RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CHIFFI

Teoremi di prolungamento e continuità per correnti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 376-388

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__376_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TEOREMI DI PROLUNGAMENTO E CONTINUITÀ PER CORRENTI

ANTONIO CHIFFI *)

Le correnti sono una generalizzazione del concetto di integrale su una varietà regolare orientata; pertanto ha senso chiedersi se talune questioni, nate nell'ambito di questa teoria, siano proponibili per le correnti.

Abbiamo provato allora a studiare le correnti su forme esterne a coefficienti limitati e continui rispetto a gruppi di variabili separatamente, pervenendo così ad un ampliamento e ad un approfondimento di questioni poste nell'ambito della integrazione su varietà [1]. Si noti che in 2.10 e 2.11 viene volutamente adottato per le correnti un linguaggio proprio delle varietà.

DEFINIZIONE 1.1. Siano n e k due interi con $0 < k < n$; sia $\Lambda(k, n)$ l'insieme di tutte le funzioni λ crescenti definite sui primi k interi e a valori nei primi n interi:

$$\lambda : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Ad ogni tale λ corrisponde una proiezione ortogonale:

$$p^\lambda : R^n \longrightarrow R^k$$

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata Università di Padova.

[1]) Cfr. [St], § 1 a pag. 34.

così definita per $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$:

$$p^\lambda(x) = (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(k)}).$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia L_k la misura esterna di Lebesgue in R^k e sia μ_k la misura esterna definita sui sottoinsiemi di R^n associando ad ogni $I \subset R^n$ il numero reale esteso :

$$\mu_k(I) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k,\, n)} L_k(p^\lambda(I)).$$

Diremo che una funzione reale f definita in R^n è *μ_k-quasi continua* se ad ogni numero reale $\varepsilon > 0$ si può associare un insieme A aperto di misura esterna μ_k minore di ε e tale che la restrizione di f a $R^n - A$ sia continua.

Ricordiamo che [2]) condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f definita in R^n sia μ_k - quasi continua è che essa sia continua separatamente rispetto ad ogni gruppo di $(n - k)$ variabili, cioè che per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k - quasi ogni $y \in R^k$ la restrizione della f all'insieme $[p^\lambda]^{-1}(y)$ sia continua.

DEFINIZIONE 1.3. Seguiamo, per le forme differenziali $\varphi \in E^k(R^n)$ di grado k e di classe ∞ su R^n e per le correnti $T \in E_k(R^n)$, le definizioni e il simbolismo di $[F\,F]$, ad eccezione del simbolo *diesis* (*sharp*) che, per ragioni tipografiche, sarà sostituito da un asterisco $*$.

Diremo per brevità che una forma differenziale φ di grado k su R^n è una *k-forma limitata* [di Baire ; μ_s-quasi continua ; continua] se i coefficienti di φ sono funzioni limitate [di Baire ; μ_s-quasi continue ; continue]. Se la k-forma φ è limitata, la sua massa $M(\varphi)$ è finita.

Si può prolungare la definizione di una corrente T, di massa $M(T)$ finita, alla classe delle k-forme φ di Baire localmente limitate e si ha : $|T(\varphi)| \leq M(T) \cdot M(\varphi)$.

DEFINIZIONE 1.4. Diremo che una corrente $T \in E_k(R^n)$ è *quasi normale* [3]) se ad ogni numero positivo $\varepsilon > 0$ si può associare una corrente normale $Q \in E_k(R^n)$ tale che $M(T - Q) < \varepsilon$.

---

[2]) Cfr. [St], 1.III a pag. 32.

[3]) Cfr. [C], def. 1.2 a pag. 189.

LEMMA 1.5. *Sia* $T \in E_n(R^n)$ *una corrente quasi normale n dimensionale; esiste una funzione reale* ψ, *definita in* R^n *e ivi sommabile e a supporto compatto, tale che* $T = \mathbf{C}\,\psi$. *Viceversa, se* ψ *è una funzione sommabile e a supporto compatto, la corrente* $T = \mathbf{C}\,\psi$ *è quasi normale.*

Esiste, per definizione di corrente quasi normale, una successione (T_h) di correnti normali $T_h \in E_n(R^n)$ tali che

$$\lim_{h \to \infty} M(T_h - T) = 0. \tag{1.1}$$

e ad ogni corrente T_h si può associare [4]) una funzione sommabile e a supporto compatto ψ_h tale che $T_h = \mathbf{C}\,\psi_h$ e si ha, per la (1.1):

$$\lim_{h,\, m \to \infty} \int_{R^n} |\, \psi_h - \psi_m \,|\, dx = 0 \tag{1.2}$$

e si può supporre [5]) che i supporti delle funzioni ψ_h siano contenuti in uno stesso insieme compatto. Dalle (1.1) e (1.2) segue allora che esiste una funzione ψ, sommabile e a supporto compatto, tale che $T = \mathbf{C}\,\psi$.

Viceversa, se ψ è una funzione sommabile e a supporto compatto, esiste una successione di funzioni $(\psi_h)_{h \in N}$ continue con le loro derivate prime in R^n e a supporto compatto, tali che

$$\lim_{h \to \infty} \int_{R^n} |\, \psi_h - \psi \,|\, dx = 0.$$

Posto $T = \mathbf{C}\,\psi$ e $T_h = \mathbf{C}\,\psi_h$, risulta verificata la (1.1) e le funzioni T_h risultano normali perchè è:

$$M(\partial T_h) = \int_{R^n} |\, \operatorname{grad} \psi_h \,|\, dx < \infty.$$

---

[4]) Cfr. [F F], 6.4 a pag. 485.

[5]) Cfr. [C], 1.7 a pag. 190.

LEMMA 1.6. *Se* $T \in E_k(R^n)$ *è quasi normale, per ogni insieme di Borel* B *di misura esterna* μ_k *nulla, la misura* $\| T \|$, *variazione totale di* T, *è nulla.*

Sia B un insieme di Borel con $\mu_k(B) = 0$. Detta $\omega_k \in E^k(R^k)$ la forma differenziale $\omega_k = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$, per ogni $\varphi \in E^k(R^n)$ si può scrivere:

$$\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda(k,\, n)} \varphi_\lambda \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)$$

con $\varphi_\lambda \in E^0(R^n)$; ed anche

$$(T \cap B)(\varphi) = \sum_\lambda (T \cap B)(\varphi_\lambda \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) = \tag{1.3}$$

$$= \sum_\lambda (T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap B)(\varphi_\lambda).$$

Detta A_λ l'immagine inversa dell'insieme $p^\lambda(B)$ secondo l'applicazione p^λ, si ha subito [6])

$$(T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \{[p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda)] \cap p^\lambda(B)\}(\omega_k) \tag{1.4}$$

La corrente $p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda) \in E_k(R^k)$ è quasi normale [7]) e, per il lemma 1.5, esiste la funzione sommabile ψ_λ tale che $p^\lambda_*(T \wedge \varphi_\lambda) = \mathbf{C}\, \psi_\lambda$. Dalla (1.4) segue allora:

$$(T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \int_{p^\lambda(B)} \psi_\lambda \wedge \omega_k = 0$$

da cui:

$$T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap A_\lambda = 0$$

ed anche, essendo $B \subset A_\lambda$:

$$T \wedge p^{\lambda *}(\omega_k) \cap B = 0. \tag{1.5}$$

Dalle (1.3) e (1.5) segue: $\| T \|(B) = 0$.

---

[6]) Cfr. [F F], 2.5 a pag. 465.

[7]) Cfr. [C], 2.8 a pag. 198.

LEMMA 1.7. *Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B con $\mu_k(B) < \delta$ si ha $\| T \|(B) < \varepsilon$.*

Il lemma 1.7 segue subito dal lemma 1.6, ragionando per assurdo.

LEMMA 1.8. Se *$T \in E_k(R^n)$ è quasi normale, la misura $\| T \|$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Hausdorff H^k.*

Infatti se B è un insieme di Borel con $H^k(B) = 0$, si ha pure: $\mu_k(B) = 0$ e, per il lemma 1.6, $\| T \|(B) = 0$.

TEOREMA 1.9. Sia *$T \in E_k(R^n)$ quasi normale; è possibile prolungare in modo unico la definizione della corrente T alle forme μ_k-quasi continue e limitate.*

Se φ è una k-forma μ_k-quasi continua e limitata su R^n, esiste un numero $L > 0$ tale che: $M(\varphi) \leq L$; fissato un intero i, si può determinare un insieme aperto A_i, con $\mu_k(A_i) < 1/i$, tale che la forma φ sia continua in $R^n - A_i$. Sia φ_i una k forma continua su R^n, uguale a φ nell'insieme chiuso $R^n - A_i$, con $M(\varphi_i) \leq L$ [8]). La corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ è definita sulla k-forma continua φ_i e si ha, per ogni coppia di indici i e j:

$$| T(\varphi_i) - T(\varphi_j) | = | [T \cap (A_i \cup A_j)] (\varphi_i - \varphi_j) | \leq 2L \| T \|(A_i \cup A_j).$$

Dal lemma 1.7 segue poi che, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, esiste un intero $m > 0$, tale che per ogni coppia di indici i e j entrambi maggiori di m, si ha:

$$| T(\varphi_i) - T(\varphi_j) | \leq 2L \varepsilon. \tag{1.6}$$

La (1.6) assicura l'esistenza del limite della successione $(T(\varphi_i))_{i \in N}$ e si può porre:

$$T(\varphi) = \lim_{i \to \infty} T(\varphi_i). \tag{1.7}$$

Il limite indicato in (1.7) è poi indipendente dalla particolare successione (φ_i) scelta (e quindi anche dalla particolare successione

---

[8]) Cfr. [M S], a pag. 842.

(A_i) scelta) perchè, se $(\varphi_{1,i})$ e $(\varphi_{2,i})$ sono due tali successioni, la successione :

$$\{T(\varphi_{1,1}), T(\varphi_{2,1}), T(\varphi_{1,2}), T(\varphi_{2,2}), \dots\}$$

risulta pure convergente.

OSSERVAZIONE 1.10. Nelle ipotesi del teorema 1.9, per ogni k-forma φ μ_k-quasi continua e limitata, si ha : $|T(\varphi)| \leq M(T)\, M(\varphi)$.

OSSERVAZIONE 1.11. Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ di massa finita converge debolmente verso la corrente $T \in E_k(R^n)$ e se è : $\sup\{M(T_h) : h = 1, 2 \dots\} < \infty$, allora è noto che T è di massa finita e che per ogni k-forma continua φ si ha :

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi). \tag{1.8}$$

Se invece φ è una k-forma μ_k-quasi continua e limitata, e le correnti T_h e T sono quasi normali, la (1.8) può non valere, come si può vedere con facili esempi. Nel teorema seguente vengono stabilite condizioni sufficienti per la validità della (1.8).

TEOREMA 1.12. *Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti quasi normali $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se le misure $\| T_h \|$ $(h = 1, 2, \dots)$, sono equiassolutamente continue rispetto alla misura k-dimensionale di Hausdorff H^k, allora, per ogni k-forma φ μ_k-quasi continua e limitata, si ha :*

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Fissato il numero $\varepsilon > 0$, determiniamo $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B, con $\mu_k(B) < \sigma$, si abbia (cfr. lemma 1.8): $\| T \|(B) < \varepsilon$ e $\| T_h \|(B) < \varepsilon$ per ogni h.

Sia A_σ un insieme aperto, con $\mu_k(A_\sigma) < \sigma$ e tale che in $R^n - A_\sigma$ la k-forma φ risulti continua [9]). Sia φ_σ una k-forma continua su R^n, uguale a φ in $R^n - A_\sigma$ e tale che, se è : $M(\varphi) \leq L$, risulti

---

[9]) Loc. cit. [8]).

pure $M(\varphi_\sigma) \leq L$. Per l'osservazione 1.11 si potrà determinare un indice h' tale che per $h > h'$ si abbia:

$$| T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma) | < \varepsilon.$$

Con facili calcoli si ottiene allora, per $h > h'$:

$$| T_h(\varphi) - T(\varphi) | \leq | [T_h \cap A_\sigma](\varphi - \varphi_\sigma) | + | T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma) | +$$
$$+ | [T \cap A_\sigma](\varphi_\sigma - \varphi) | \leq 2L \| T_h \| (A_\sigma) + \varepsilon +$$
$$+ 2L \| T \| (A_\sigma) < (4L + 1)\varepsilon$$

come volevasi dimostrare.

§ 2. — In questo paragrafo stabiliremo alcuni risultati sulle sezioni delle correnti quasi normali, i quali ci permetteranno di rendere più espressive le ipotesi contenute nel teorema 1.12.

E' nota [10]) la definizione di *sezione* di una corrente normale; tale definizione si può estendere facilmente alle correnti quasi normali nel modo seguente:

DEFINIZIONE 2.1. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale; s un intero $\leq k$; sia $f: R^n \to R^s$ una funzione localmente lipschitziana; sia $\theta: R^s \to R^1$ una funzione non negativa, nulla al di fuori della sfera $\{z : z \in R^s, | z | \leq 1\}$, con $\theta(z) = \theta(-z)$ e $\int_{R^k} \theta(z)\, dz = 1$; sia $(\theta_h)_{h \in N}$ una successione di funzioni così definite: $\theta_h(z) = h^s \theta(hz)$; sia $\tau_y: R^s \to R^s$, con $y \in R^s$, la traslazione così definita: $\tau_y(z) = \tau(y - z)$; sia, al solito, ω_s la s-forma: $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_s$.

Per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ risulta definita [11]) la corrente quasi normale $f_*(T \wedge \psi) \in E_s(R^s)$; sia $y \in R^s$; se esiste il limite:

$$\lim_{h \to \infty} (-1)^{s(k-s)} [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y) \tag{2.1}$$

---

[10]) Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.
[11]) Cfr. [C], 2.8 a pag. 198

qualunque sia $\psi \in E^{k-s}(R^n)$, se tale limite è indipendente dalla particolare funzione θ, esso si dirà sezione della corrente T con la varietà $f = y$ e si indicherà col simbolo $\langle T, f, y \rangle$.

TEOREMA 2.2. *Sia* $T \in E_k(R^n)$ *quasi normale,* $s \leq k$, e $f : R^n \to R^s$ *localmente lipschitziana; in tali ipotesi per* L_s *- quasi ogni* $y \in R^s$ *esiste la corrente* $\langle T, f, y \rangle$ *ed essa risulta di massa finita.*

Anche in questo caso basta constatare che può essere estesa la dimostrazione dell'esistenza delle sezioni delle correnti normali.

Poniamo, per $g : R^s \to R^1$ continua e non negativa:

$$\nu_f(g) = \sup \{[f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](g) : \psi \in E^{k-s}(R^n), M(\psi) \leq 1\}.$$

Sia D un insieme numerabile di $E^{k-s}(R^n)$, denso rispetto alla massa M; esiste un insieme $N \subset R^s$, di misura L_s nulla, tale che per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in D$ esistono [12]) finite le derivate generali delle misure $f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s$, nonchè la derivata generale della misura ν_f; tali derivate si possono definire nel modo seguente:

$$\lim_{h \to \infty} [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y) = d_\psi(y) \tag{2.2}$$

$$\lim_{h \to \infty} \nu_f(\theta_h \circ \tau_y) = d(y) \tag{2.3}$$

e sono indipendenti dalla particolare funzione θ. Dalla (2.2) e (2.3) segue, con un facile calcolo, che il limite (2.1) esiste per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ e si ha:

$$\langle T, f, y \rangle(\psi) = (-1)^{s(k-s)} d_\psi(y) \tag{2.4}$$

$$M(\langle T, f, y \rangle) \leq d(y). \tag{2.5}$$

COROLLARIO 2.3. *Nelle ipotesi del teorema 2.2 si ha per* L_s*-quasi ogni* $y \in R^s$:

$$\text{supporto } \langle T, f, y \rangle \subset [\text{supporto } T] \cap f^{-1}(y). \tag{2.6}$$

La (2.6) si ottiene considerando il supporto della corrente $S_h(\psi) = [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y)$ e passando poi al limite per $h \to \infty$.

---

[12]) Cfr. [S], cap. IV

COROLLARIO 2.4. *Nelle ipotesi del teorema* 2.1 *si ha:*

$$\nu_f(R^s) = \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle)\, dy. \tag{2.7}$$

Per il lemma 1.5 la misura $f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s$ è assolutamente continua rispetto a L_s; da (2.2) e (2.4) segue, indicando con lo stesso simbolo R^s e la sua funzione caratteristica, per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$:

$$[f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](R^s) = \int_{R^s} \langle T, f, y \rangle(\psi)\, dy. \tag{2.8}$$

Dalla (2.8) segue subito:

$$\nu_f(R^s) \leq \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle)\, dy \tag{2.9}$$

mentre dalle (2.3) e (2.5) segue la disuguaglianza opposta alla (2.9).

COROLLARIO 2.5. *Nelle ipotesi del teorema* 2.2, *per* L_s*-quasi ogni* $y \in R^s$ *la corrente* $\langle T, f, y \rangle$ *è quasi normale.*

Se (T_h) è una successione di correnti normali k dimensionali di R^n tali che:

$$\lim_{h \to \infty} M(T_h - T) = 0$$

dal corollario 2.4 segue che:

$$\lim_{h \to \infty} \int_{R^s} M(\langle T - T_h, f, y \rangle)\, dy = 0$$

ed anche, per L_s-quasi ogni $y \in R^s$ e per una sottosuccessione $(T_{h'})$:

$$\lim_{h' \to \infty} M(\langle T - T_{h'}, f, y \rangle) = 0. \tag{2.10}$$

Dalla (2.10), tenuto conto che le sezioni delle correnti normali sono, per L_s-quasi ogni y, normali [13]), segue quanto asserito.

---

[13]) Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.

DEFINIZIONE 2.6. Diremo che la corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ è una *corrente a sezione δ* se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_{m(\lambda, y)}$ di R^n e gli interi $a_1, \ldots, a_{m(\lambda, y)}$ tali che si abbia:

$$\langle T, p^\lambda, y \rangle = \sum_i a_i \delta_{x_i} \tag{2.11}$$

dove δ_x è la corrente di $E_0(R^n)$ così definita per ogni $\varphi \in E^0(R^n)$:

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x).$$

DEFINIZIONE 2.7. Se $T \in E_k(R^n)$ e $x \in R^n$, ricordiamo che con $\theta^k(\| T \|, x)$ si indica la $\| T \|$-densità k-dimensionale di R^n nel punto x, vale a dire il limite, se esiste:

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\| T \|(\{z : |z - x| < r\})}{\alpha(k) r^k}$$

dove $\alpha(k) = L_k(\{u : u \in R^k, |u| < 1\})$.

LEMMA 2.8. *Una corrente $T \in E_k(R^n)$ rettificabile è una corrente a sezione δ.*

Una corrente rettificabile $T \in E_k(R^n)$ è evidentemente quasi normale, per cui per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ esiste la sezione $\langle T, p^\lambda, y \rangle$ e si ha, per [F] 3.13:

$$M(\langle T, p^\lambda, y \rangle) = \sum_x \theta^k(\| T \|, x) \tag{2.12}$$

dove la somma è fatta rispetto agli x dell'insieme $(p^\lambda)^{-1}(y)$, che risulta certamente finito, perchè la somma indicata è, per tali y, finita. In realtà la (2.12) è stata provata nella ipotesi che T sia rettificabile e normale, cioè intera (cfr. [F F], 8.14); ma una volta che sia stata estesa la definizione di sezione di corrente alle correnti quasi normali, la stessa dimostrazione vale per le correnti soltanto rettificabili.

Per [F] 3.13 si ha pure, sempre per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ e per H^0 quasi ogni (cioè per ogni) $x \in (p^\lambda)^{-1}(y)$:

$$\theta^0(\| \langle T, p^\lambda, y \rangle \|, x) = \theta^k(\| T \|, x). \tag{2.13}$$

Da (2.12) e (2.13) segue che per L_k-quasi ogni $y \in R^k$ vale la (2.11), dove gli a_i sono numeri interi per l'uguaglianza:

$$a_i = \theta^0(\| \langle T, p^\lambda, y \rangle \|, x_i)$$

per la (2.13) e per [F F] 8.16 (1).

TEOREMA 2.9. *Se la successione* $(T_h)_{h \in N}$ *di correnti quasi normali* $T_h \in E_k(R^n)$ *converge debolmente alla corrente quasi normale* $T \in E_k(R^n)$ *e se per ogni* $\lambda \in \Lambda(k, n)$ *gli integrali indefiniti delle funzioni di* $y \in R^k$: $M(\langle T, p^\lambda, y \rangle)$ *sono equiassolutamente continui rispetto a* L_k, *allora, per ogni k-forma* φ, μ_k*-quasi continua e limitata, si ha*:

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Nelle ipotesi poste la (2.7) del corollario 2.4 si può così scrivere per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per ogni h:

$$M(T_h \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) = \int_{R^k} M(\langle T_h, p^\lambda, y \rangle)\, dy.$$

Per ogni insieme di Borel $B \subset R^n$ si ha poi, tenendo presente il corollario 2.3 e ricordando che la corrente $T \cap B$ è quasi normale:

$$M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) = \int_{p^\lambda(B)} M(\langle T_h \cap B, p^\lambda, y \rangle)\, dy.$$

Segue :

$$\| T_h \| (B) = M(T_h \cap B) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda(k,n)} M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda *}(\omega_k)) =$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{p^\lambda(B)} M(\langle T_h \cap B, p^\lambda, y \rangle)\, dy \leq \sum_{\lambda} \int_{p^\lambda(B)} M(\langle T_h, p^\lambda, y \rangle)\, dy$$

e le misure $\| T_h \|$ risultano così equiassolutamente continue rispetto a H^k.

DEFINIZIONE 2.10. Se $T \in E_k(R^n)$ è una corrente rettificabile, chiameremo il numero $\theta^k(\| T \|, x)$ (che, come si è detto, è intero per H^k-quasi ogni $x \in R^n$) *molteplicità del punto* $x \in R^n$ relativamente alla corrente rettificabile T. Poniamo per $\lambda \in \Lambda(k,n)$ e per $y \in R^k$ tale che esista la corrente $\langle T, p^\lambda, y \rangle$:

$$N(T, p^\lambda, y) = M(\langle T, p^\lambda, y \rangle) \tag{2.14}$$

Per il lemma 2.8 e, in particolare, per la (2.12) si può affermare che la funzione di y : $N(T, p^\lambda, y)$ esprime il numero dei punti, ciascuno contatto con la dovuta molteplicità, dell'insieme intersezione tra la varietà lineare $(n-k)$-dimensionale $(p^\lambda)^{-1}(y)$ e la corrente rettificabile T.

COROLLARIO 2.11. *Se la successione* $(T_h)_{h \in N}$ *di correnti rettificabili* $T_h \in E_k(R^n)$ *converge debolmente alla corrente quasi normale* $T \in E_k(R^n)$ *e se per ogni* $\lambda \in \Lambda(k,n)$ *gli integrali indefiniti delle funzioni di* $y \in R^k$: $N(T_h, p^\lambda, y)$ *sono equiassolutamente continui rispetto a* L_k, *allora, per ogni k-forma* φ, μ_k*-quasi continua e limitata, si ha :*

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

L'ipotesi posta è in particolare verificata se le funzioni $N(T_h, p^\lambda, y)$ *sono equilimitate rispetto ad h.*

Segue subito dal teorema 2.9 e dalla (2.14).

BIBLIOGRAFIA

[C] A. CHIFFI: *Correnti quasi normali,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 19 (1965), pp. 185-205.

[F] H. FEDERER: *Some theorems on integral currents,* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965), pp. 43-67.

[F F] H. FEDERER and W. FLEMING: *Normal and integral currents,* Ann. of Math. (2) 72 (1960), pp. 458-520.

[M S] E. J. MAC SHANE: *Extension of range of functions,* Bull. Amer. Math Soc. 40 (1934), pp. 837-842.

[S] S. SAKS: *Theory of the integral,* Warsaw, 1937.

[St] G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in n variabili,* Ricerche Mat. 1 (1952), pp. 27-54.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30-11-67.