RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO SPAGNOLO

Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2° ordine a coefficienti misurabili e limitati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 56-64

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__56_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNA CARATTERIZZAZIONE DEGLI OPERATORI DIFFERENZIALI AUTOAGGIUNTI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI MISURABILI E LIMITATI.

SERGIO SPAGNOLO *)

Sono state più volte date delle caratterizzazioni astratte di carattere generale degli operatori differenziali lineari (vedi ad es. [3], [4]); in questa nota viene caratterizzata una classe particolare di operatori differenziali aventi notevole interesse per la teoria delle equazioni alle derivate parziali (cfr. [1] e [2]), precisamente gli operatori del tipo:

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni reali misurabili e limitate.

Questa ricerca mi è stata proposta dal Prof. E. de Giorgi che ringrazio per gli utili colloqui avuti sull'argomento.

NOTAZIONI. n è un numero intero ≥ 1; $\mathbf{R}^n$ è lo spazio euclideo n-dimensionale.

Se $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ è una n-pla di interi ≥ 0, si pone:

$$|r| = r_1 + \ldots + r_n$$

$$D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r_n}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la matematica del C N.R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore. Pisa.

Per ogni k intero ≥ 0, si considerano gli spazi lineari sul corpo *reale*:

$\mathcal{C}_0^k = \mathcal{C}_0^k(\mathbf{R}^n)$ (risp.: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali su $\mathbf{R}^n$ con derivate di ordine $\leq k$ (risp.: di ogni ordine) continue ed aventi supporto compatto.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ è lo spazio delle distribuzioni reali su $\mathbf{R}^n$.

Per k intero ≥ 1:

$L^k = L^k(\mathbf{R}^n)$ (risp.: $L^\infty = L^\infty(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali misurabili su $\mathbf{R}^n$ aventi la k-ma potenza sommabile (risp.: essenz. limitate).

$$H^1 = H^1(\mathbf{R}^n) = \left\{u \in L^2 : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2 ; j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Tutti questi spazi si intendono dotati delle usuali strutture topologiche.

Una forma bilineare α agente su spazi di distribuzioni si dice *locale* se

$$\alpha(u, v) = 0 \text{ quando } \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \varnothing.$$

Diremo che α è *D-locale* se è verificata la condizione più forte:

$$\alpha(u, v) = 0 \text{ quando } \operatorname{supp}(\operatorname{grad} u) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{grad} v) = \varnothing.$$

L'applicazione

$$(u, v) \sim\!\!\!\rightarrow \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} a_{jj} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \qquad (a_{ij} \in L^\infty)$$

definisce una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$, simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, che è certamente D-locale.

Mostreremo (Teorema 1) che questa è l'espressione più generale di una forma bilineare, continua, simmetrica e D locale su $H^1 \times H^1$, e caratterizzeremo poi (Teorema 2) il caso in cui le matrici $\| a_{ij}(x) \|$ hanno (per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$) spettro contenuto in un comune intervallo $[\lambda_0, \Lambda_0]$ con $\lambda_0 > 0$.

TEOREMA 1. « *Sia* $\alpha : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ *una forma bilineare, continua e simmetrica, tale che* $\alpha(u_1, u_2) = 0$ *quando* $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ *sono tali che* u_1 *è costante in un intorno del supporto di* u_2 .

Allora α *ammette la seguente rappresentazione :*

$$\alpha(u, v) = \sum_{ij}^{n} \int_{\mathbf{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \qquad u, v \in H^1 \tag{1}$$

per certe funzioni $a_{ij} \in L^\infty$ *tali che* $a_{ij} = a_{ji}$ » .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di α a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$: si tratta di una forma bilineare e separatamente continua (che indicheremo ancora α) e pertanto rappresentabile in virtù del *teorema dei nuclei* di Schwartz ([4]) nel modo seguente :

$$\alpha(u, v) = \langle T, u \otimes v \rangle \qquad u, v \in \mathcal{D}$$

dove $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ e $(u \otimes v)(x, y) = u(x) \cdot v(y)$.

Ma la nostra ipotesi su α implica in particolare che $\alpha(u, v) = 0$ quando u e v sono tali che $\operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \varnothing$ e da questo segue facilmente che la distribuzione T ha supporto contenuto nella diagonale Δ di $\mathbf{R}^{2n}$.

Si ha allora, tenendo conto che Δ è un *supporto regolare* ([5], Teor. XXXIV) :

$$T = \Sigma_{pq} D_x^p D_y^q \mu_{pq}$$

dove $\{\mu_{pq}\}$ è una famiglia *loc. finita* (cioè su ogni parte compatta di $\mathbf{R}^{2n}$ si ha $\mu_{pq} \equiv 0$ per $|p| + |q|$ abbastanza grande) di misure aventi supporto in Δ.

Proiettando le μ_{pq} su $\mathbf{R}_x^n$ [1] si arriva all'espressione

$$\alpha(u, v) = \Sigma_{pq} \langle \tilde{\mu}_{pq}, D^p u \cdot D^q v \rangle$$

---

[1]) Se σ è una di tali misure, indicheremo $\tilde{\sigma}$ la sua proiezione, cioè la misura $\mathbf{R}^n$ definita dall'espressione

$$\langle \tilde{\sigma}, w \rangle = \langle \sigma, \tilde{w} \rangle \qquad w \in \mathcal{C}_0^0(\mathbf{R}^n)$$

essendo $\tilde{w}(x, y)$ una qualsiasi funzione continua su $\mathbf{R}^{2n}$ tale che

$$\tilde{w}(x, x) = w(x) \qquad \forall x.$$

e quindi alla

$$\alpha(u, v) = \Sigma_r \langle T_r , D_r u \cdot v \rangle \qquad u, v \in \mathcal{D} \tag{2}$$

dove $\{T_r\}$ è una famiglia loc. finita di distribuzioni su $\mathbf{R}^n$.

Mostreremo ora che la continuità della α, e cioè l'esistenza di una costante $M > 0$ per cui

$$| \alpha(u, v) \leq M \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1} \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{D} \tag{3}$$

implica

$$T_r = 0 \quad \text{per } | r | > 2.$$

In corrispondenza di un'arbitraria $w \in \mathcal{D}$, scegliamo una $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di supp (w), e, per ogni vettore $\eta = (\eta_1 , \dots , \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1$, $\forall\, j$, consideriamo le funzioni

$$\begin{cases} u_\eta(x) = \psi(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle \\ v_\eta(x) = w(x) \cos \langle \eta, x \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_\eta(x) = \psi(x) \cos \langle \eta, x \rangle \\ \tilde{v}_\eta(x) = - w(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle . \end{cases}$$

Si ha allora

$$\| u_\eta \|^2_{H^1} , \quad \| v_\eta \|^2_{H^1} , \quad \| \tilde{u}_\eta \|^2_{H^1} , \quad \| \tilde{v}_\eta \|^2_{H^1} \leq C | \eta |^2$$

(essendo $| \eta |^2 = \langle \eta, \eta \rangle$) dove la costante C dipende solo da w e da ψ.

D'altra parte, osservando che $u_\eta \equiv \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$ e $\tilde{u}_\eta \equiv \cos \langle \eta, x \rangle$ in un intorno di supp (w), si ricava dalla (2):

$$\alpha(u_\eta , v_\eta) + \alpha(\tilde{u}_\eta , \tilde{v}_\eta) = \sum_{| r | \text{ dispari}} (-1)^{\frac{| r | - 1}{2}} \langle T_r , w \rangle \eta^r .$$

La (3) conduce allora alla diseguaglianza, valida per ogni $\eta \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1$,

$$\left| \sum_{| r | \text{ dispari}} (-1)^{\frac{| r | - 1}{2}} \langle T_r , w \rangle \eta^r \right| \leq 2 M C | \eta |^2$$

da cui segue che tutte le parti omogenee di grado > 2 del polinomio nella η che compare al 1^0 membro (la somma è finita perchè la famiglia $\{T_r\}$ è loc. finita) sono identicamente nulle, e quindi:

$$\langle T_r , w \rangle = 0 \qquad \text{per } |r| \text{ dispari} > 2.$$

In modo analogo (scegliendo $u_\eta = \psi \cos \langle \eta, x \rangle$, $v_\eta = w \cos \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{u}_\eta = \psi \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{v}_\eta = w \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle$) si ottiene:

$$\langle T_r , w \rangle = 0 \qquad \text{per } |r| \text{ pari} > 2.$$

Data l'arbitrarietà di w si ha pertanto $T_r = 0$ per $|r| > 2$, cioè:

$$\alpha(u, v) = \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r , D^r u \cdot v \rangle.$$

Utilizzando ora l'ipotesi che α è una forma simmetrica, si ha

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2}(\alpha(u, v) + \alpha(v, u)) = \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r , D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \rangle.$$

Ma essendo:

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \qquad \text{per } |r| = 1$$

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\text{per } r = (0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0, \dots, \underset{(j)}{1}, \dots, 0)$$

si ricava

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} (-1)^{|r|} \langle D^r T_r , u \cdot v \rangle + \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ij} \langle T_{ij} + T_{ji}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle$$

$$= \langle A, u \cdot v \rangle + \sum_1^n{}_{ij} \langle B_{ij} , \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle ,$$

dove A e B_{ij} sono distribuzioni su $\mathbf{R}^n$ e $B_{ij} = B_{ji}$.

Se ora, per ogni $u \in \mathcal{D}$, si sceglie $\tilde{u} \in \mathcal{D}$ in modo che $\tilde{u} \equiv 1$ in un intorno di supp (u), si ottiene $u\tilde{u} = u$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = 0$; ne segue,

per l'ipotesi che α è D-locale, $0 = \alpha(u, \tilde{u}) = \langle A, u \rangle$ e quindi, data l'arbitrarietà di u, :

$$A = 0.$$

Il teorema sarà allora interamente provato se si mostrerà che le B_{ij} sono delle funzioni misurabili ess. limitate su $\mathbf{R}^n$.

Infatti in tal caso l'espressione

$$(u, v) \sim\!\!\!\rightarrow \sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} B_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

definisce manifestamente una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$ che coincide con la α su $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ e quindi su tutto $H^1 \times H^1$.

Resta quindi da provare il seguente

LEMMA. *Sia* $\alpha : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ *un'applicazione bilineare tale che,* $\forall\, u, v \in \mathcal{D}$:

(i) $$\alpha(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle \qquad B_{ij} = B_{ji} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

(ii) $$| \alpha(u, v) | \leq M \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1} .$$

Allora si ha $B_{ij} \in L^\infty \qquad \forall_{i,j}$.

DIMOSTRAZIONE (del Lemma).

In corrispondenza di una $w \in \mathcal{D}$ $(w \neq 0)$ e agli interi $k, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definiamo le funzioni seguenti :

$$w_1(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_4(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\varrho = \dfrac{\| w \|_{H^1}}{\| w \|_{L^2}}$.

Si ottiene allora con facili calcoli:

$$\| w_j \|^2_{H^1} \leq 4 \| w \|^2_{L^2} + \frac{2}{\varrho^2} \| w \|^2_{H^1} = 6 \| w \|^2_{L^2} \qquad j \in \{1,2,3,4\}$$

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_3, w_4) = \langle B_{ks}, w^2 \rangle$$

da cui per la (ii)

$$| \langle B_{ks}, w^2 \rangle | \leq 12 M \| w \|^2_{L^2} = 12 M \| w^2 \|_{L^1}.$$

Si ha in conclusione la maggiorazione seguente:

$$| \langle B_{ks}, \varphi \rangle | \leq C \| \varphi \|_{L^1} \qquad \forall \varphi = w^2 \text{ con } w \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

Ma ogni $u \in \mathcal{D}$ che sia ≥ 0 è limite, in $\mathcal{D}$, di una successione di funzioni del tipo w^2 con $w \in \mathcal{D}$ [scelta invero una $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \geq 0$, che valga 1 in un intorno di supp (u) si ha che $\left\{\left(\psi \cdot \sqrt{u + \frac{1}{j}}\right)^2\right\} \overset{j}{\to} u$]; pertanto la (4) vale per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$ che sono ≥ 0 e quindi anche per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$.

Ciò implica che il funzionale B_{ks} si estende con continuità allo spazio L^1, i. e. $B_{ks} \in L^\infty$.

Facendo variare fra 1 ed n gli interi k, s si ottiene la tesi del Lemma e quindi del Teorema 1.

Osserviamo infine che, nel caso che la forma α sia coercitiva, i coefficienti a_{ij} della rappresentazione (1) si possono ulteriormente precisare.

TEOREMA 2. « *Se α è come nell'enunciato del Teor. 1 e inoltre*:

$$\Lambda_0 \sum_1^n{}_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2} \geq \alpha(u, u) \geq \lambda_0 \sum_1^n{}_j \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2} \qquad \forall u \in \mathcal{D} \ (\lambda_0 > 0) \tag{5}$$

le a_{ij} che compaiono nella rappresentazione (1) *della forma α, sono tali che*

$$\Lambda_0 | \xi |^2 \geq \sum_1^n{}_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 | \xi |^2 \tag{6}$$

per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ ».

DIMOSTRAZIONE: Poichè le *funzioni a scalino* sono dense in L^∞, basta provare il Teorema nel caso particolare che le a_{ij} siano funzioni a scalino.

La (6) equivale al fatto che, per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\| a_{ij}(x) \|$ ha tutti i suoi autovalori compresi fra λ_0 e Λ_0.

Proviamo che essi sono $\geq \lambda_0$, l'altra prova essendo analoga.

Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme S di $\mathbf{R}^n$ di misura non-nulla tale che per ogni $x \in S$ la matrice $\| a_{ij}(x) \|$ ha un autovalore $< \lambda_0$.

Restringendo eventualmente S, possiamo supporre che le funzioni $a_{ij}(x)$ abbiano su S il valore costante $a_{ij}^{(0)}$; indichiamo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di $\| a_{ij}^{(0)} \|$ e supponiamo ad esempio che $\lambda_1 < \lambda_0$.

Non è inoltre restrittivo supporre S compatto.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia S_ε un aperto contenente S e tale che mis $(S_\varepsilon - S) \leq \varepsilon$. Si ottiene allora dalla (5):

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_S a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geq \lambda_0 \sum_{1}^{n}{}_{j} \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx - \varepsilon K \sum_{1}^{n}{}_{j} \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con supp $(u) \subseteq S_\varepsilon$ (la cost. K dipendendo solo dalle a_{ij}).

Eseguendo il cambiamento di coordinate $\mu : x \sim\!\!\!\longrightarrow y = Mx$, dove M è una matrice ortogonale che diagonalizza la $\| a_{ij}^{(0)} \|$, e ponendo $T = \mu(S)$, $T_\varepsilon = \mu(S_\varepsilon)$, tale diseguaglianza diventa:

$$(7) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{j} \lambda_j \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy \geq \lambda_0 \sum_{1}^{n}{}_{j} \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy - \varepsilon K \sum_{1}^{n}{}_{j} \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con supp $(u) \subseteq T_\varepsilon$.

Scelta ora una $w \in \mathcal{D}$ tale che $|w| \leq 1$, $w \equiv 0$ su $\mathbf{R}^n - T_\varepsilon$, $w \equiv 1$ in un intorno di T, applichiamo la (7) alle funzioni

$$u_k(y) = \frac{1}{k} w(y) \operatorname{sen}(k y_1)$$

$$v_k(y) = -\frac{1}{k} w(y) \cos(k y_1).$$

Sommando membro a membro le due diseguaglianze relative allo stesso valore di k, ed osservando che

$$\sum_1^n{}_j \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \right|^2 \right) = w^2 + \frac{1}{k^2} \sum_1^n{}_j \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2$$

si ha:

$$\lambda_1 \operatorname{mis}(T) \geq \lambda_0 \operatorname{mis}(T) - \varepsilon K \left(1 + \frac{1}{k^2} \sum_1^n{}_j \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2 \right).$$

Da ciò, dividendo per mis (T) e passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$, segue

$$\lambda_1 \geq \lambda_0 - \varepsilon K$$

che porta, data l'arbitrarietà di ε, ad una contraddizione con l'ipotesi fatta $\lambda_1 < \lambda_0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE GIORGI, E. « *Sulla differenziabilità e l'analicità degli estremali degli integrali multipli regolari* ». Mem. Acad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25-43.

[2] NASH, J. « *Parabolic equations* ». Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 43 (1957) 754-758.

[3] PEETRE, J. « *Rectification à l'article: Une caractérisation abstraite des operateurs differentiels* ». Math. Scand. Vol. 7 Fasc. 1 (1960) 116-120.

[4] SCHWARTZ, L. « *Espaces de functions différentiables à valeurs vectorielles* ». J. d'Analyse Math. 4 (1954-55) 88-148.

[5] SCHWARTZ, L. « *Théorie des distributions* ». t. 1. Paris, Hermann, 1951.

[Pervenuto alla redazione il 20 marzo 1967].