RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GH. GHEORGHIEV

Sur les distributions structurales d'un pseudogroupe Lie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 35-46

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__35_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES DISTRIBUTIONS STRUCTURALES D'UN PSEUDOGROUPE LIE

GH. GHEORGHIEV *)

Recemment j'ai exposé à Moscou une extension de la théorie du repère mobile de E. Cartan à l'etude des variétés plongées dans un espace où agit un pseudogroupe continu de transformations et, un peu plus généralement, quand l'espace est doué d'une structure G [3].

Maintenant nous montrerons comment on peut appliquer cette théorie aux problèmes de structure d'un groupe ou pseudogroupe de Lie.

Les problèmes fondamentaux de structure se refèrent à la détermination de diverses représentations d'un pseudogroupe donné et de ses sousgroupes continus, l'étude desquels s'englobe dans l'étude d'une classe de distributions involutives que nous avons nommés structurales.

1. Ou sait que [1-4]: à un pseudogroupe de transformations $\mathcal{G}$ agissant dans l'espace V_n, precisément dans un domaine coordonné $U \subset V_n$, on associe un groupe Lie G, défini par ses formes invariantes $\pi^\alpha(u\,;\,du)$, $\alpha = n+1, \ldots, n+r$ verifiant les équations de structure $d\pi^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\, \pi^\beta \wedge \pi^\gamma$.

Soit: $\omega^i(x, u\,;\,dx)$ $i = 1, \ldots, n$ les formes invariantes du premier prolongement normal $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$; ω^i, $\omega^\alpha(x, u, u_1\,;\,dx, du)$, $\alpha = n+1, \ldots, n+r$ — du deuxieme prolongement normal $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}$ etc.,

*) Indirizzo dell'A.: Seminarul Matematic, Universitatea Jasi (Romania).

verifiant les équations de structure

$$(1)\qquad d\omega^i = \frac{1}{2} C^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k + C^j_{aj}\,\omega^a \wedge \omega^j,$$

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \ldots + C^\alpha_{a_1 i}\,\omega^{a_1} \wedge \omega^i, \ldots$$

où $\omega^a \pmod{\omega^i} = \pi^a$.

Une distribution $\mathcal{D}_p \subset T_x$ où $x\,(x^i) \in U$ est donnée par le système:

$$(2)\qquad \theta^{i'} \equiv \omega^{i'} - A^{i'}_b\,\omega^b = 0,\quad a, b = 1, \ldots, p,\ i', j' = p+1, \ldots, n$$

où $A^{i'}_b\,(x, u)$ sont les composantes d'un objet géometrique $P(A^{i'}_b) \in \mathcal{T}_0$ $\mathcal{T}_0$-étant la réalisation projective de G.

La différentielle extérieure de (2), en tenant compte de (1) nous conduit aux formules:

$$(3)\qquad d\omega^a = \frac{1}{2} \overset{2}{A}{}^a_{bc}\,\omega^b \wedge \omega^c + \overset{1}{A}{}^a_{bj'}\,\omega^b \wedge \theta^{j'} + \frac{1}{2} \overset{0}{A}{}^a_{i'j'}\,\theta^{i'} \wedge \theta^{j'} + \underline{+ \overset{1}{A}{}^a_{ab}\,\omega^a \wedge \omega^b + \overset{0}{A}{}^a_{ai'}\,\omega^a \wedge \theta^{i'}}$$

$$d\theta^{i'} = \frac{1}{2} \overset{3}{B}{}^{i'}_{ab}\,\omega^a \wedge \omega^b + (\overset{2}{B}{}^{i'}_{j'b}\,\theta^{j'} - dA^{i'}_b) \wedge \omega^b + \frac{1}{2} \overset{1}{B}{}^{i'}_{j'k'}\,\theta^{j'} \wedge \theta^{k'} + \underline{+ \overset{2}{B}{}^{i'}_{ab}\,\omega^a \wedge \omega^b + \overset{1}{B}{}^{i'}_{aj'}\,\omega^a \wedge \theta^{j'}}$$

où les coefficients A et B avec trois indices sont des polynômes en $A^{i'}_b$ de degrés indiqués ci dessus; par exemple

$$(4)\qquad B^{i'}_{ab} = C^{i'}_{ab} + C^{i'}_{aj'} - A^{i'}_a\,(C^a_{ab} + C^a_{aj'}\,A^{j'}_b).$$

REMARQUES. 1° Si $A^{i'}_b = 0$, c'est à dire $\theta^{i'} = \omega^{i'}$, alors tous les coefficients A et B de (3) se reduisent aux constantes de structure avec les mêmes indices.

2° Si $\mathcal{G}$ est un groupe Lie les expressions soulignées de (3) s'annulent.

Maintenant, en exprimant que $\mathcal{D}_p$ appartient au voisinage d'ordre zéro de l'espace V_n, on obtient

$$(5)\qquad \delta A^{i'}_b - B^{i'}_{ab}\,\pi^a = 0.$$

Le rôle important revient au rang de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ qui détermine l'ordre du sous groupe $H \subset G$ qui caractérise le voisinage de premier ordre de la distribution $(\mathcal{D}_p)$.

Dans l'étape qui suit, l'équation (2) de $(\mathcal{D}_p)$ est completée par le système prolongé :

$$\begin{aligned} \overline{\theta}^{a'} &\equiv \overline{\omega}^{a'} - A^{a'}_{b}\,\overline{\omega}^{b} = 0, \\ \overline{\theta}^{s_1} &\equiv dJ^{s_1} - B^{s_1}_{a}\,\overline{\omega}^{a} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

où J^{s_1} sont les invariants de premier ordre de $(\mathcal{D}_p)$; etc.

2. Les distributions structurales.

On dit que la distribution $(\mathcal{D}_p)$ du pseudogroupe $\mathcal{G}$ est structurale si :

1. elle est involutive, c'est à dire

$$d\theta^{i'} \pmod{\theta^{j'}} = 0, \quad \text{et} \tag{7}$$

2. invariante, c'est à dire

$$dA^{i'}_{b} \pmod{\theta^{j'}} = 0. \tag{8}$$

De même, tous les prolongements que l'on obtient suivant le processus de récurrence de la méthode du repère mobile satisferont les conditions similaires à (8) ; par exemple, pour le premier prolongement on a : (7′) $d\theta^{a'}$, $d\theta^{s_1} \pmod{\theta} = 0$ et

$$dA^{i'}_{b},\ dB^{s_1}_{a} \pmod{\theta} = 0, \quad \text{etc.} \tag{8'}$$

De (7-8) il résulte

$$\overline{d\theta}^{i'} = \frac{1}{2} B^{i'}_{ab}\,\overline{\omega}^{a} \wedge \overline{\omega}^{b} + B^{i'}_{ab}\,\overline{\omega}^{a} \wedge \overline{\omega}^{b} = 0, \tag{9}$$

$$B^{i'}_{ab}\,\pi^{a} = 0. \tag{10}$$

Les dernières relations nous obligent de considérer separément les cas :

$\pi^a \equiv 0$ — distributions structurales d'un groupe de Lie d'ordre n ; pour le moment, nous l'excluons de nos considérations.

$\pi^a \not\equiv 0$ — le cas des distributions structurales d'un groupe ou d'un pseudogroupe Lie de transformations.

Alors (10) définit un sousgroupe $H \subset G$ et le système (9) donne les conditions d'intégrabilité qui peuvent limiter le domaine $\Delta \subset \mathcal{T}_0$, les points duquel déterminent les diverses distributions structurales $(\mathcal{D}_p)$.

Le processus de récurrence de la méthode du rèpere mobile permet de nous prononcer si la distribution (2) est structurale et aussi de déterminer ses invariants caractéristiques de divers ordres. Si $\mathcal{G}$ est un groupe fini, c'est à dire V_n est un espace Klein, alors le processus de détermination de toutes distributions structurales $(\mathcal{D}_p)$ pour $p = n - s, \ldots, s$ est fini.

Si dans une étape de ce processus on arrivera à un système de forme (10) pour lequel le rang de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ est zéro, alors $H = G$ et celle distribution s'appelle normale.

3. Les distributions normales.

Cette classe des distributions $(\mathcal{D}_p)$ correspond à des points $P(A^{i'}_b)$ qui appartient à des variétés algebriques irréductibles $M_\sigma \subset \mathcal{T}_0$ d'équations :

$$B^{i'}_{ab} = B^{i'}_{ab} = 0.$$

Considérons l'espace W_{n-p} des intégrales premieres indépendents $(\xi^{i'})$ du système (2). Pour notre distribution on a evidemment $A^{i'}_b(\xi^{j'})$, d'où resulte que tous les coefficients $A^{i'}_b$ sont constants sur une variété intégrale V_p du (2).

Les distributions normales repondent au problème: déterminer un pseudogroupe $\widetilde{\mathcal{G}}$ le prolongement duquel soit le pseudogroupe donné $\mathcal{G}$. W_{n-p} est précisement l'espace sur lequel agit le pseudogroupe $\widetilde{\mathcal{G}}$ défini par ses formes invariants $\theta^{i'}$ et par les équations

de structure

$$(11) \qquad d\theta^{i'} = \frac{1}{2} B^{i'}_{j'k'}\, \theta^{j'} \wedge \theta^{k'} + B^{i'}_{aj'}\, \omega^a \wedge \theta^{j'} + B^{i'}_{aj'}\, \omega^a \wedge \theta^{j'}.$$

Si un des prolongements normaux $\widetilde{\mathcal{G}}_1, \widetilde{\mathcal{G}}_2, \ldots$ contient une variété homéomorphe à l'espace V_n, $\mathcal{G}$ et $\widetilde{\mathcal{G}}$ seront alors isomorphes. En effet, à la transformation identique $\widetilde{I}$ du $\widetilde{\mathcal{G}}$ correspondreront $\widetilde{I}_1$, $\widetilde{I}_2$ — les transformations identiques de ses prolongements normaux; d'ici il suit que $\widetilde{I} \to I$ du groupe donné $\mathcal{G}$ qui agit sur V_n. En cas contraire, $\mathcal{G}$ est homomorphe avec $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Sur une variété intégrale V_p de la distribution normale on a:

$$(12) \qquad d\bar{\omega}^a = \frac{1}{2} A^a_{bc}\, \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^c + A^a_{ab}\, \bar{\omega}^a \wedge \bar{\omega}^b$$

avec tous les coefficients des constantes. Si $[A^a_{ab}]$ est une matrice involutive, sur V_p agit un pseudogroupe g défini par les équations de structure (12); son groupe structural sera G ou un de ses sous-groupes selon le rang de la matrice $[A^a_{ab}]$.

Pour déterminer le groupe structural $\widetilde{G}$ de $\widetilde{\mathcal{G}}$, on peut utiliser le système de coordonées en $\mathcal{T}_0$ de l'origine en $P \in M_\sigma$.

Nous considérerons la restriction sur V_p du premier prolongement normal $\mathcal{G}_1$, de $\mathcal{G}$ que l'on désigne par $\widetilde{g}_1$. En utilisant (1) (mod $\theta^{i'}$) on obtient:

$$d\bar{\omega}^a = \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^c + C^a_{ab}\, \bar{\omega}^a \wedge \bar{\omega}^b,$$

(13)

$$d\bar{\omega}^a = \frac{1}{2} C^a_{\beta\gamma}\, \bar{\omega}^\beta \wedge \bar{\omega}^\gamma + C^a_{\beta a}\, \bar{\omega}^\beta \wedge \bar{\omega}^a + \frac{1}{2} C^a_{ab}\, \bar{\omega}^a \wedge \bar{\omega}^b + C^a_{a_1 a}\, \bar{\omega}^{a_1} \wedge \bar{\omega}^a$$

qui nous montre que $\widetilde{g}_1$ est un prolongement de g et que $\widetilde{G}$ est un sousgroupe de $\widetilde{g}_1$. Après un calcul pas trop difficile on déduit que $C^a_{a_1 a} = 0$, d'où resulte immédiatement que $\widetilde{G} = \widetilde{g}_1$.

CONCLUSION : à chaque distribution normale d'un pseudogroupe $\mathcal{G}$, on associe un pseudogroupe $\widetilde{\mathcal{G}}$, isomorphe ou homomorphe avec $\mathcal{G}$, qui agit sur W_{n-p} et qui est déterminé par $\theta^{i'}$ qui verifient (11); en certaines conditions on peut associé à $\mathcal{G}$ encore un pseudogroupe g, donné par $\overline{\omega}^a$, qui agit sur les variétés intégrales V_p .

4. Application.

Si $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe systatique [1, 2], alors le système Pfaff

$$\frac{\partial\, d\omega^i}{\partial \omega^a} = C^i_{aj}\,\omega^j = 0 \tag{14}$$

est complètement intégrable et le rang ϱ_0 de la matrice $[C^i_{aj}]$ est moindre que n, c'est à dire $\varrho_0 = n - p$ $(p > 0)$.

La distribution $(\mathcal{D}_p)$ définie par (14), est structurale.

Sans restreindre la généralité on peut reduir ses équations à :

$$\omega^{i'} = 0 \tag{14'}$$

ce qui entraîne

$$C^i_{ab} = C^{i'}_{ab} = 0, \tag{15}$$

d'où il résulte que $(\mathcal{D}_p)$ donnée par (14) est normale spéciale qu'on peut appeler distribution systatique du pseudogroupe $\mathcal{G}$. En utilisant les considérations sur les distributions normales il suit qu'à la distribution systatique on associe deux pseudogroupes $\mathcal{G}_{-1}$ et g_1 .

En tenant compte que $C^a_{ab} = 0$, le (13) devient

$$d\overline{\omega}^a = \frac{1}{2}\, C^a_{bc}\, \overline{\omega}^b \wedge \overline{\omega}^c ; \tag{16}$$

il en résulte que g_1 est un groupe de Lie d'ordre p. Donc à chaque pseudogroupe systatique $\mathcal{G}$ on associe en dehors de son groupe structural G (d'ordre r) encore un groupe de Lie g_1 d'ordre p. En ce qui concerne le premier pseudogroupe associé $\mathcal{G}_{-1}$ défini par $\omega^{i'}$, il peut être asystatique ou systatique. Dans le dernier cas on peut

déterminer son premier pseudogroupe associé $\mathcal{G}_{-2}$ etc. Puisque le processus est fini, nous obtenons enfin un pseudogroupe asystatique $\mathcal{G}_{-t}$. Donc à chaque pseudogroupe systatique on peut associer un pseudogroupe asystatique; on pourrait se demander en quel relation se trouvent ces deux pseudogroupes?

5. Les distributions sousgroupales.

Si le rang ϱ de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ est précisement r, alors le système (10) est équivalent à $\pi^a = 0$ et nous avons $H = e$. En ce cas nous dirons que $(\mathcal{D}_p)$ est une distribution sousgroupale. Les formes ω^a deviennent principales; nous avons

$$\overline{\theta}^a = \overline{\omega}^a - A^a_b\ \overline{\omega}^b = 0 \tag{16}$$

d'où

$$\theta^a = \omega^a - A^a_b\,\omega^b - A^a_{i'}\,\theta^{i'}. \tag{16'}$$

En tenant compte de l'involutivité (9), il en resulte que A^a_b vérifieront

$$B^{i'}_{ab} + B^{i'}_{ab}\,A^a_a - B^{i'}_{aa}\,A^a_b = 0. \tag{17}$$

Puisque le rang de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ est r, les (17) auront des solutions, qui imposent quelques relations algébriques aux coefficients B avec trois indices, c'est à dire $P \in M_\sigma \subset \mathcal{F}_0$; les solutions A^a_b de (17) sont fonctions de $P \in M_\sigma$.

REMARQUE. De $H = e$ il s'en suit que, la représentation du groupe G en $\mathcal{F}_0$ est simple transitive; donc $\mathcal{F}_0$ contient des classes de transivité équivalentes à l'espace des paramètres de G. D'ici s'en suit l'inégalité remarquable: $p\,(n-p) \geq r$.

De (3) il resulte que pour les distributions sousgroupales nous avons

$$d\theta^{i'} = \frac{1}{2}\,B^{i'}_{j'k'}\,\theta^{j'} \wedge \theta^{k'} + (B^{i'}_{j'b}\,\theta^{j'} - dA^{i'}_b) \wedge \omega^b + B^{i'}_{aj'}\,\omega^a \wedge \theta^{j'}. \tag{18}$$

Sur les V_p intégrales agit un sousgroupe γ de $\mathcal{G}$ si et seulement si est remplie la condition [1, 2] :

$$d\theta^{i'} (\mathrm{mod}\,(\overline{16'})) = \frac{1}{2} B^{i'}_{j'k'}\, \theta^{j'} \wedge \theta^{k'}$$

qui conduit à

$$B^{i'}_{j'b} - B^{i'}_{aj'} A^a_b + B^{i'}_{ab} A^a_{j'} - A^{i'}_{b,\,j'} = 0 \tag{19}$$

où $dA^{i'}_b = A^{i'}_{b,\,j'}\,\theta^{j'}$ et A^a_b sont des solutions du système (17).

Vu que le rang de la matrice des inconnus $A^a_{j'}$ est r, le système (19) peut admettre des solutions si sont remplies quelques relations qui ont caractère différentiel. Si $\mu_\sigma \subset M_\sigma$ est une variété intégrale qui vérifie ces conditions, alors à chaque point $P \in \mu_\sigma$ correspond un sous groupe γ ; aux autres points du même μ_σ correspondront les sous-groupes conjuguées à γ. Le sousgroupe γ est donné par $\overline{\omega}^a$ et les équations de structure (12).

En partant de (18), on peut associé à γ la distribution

$$\frac{\partial\, d\theta^{i'}}{\partial \omega^b} = dA^{i'}_b - B^{i'}_{j'b}\,\theta^{j'} = 0$$

qui est sousgroupale et définie le sousgroupe $I' \supseteq \gamma$.

Conclusion : l'étude des distributions normales et sousgroupales d'un pseudogroupe $\mathcal{G}$ nous donne la théorie de E. Cartan relative à la structure d'un pseudogroupe continu des transformations [2].

Ayant égard au fait que pour les groupes des transformations toutes les distributions structurales, prolongées un nombre suffisamment de fois, nous donne soit de distributions normales, soit — sousgroupales, il faut essayer si cette propriété reste valable encore pour les pseudogroupes Lie infinis.

En tous les cas l'étude des distributions structurales d'un pseudogroupe $\mathcal{G}$, pour lesquelles le rang ϱ de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ peut avoir les valeurs $\varrho = 0, 1, \ldots, r$ nous donne tous les objets géométriques associés au pseudogrupe $\mathcal{G}$.

6. Le cas exclus $\pi^a \equiv 0$.

Alors $\mathcal{G}$ est groupe Lie d'ordre n, V_n étant son espace des parametres. Une distribution structurale de $\mathcal{G}$ peut être toujours donner par

$$\omega^{i'} = 0 \quad \text{avec la condition (21)} \quad C^{i'}_{ab} = 0. \tag{20}$$

Les équations de structure de groupe $\mathcal{G}$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c + C^a_{bi'}\, \omega^b \wedge \omega^{i'} + \frac{1}{2} C^a_{i'j'}\, \omega^{i'} \wedge \omega^{j'} \\ d\omega^{i'} &= C^{i'}_{j'a}\, \omega^{j'} \wedge \omega^a + \frac{1}{2} C^{i'}_{j'k'}\, \omega^{j'} \wedge \omega^{k'}. \end{aligned} \tag{22}$$

Maintenant la distribution structurale (20) est en même temps normale et sousgroupale, parceque sur sa variété intégrale V_p qui contient le point unité e agit le sousgroupe h défini par (20), pendant que l'espace des intégrales premières indépendentes $(\xi^{i'})$ de (20) est un espace Klein W de dimensions $n - p$, sur lequel agit un groupe de transformations Γ. Par conséquent si $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie, alors à chaque distribution structurale $(\mathcal{D}_p)$ on associe le couple (h, W) où W est un espace Klein et h est un sousgroupe Lie ayant $\bar{\omega}^a$ formes invariantes et (22) (mod (20)) — les équations de structures.

En chaque point $\xi\,(\xi^{i'}) \in W$ nous avons les corepères $\omega^{i'}$, h étant son sousgroupe stationnaire qui agit sur les corepères $\omega^{i'}$.

D'ici il suit, entre autres, que W est une variété analytique douée d'une structure h, c'est à dire $\Gamma = E_0\,(W, h)$.

Associons au couple (h, W) les distributions suivantes

$$1)\ \omega^{i'} = 0,\ \frac{\partial\, d\omega^{i'}}{\partial \omega^{j'}} = 0 \text{ et } 2)\ \frac{\partial\, d\omega^{i'}}{\partial \omega^a} = 0.$$

En utilisant (22) on obtient:

$$\omega^{i'} = 0 \quad C^{i'}_{j'a}\, \bar{\omega}^a = 0 \qquad \text{et} \qquad C^{i'}_{j'a}\, \omega^{j'} = 0. \tag{23} \tag{24}$$

En ayant égard à (21) et aux identités de Jacobi du groupe $\mathcal{G}$, il suit directement que les distributions (23) et (24) sont structurales et par conséquent il leurs corespond les couples (h_1, W_1) et (h_{-1}, W_{-1}).

En utilisant les équations de structure on établie les relations d'ordre

$$(*) \qquad h_{-1} \supseteq h \supseteq h_1 \qquad W_{-1} \subseteq W$$

et le fait que h_1 est un sousgroupe de h qui, de son coté, est sousgroupe invariant de h_{-1}. En procédant similairement, la chaine (*) peut être prolongée dans les deux sens et on obtient par les procédés purement algèbriques la suite bilaterale finie

$$(25) \qquad \mathcal{G} \supseteq h_{-t}, \ldots, h_{-1} \supset h \supset h_1 \supset \ldots \supset h$$

qui exprime évidemment des propriétés structurales du couple (h, W).

En ce qui concerne la partie gauche de la suite (25), on voit que les espaces de Klein correspondants seront $W \supset W_{-1} \supset \ldots \supset \supset W_{-t}$.

Si le processus est arreté, alors nous avons les possibilités

a) $h_{-t} = \mathcal{G}$, alors h_{-t+1} est un sousgroupe invariant de $\mathcal{G}$;

b) $h_{-t} = h_{-t+1}$ alors W_{-t+1} ne contient pas d'autres espaces Klein à groupe fondamental $\mathcal{G}$.

En ce qui concerne la partie droite de la suite (25): $h \supset h_1 \ldots \supset h_s$, elle exprime un processus de recurrence analogue à l'algorithme de la méthode du repère mobile. Si $h_1 = e$, alors W_1 est un espace homogène dont le groupe $\mathcal{G}$ agit effectivement et $W_1 = V_n$. Par conséquent on peut dire que le sousgroupe h, dans ce cas, exprime l'écart d'ordre un de W par rapport à l'espace de Cartan $(\mathcal{G})$.

Si $h_s = e$, alors $W_s = V_n$ et la suite $h \supset h_1 \supset \ldots \supset h_s$ donne la possibilité d'évaluer les écarts jusqu'à l'ordre s de l'espace de Klein W par rapport à l'espace de Cartan du groupe $\mathcal{G}$.

Si $h_s \neq e$ le processus s'arret: alors h_s est un sousgroupe invariant de $\mathcal{G}$ et $W_s = \mathcal{G}/h_s$ est l'espace de Cartan du groupe facteur. Et dans ce cas on détermine les écarts jusqu'à l'ordre s de l'espace W en comparaison avec l'espace de Cartan du groupe facteur.

Donc nous pouvons parler de déformations de diverses ordres d'un espace de Klein, dans le sens de sa déviation par rapport à

l'espace de Cartan du groupe ou du groupe facteur. Ainsi par un processus simple de recurence on obtient la solution du problème des déformations de divers ordres d'un espace Klein.

Remarque finale.

Si $h_s = e$, (ou $h_s \neq e$) alors le groupe $\mathcal{G}$ sera evidemment isomorphe (homomorphe) au groupe de transformations qui agit sur W.

Maintenant, si l'on a deux groupes de transformations Γ sur W et $\widetilde{\Gamma}$ sur $\widetilde{W}$ ayant le même groupe fondamental $\mathcal{G}$, on peut établir pour ses sousgroupes stationnaires h et $\widetilde{h}$ la partie droite de la suite (25), c'est à dire $h \supset h_1 \ldots \supset h$, et $\widetilde{h} \supset h_1 \supset \ldots \supset \widetilde{h}_{\widetilde{s}}$.

Si $h_s = e$ et $\widetilde{h}_{\widetilde{s}} = e$, alors Γ est isomorphe au groupe $\widetilde{\Gamma}$; si $h_s = e$ et $\widetilde{h}_{\widetilde{s}} \neq e$, alors Γ est homomorphe au groupe $\widetilde{\Gamma}$. Pendant que $h_s \neq e$ et $\widetilde{h}_{\widetilde{s}} \neq e$ échappe à l'analyse faite par E. Cartan; ce cas s'impose d'être considéré parceque les deux groupes Γ et $\widetilde{\Gamma}$ ont la même source de leurs transformations: nous dirons que Γ et $\widetilde{\Gamma}$ sont pseudomorphes. Parmi les groupes pseudomorphes on peut distinguer des cathégories selon qu'aux sousgroupes facteurs $\mathcal{G}/h_s$ et $\mathcal{G}/\widetilde{h}_{\widetilde{s}}$ correspondent les espaces Klein W_f à groupe Γ_f et $\widetilde{W}_f$ à groupe $\widetilde{\Gamma}_f$.

Nous dirons que Γ est pseudoïsomorphe à $\widetilde{\Gamma}$ si Γ_f est isomorphe à $\widetilde{\Gamma}_f$, que Γ est pseudohomomorphe à $\widetilde{\Gamma}$ si Γ_f est homomorphe à $\widetilde{\Gamma}_f$ et que Γ est pseudomorphe propre à $\widetilde{\Gamma}$ si Γ_f est pseudomorphe à $\widetilde{\Gamma}_f$.

Le dernier cas à lieu, en particulier, quand $\mathcal{G}/h_s$ et $\mathcal{G}/\widetilde{h}_{\widetilde{s}}$ sont les sousgroupes normaux de $\mathcal{G}$.

On pourrait penser à l'introduction de la notion de pseudomorphisme sur une echelle plus large en commençant avec les pseudogroupes Lie de transformations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMALDI, U. - *Gruppi continui infiniti di trasformazioni II,* Libreria dell'Università di Roma, 1944.

[2] CARTAN, E., - *La structure des groupes infinis. Oeuvres complètes,* Partie II, vol. 2, 1335-1384.

[3] GHEORGHIEV, GH. - *Observatii asupra metodei reperului mobil.* Analele st.ale Univ. Iasi, 1966 (XII), f. 1. 85-118.

[4] SLEBODZINSKI, W. - *Formes extérieures et leurs applications II,* Warszawa, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 gennaio 1967.