)

1. L'Almansi, sulla base di ricerche dell'Appell, ha determinato lo spazio (mobile) rispetto al quale risulta minima l'energia cinetica di un sistema S.

Nel precedente lavoro [1] ho, tra l'altro, generalizzato questo risultato riferendo il moto di S anche a fluidi ideali animati di moto omografico.

In questa Nota, servendomi di una notevole disuguaglianza stabilita dal Prof. G. Grioli in [2] la quale ne generalizza una del Prof. A. Signorini, considero una classe più vasta di moti di trascinamento e, con riguardo a tale classe, determino quel moto rispetto al quale la forza viva relativa di S risulta minima. Tale moto non è, generalmente, polinomiale, nonostante sia polinomiale l'atto di moto.

Mostro, infine, che il comportamento del baricentro di S risulta variare qualitativamente quando si passi dalla considerazione dei moti di trascinamento omografici a quella di moti di trascinamento di tipo più generale.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico — Università — Palermo.

2. Siano Q_τ ($\tau = 0, 1, \dots, m$) $m + 1$ funzioni delle coordinate x_1, x_2, x_3 e del tempo t, definite per t qualunque e per x_1, x_2, x_3 variabili in un campo chiuso e limitato C_t dipendente da t; siano, inoltre, $m^*_{il} = m^*_{li}$ i coefficienti, indipendenti dalle x, di una forma quadratica delle medesime variabili semidefinita positiva; $\mu(x_1, x_2, x_3, t)$ sia una funzione non negativa in C_t qualunque sia l'istante t. Supponiamo che il sistema delle funzioni $\{\sqrt{\mu}\, Q_\tau\}$ sia, per ogni t, ortonormale in C_t.

Denotiamo con $\gamma_{i\tau}$ ($i = 1, 2, 3$; $\tau = 0, 1, \dots, m + 1$) $3(m + 1)$ funzioni della sola t e con v_i tre fnnzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, t.

Poniamo

$$(1) \qquad \psi = \sum_{i,l=1}^{3} \int_{C_t} m^*_{il}\, \mu \left(v_i - \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{i\tau}\, Q_\tau\right)\left(v_l - \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{l\tau}\, Q_\tau\right) dC_t .$$

Tenendo conto dell'ortonormalità del sistema $\{\sqrt{\mu}\, Q_\tau\}$ può scriversi:

$$(2) \qquad \psi = \sum_{i\,l=1}^{3} \int_{C_t} m^*_{il}\, \mu\, v_i\, v_l\, dC_t + \sum_{i,l=1}^{3} m^*_{il} \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{l\tau}\, (\gamma_{i\tau} - \overline{2\mu\, v_i\, Q_\tau}\; C_t),$$

indicando il soprasegno il valore medio in C_t.

In base all'ipotesi sulle m^*_{il}, risulta allora;

$$(3) \qquad \sum_{i,l=1}^{3} \int_{C_t} m^*_{il}\, \mu v_i\, v_l\, dC_t + \sum_{i,l=1}^{3} m^*_{il} \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{l\tau}\, (\gamma_{i\tau} - \overline{2\mu\, v_i\, Q_\tau}\; C_t) \geq 0.$$

Si attribuiscano alle costanti $\gamma_{i\tau}$ i valori:

$$(4) \qquad \gamma^*_{i\tau} = \overline{\mu\, v_i\, Q_\tau}\; C_t \qquad (i = 1, 2, 3;\ \tau = 0, 1, \dots, m).$$

Essi rendono minima la ψ (pensata come funzione delle γ) comunque si scelgano i coefficienti m^*_{il} della forma quadratica; invero, essendo la ψ semidefinita positiva, le considerate condizioni di minimo per la (2) si scrivono (ad un qualunque istante)

$$(5) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{i\tau}} = 2 \sum_{l=1}^{3} m^*_{il}\, (\gamma_{i\tau} - \overline{\mu\, v_i\, Q_\tau}\; C_t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ \tau = 0, 1, \dots m).$$

Se poi la ψ è *definita positiva*, i valori (4) sono i *soli* ad assicurarne il minimo in quanto, essendo il determinante delle m_{il}^{*} positivo, il sistema (5) implica le (4).

Per $\mu \equiv 1$, le (4) si riducono alle relazioni (17) stabilite dal Prof. Grioli in [2] con un procedimento del quale il precedente costituisce un'immediata generalizzazione.

3. Al fine di generalizzare i suaccennati risultati dell'Almansi, intendiamo che le $x_i\,(i = 1, 2, 3)$ siano le coordinate, in un sistema cartesiano solidale ad uno spazio Σ (per es. inerziale), che considereremo come spazio fisso. Sia S un sistema continuo, occupante all'istante t il campo C_t, di densità $\mu(x_1, x_2, x_3, t)$; infine, sia $\mathcal{F}$ un fluido ideale, che riguarderemo come generalizzazione dello spazio mobile. Potremo, dunque, chiamare di trascinamento il moto di $\mathcal{F}$ rispetto a Σ.

Riteniamo assegnato il moto di S rispetto a Σ e proponiamoci di determinare il moto di $\mathcal{F}$ fra quelli ad atto di moto sempre esprimibile come combinazione lineare delle $Q_n, \ldots, Q_m$ ove m è un intero prefissato, in modo che, ad ogni istante, risulti minima l'energia cinetica relativa $\mathcal{T}^{(r)}$ di S rispetto ad $\mathcal{F}$.

Sia $v_i(x_1, x_2, x_3, t)\,(i = 1, 2, 3)$ l'espressione euleriana dell'atto di moto (assoluto) di S all'istante t e definiamo in C_t un sistema ortonormale di funzioni, secondo quanto si è detto al numero 2. In ogni istante, l'atto di moto di trascinamento può porsi nella forma:

$$v_i^{(r)} = \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{i\tau}\, Q_\tau \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

con le $\gamma_{i\tau}$ funzioni solo di t.

La forza $\mathcal{T}^{(r)}$ relativa ad $\mathcal{F}$ assume allora l'aspetto

$$\mathcal{T}^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} \int_{C_t} \mu \left(v_l - \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{l\tau}\, Q_\tau \right)^2 dC_t . \tag{7}$$

Imponiamo ad $\mathcal{F}$ la condizione di minimizzare l'energia cinetica (7). La ψ coincide con $\mathcal{T}^{(r)}$, ossia la (1) con la (7), quando si faccia

$$m_i^{*} = \frac{1}{2}\,\delta_{il}\,, \tag{8}$$

ove δ_{il} denota il simbolo di Kronecker. In base alla conclusione stabilita al numero precedente, la $\mathcal{T}^{(r)}$ (che è definita positiva) risulta minima soltanto per $\gamma_{i\tau} = \gamma^*_{i\tau}$ [vedi (4)]. Tale condizione, valida ad ogni istante t, determina, attraverso (6), l'atto di moto di trascinamento e quindi, sostanzialmente, il moto di $\mathcal{T}$ [1]).

In particolare, le Q_τ possono essere polinomi; inoltre, per ogni intero $n > 0$, si può determinare m in modo che $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ siano $m+1$ polinomi di grado $\leq n$ costituenti un sistema completo per tali polinomi. In tale caso, per $\gamma_{i\tau} = \gamma^*_{i\tau}$ le (6) forniscono l'atto di moto di trascinamento polinomiale di grado $\leq n$ che minimizza $\mathcal{T}^{(r)}$.

OSSERVAZIONE. Poichè la $\mathcal{T}^{(r)}$ va riguardata come funzione delle variabili *indipendenti* $\gamma_{i\tau}$, per tale indipendenza il minimo di $\mathcal{T}^{(r)}$ implica il minimo di ciascun addendo della somma al secondo membro della (7). Ne segue che la proiezione secondo la giacitura $x_1 x_2$ (o la direzione x_1) dell'atto di moto di trascinamento (rispetto a Σ) minimizzante l'energia cinetica relativa di S, rende minima l'energia cinetica relativa che competerebbe ad S se il suo atto di moto fosse la proiezione dell'atto di moto effettivo sulla stessa giacitura $x_1 x_2$ (o sulla stessa direzione x_1). Tale osservazione è suggerita dall'importante circostanza che i valori (4) minimizzano la (2) comunque si scelgano le m^*_{il}.

4. Possibilità di velocità relativa non nulla del baricentro in corrispondenza all'atto di moto di trascinamento polinomiale che minimizza l'energia cinetica relativa.

In [1] è stato mostrato che, con riguardo a riferimenti animati di moto omografico, è nulla la velocità $v^{(r)}_G$ del baricentro G di S relativa al riferimento omografico che generalizza lo spazio dell'Almansi. Lo stesso non accade, in generale, se l'atto di moto di tranamento è polinomiale di grado $n > 1$.

---

[1]) Trattandosi di fluido di riferimento, la specificazione della configurazione iniziale è inessenziale.

Si consideri, per es., il sistema costituito da 4 punti, aventi la stessa massa m, mobili sull'asse x; ad un certo istante essi occupino le posizioni di ascisse $-2, -1, 1, 2$ sicchè, in tale istante, il baricentro G si trova nell'origine 0.

Siano $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ le componenti secondo l'asse x delle velocità assolute dei punti del sistema e sia:

$$v^{(\tau)} = ax^2 + bx + c = \varphi(x) \tag{9}$$

l'atto di moto di trascinamento.

La forza viva relativa del sistema è allora:

$$\mathcal{T}^{(r)} = \frac{1}{2} m [(v_1 - 4a + 2b - c)^2 + (v_2 - a + b - c)^2 + (v_3 - a - b - c)^2 + (v_4 - 4a - 2b - c)^2]. \tag{10}$$

Il considerato atto di moto di trascinamento minimizza la forza viva relativa se e solo se $\partial \mathcal{T}^{(r)}/\partial a = \partial \mathcal{T}^{(r)}/\partial b = \partial \mathcal{T}^{(r)}/\partial c = 0$.

L'ultima di queste relazioni si esplicita in

$$4v_G = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 10a + 4c, \tag{11}$$

onde

$$v_G^{(r)} = v_G - \varphi(0) = \frac{5}{2} a. \tag{12}$$

Dunque $v_G^{(r)}$ è nulla solo se l'atto di moto di trascinamento (9) è omografico ($a = 0$).

5. Carattere non polinomiale del generico moto di trascinamento minimizzante $\mathcal{T}_{(r)}$.

Abbiamo visto (N. 3) che l'atto di moto di trascinamento minimizzante $\mathcal{T}^{(r)}$ è espresso, stante (4), da

$$v_i^{(\tau)} = \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{i\tau}^{*} Q_\tau \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{6'}$$

Si rappresenti il moto di $\mathcal{F}$ nella forma:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

ove le y sono i valori iniziali delle x:

$$y_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, 0). \tag{14}$$

Allora le equazioni differenziali del moto di $\mathcal{F}$ sono:

$$\frac{\partial \varphi_i(y_1, y_2, y_3, t)}{\partial t} = \sum_{\tau=0}^{m} \gamma_{i\tau}^{*} Q_\tau[\varphi_i(y_1, y_2, y_3, t), t]. \tag{15}$$

A norma delle (15), associate alle (14), le φ_i non sono, in generale, polinomi in y, a meno che sia $n = 1$ [2]). Quindi, a differenza di quanto accade nel caso $n = 1$, per $n > 1$ il moto di $\mathcal{F}$ non è, in generale, esprimibile in termini finiti come polinomio nelle y a coefficienti funzioni della sola t. Nel caso $n = 1$ il moto di trascinamento è, invece, caratterizzabile assegnando come funzioni della sola t un punto Ω appartenente ad $\mathcal{F}$ e tre vettori $b_{(s)}$. È sempre possibile, anzi conviene, scegliere $\Omega \equiv G$. Il precedente esempio (N. 4), mostrando che per $n > 1$ non si può generalmente fare coincidere Ω con G, indica una difficoltà insita nell'accennata questione della determinazione esplicita del moto di trascinamento, difficoltà che si aggiunge a quella relativa alla possibilità di moti di trascinamento non polinomiali.

---

[2]) Posto $\varphi_i(y_1, y_2, y_3, t) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{ih} t^h$, onde $\partial\varphi_i/\partial t = \sum_{h=1}^{\infty} h a_{ih} t^{h-1}$, si sostituiscano le considerate espressioni in (15) e si uguaglino i coefficienti di t^h dei due membri risultanti. È chiaro che, per $n > 1$, ciò equivale alla risoluzione di un complesso sistema algebrico di tipo generico.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. de FRANCHIS, *Qualche generalizzazione connessa con lo spazio dell'Appell,* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, 1967, pp. 104-111.

[2] G. GRIOLI, *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio,* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie IV - Tomo XXXIII - 1952.

[3] A. BRESSAN, *Osservazioni di Cinematica e di Dinamica connesse con lo spazio di energia cinetica minima,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Vol. XIII, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° marzo 1967