RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERGIULIO CORSINI

Sulle potenze di un ideale generato da una A-successione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 190-204

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__190_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLE POTENZE DI UN IDEALE GENERATO DA UNA A-SUCCESSIONE

PIERGIULIO CORSINI *)

1. È ben noto (cfr. ad. es. [2]) che l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees, e l'anello graduato relativi ad un ideale $\mathfrak{a}$ generato da n elemènti $a_1, \ldots, a_n$ di un anello A si possono rappresentare come opportuni quozienti dell'anello di polinomi $A[Z_1, \ldots, Z_n]$ in n indeterminate su A.

In particolare, se φ è l'omomorfismo canonico di $A[Z_1, \ldots, Z_n]$ sull'algebra di Rees $R(\mathfrak{a})$, il nucleo di φ è generato dalle forme (polinomi omogenei nelle Z) che si annullano per $Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n$.

In questo lavoro ci siamo proposti di determinare un sistema minimale di generatori di $\operatorname{Ker}\varphi$, nel caso in cui $\mathfrak{a}$ sia la potenza n-esima (n intero positivo) di un ideale generato da una A-successione $y_1, \ldots, y_s$ di elementi di A, con $s \geq 2$.

Perveniamo al nostro scopo nel n^0 5, dopo aver stabilito varie premesse concernenti gli anelli di polinomi e particolari proprietà relative alle n-ple di numeri interi. Nel n^0 6 concludiamo il lavoro, mostrando che insieme all'algebra di Rees vengono completamente determinate anche l'algebra simmetrica e l'anello graduato associato all'ideale considerato.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del CNR.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

L'autore ringrazia il Prof. P. Salmon per avergli dato utili consigli nella redazione della presente nota.

2. Siano A un anello commutativo con identità, $y_1, y_2, \dots, y_s$, elementi di A costituenti una A-successione [1]) $\mathfrak{m}$ l'ideale da essi generato in A e supponiamo $\mathfrak{m}$ proprio. Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Se F è una forma di $A[X_1, \dots, X_s]$ tale che $F(y_1, \dots, y_s) = 0$, allora $F \in \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$.*

Per la dimostrazione si veda: [3], dimostrazione del teorema 2-1 pag. 33.

COROLLARIO. *Se $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_s^{r_s}$ dove $t_1, t_2, \dots, t_s, r_1, r_2, \dots, r_s$ sono interi ≥ 0, si ha $t_i = r_i$ per $1 \leq i \leq s$, cioè: gli esponenti di ogni monomio unitario negli elementi y_i sono univocamente determinati.*

Sia σ l'omomorfismo di $A[X_1, \dots, X_s]$ su A così definito: $\sigma(a) = a$ se $a \in A$, $\sigma(X_j) = y_j$ se $1 \leq j \leq s$. Posto $M = X_1^{t_1} \dots X_s^{t_s}$, $M' = X_1^{r_1} \dots X_s^{r_s}$ basta provare che: $\sigma(M) = \sigma(M') \Rightarrow M = M'$. Supponiamo infatti $M \neq M'$. Per ogni monomio T di $A[X_1, \dots, X_s]$ denotiamo con ∂T il suo grado totale nelle X_j. Sia $\partial M \geq \partial M'$: esistono allora due monomi P e N tali che $M = PN$, $\partial N = \partial M'$ $\partial P \geq 0$. Posto $Q = \sigma(P) N - M'$, si ha $Q \notin \mathfrak{m} A[X_1, \dots, X_s]$; d'altra parte, poichè $\sigma(M) = \sigma(M')$, si ha anche $\sigma(Q) = 0$ e quindi, per la prop. 1, $Q \in \mathfrak{m} A[X_1, \dots, X_s]$ assurdo. Dunque $M = M'$ c.v.d.

Consideriamo adesso l'ideale $\mathfrak{m}^n = (y_1, \dots, y_s)^n$, di cui vogliamo determinare certe algebre particolari, come abbiamo detto nel n° 1.

Osserviamo che un insieme di generatori di $\mathfrak{m}^n$ è costituito dai « monomi » del tipo $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$ tali che $i_1 + i_2 + \dots + i_s = n$. Sia $B = A[\dots, Z_{i_1 i_2 \dots i_s}, \dots]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A nelle $\binom{n+s-1}{s-1}$ indeterminate $Z_{i_1 \dots i_s}$ indiciate nelle s-uple $(i_1, \dots, i_s)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k = n$ (cioè le indeterminate sono in corrispondenza biunivoca con i generatori fissati di $\mathfrak{m}^n$). Sia $\varphi : B \to A$ l'omomorfismo così definito: $\varphi(a) = a$ se $a \in A$, $\varphi(Z_{i_1 \dots i_s}) = y_1^{i_1} \dots y_s^{i_s}$.

---

[1]) Ricordiamo la seguente ben nota definizione: si dice che s elementi di un anello $A, y_1, y_2 \dots, y_s$ costituiscono una A-successione se si ha $(y_1, \dots, y_{i-1}) : (y_i) = (y_1, \dots, y_{i-1})$ per ogni i, $1 \leq i \leq s$.

Ci proponiamo ora di stabilire, colla successiva prop. 2, una notevole proprietà relativa ai polinomi Φ di B tali che $\varphi(\Phi) = 0$.

Consideriamo il sottoinsieme S di B costituito dai monomi del tipo $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$ ($t_1, \dots, t_s$ interi ≥ 0).

Il corollario alla prop. 1 consente allora di porre la seguente

DEFINIZIONE 1. Se M è un monomio di S e se $\varphi(M) = y_1^{d_1} \dots y_s^{d_s}$, diciamo *peso* di M la s-pla univocamente determinata $(d_1, \dots, d_s)$ e *peso globale* di M l'intero $\sum_{k=1}^{s} d_k$.

DEFINIZIONE 2. Diciamo che due monomi M e M' di S sono *isobari* (risp. *globalmente isobari*) se hanno lo stesso peso (risp. lo stesso peso globale). Dunque se M e M' sono monomi di S, posto $M = y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$, $M' = y_1^{t'_1} y_2^{t'_2} \dots y_s^{t'_s} Z_{j_1^1 \dots j_s^1} \dots Z_{j_1^r \dots j_s^r}$ segue dalle definizioni 1 e 2 che M e M' sono isobari se e solo se $t_u + \sum_{k=1}^{r} i_u^k = t'_u + \sum_{k=1}^{r} j_u^k$ per ogni $u = 1, 2, \dots, s$.

DEFINIZIONE 3. Diciamo che un binomio di B è *isobaro* se è differenza di monomi isobari di S.

LEMMA 1. *Sia M un A-modulo, $m_1, m_2, \dots, m_k$, elementi di M e sia $m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_k m_k$ dove $a_j \in A$. Allora esistono degli elementi $b_1, b_2, \dots, b \in A$ tali che $m = b_1(m_1 - m_2) + b_2(m_2 - m_3) + \dots + b_{k-1}(m_{k-1} - m_k) + b_k m_k$.*

Infatti si ha: $m = a_1 m_1 - a_1 m_2 + a_1 m_2 + a_2 m_2 - (a_1 + a_2) m_3 + (a_1 + a_2) m_3 + a_3 m_3 - (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + \dots - (a_1 + \dots + a_{k-1}) m_k + a_k m_k$ da cui: $m = a_1 (m_1 - m_2) + (a_1 + a_2)(m_2 - m_3) + \dots + (a_1 + \dots + a_{k-1}) \cdot (m_{k-1} - m_k) + (a_1 + \dots + a_k) m_k$.

DEFINIZIONE 4. Siano Φ e Φ' elementi di B. Diciamo che Φ è *equivalente* a Φ', e notiamo $\Phi \sim \Phi'$, se $\Phi - \Phi' \in K$, dove K è il sotto-A-modulo di B generato dai binomi isobari. La relazione $\sim$ è manifestamente una congruenza.

Immediata conseguenza del lemma 1 e della definizione 4 è il

COROLLARIO 1. *Se Φ è combinazione su A di monomi di S isobari $M_1, \dots, M_k$, esiste $c \in A$ tale che $\Phi \backsim cM_k$.*

Nel seguito denoteremo spesso per brevità con (h) le s-uple $(h_1, \dots, h_s)$ con $h_j \geq 0$.

COROLLARIO 2. *Ogni elemento di B è equivalente a una espressione del tipo $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove $d_{(h)} \in A$ e gli $M_{(h)}$ sono monomi di S di peso (h); in particolare Φ è combinazione di monomi di peso distinto.*

Infatti Φ si può decomporre nella somma $\sum_{(h)} \Phi_{(h)}$ dove le $\Phi_{(h)}$ sono combinazioni su A di monomi di S isobari di peso (h).

A ciascuna $\Phi_{(h)}$ si applica il corollario 1, donde l'asserto.

LEMMA 2. *Sia M un monomio di S di grado r nelle Z avente peso $(k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ con $k_v > 0$; sia j un intero tale che $1 \leq \leq j \leq v - 1$. Esiste allora un monomio M'_j, avente peso superiore a quello di M, ma globalmente isobaro a M tale che $y_j M$ e $y_v M'$ sono isobari.*

Sia infatti $M = y_1^{t_1} \dots y_v^{t_v} \cdot N$, dove

$$N = Z_{i_1^1 \dots i_v^1 0 \dots 0} \dots Z_{i_1^r \dots i_v^r 0 \dots 0} .$$

Se $t_v > 0$, basta porre; $M'_j = y_1^{t_1} \dots y_j^{t_j+1} \dots y_v^{t_v-1} N$.

Se $t_v = 0$, da $k_v > 0$ segue l'esistenza di $q\,(1 \leq q \leq r)$ tale che $i_v^q > 0$. Allora si prende per M'_j il monomio che si ottiene da M sostituendo $Z_{i_1^q, \dots, i_v^q, 0, \dots, 0}$ con $Z_{i_1^q, \dots, i_j^q + 1, \dots, i_v^q - 1, 0, \dots, 0}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia Φ un polinomio di B, combinazione a coefficienti in A di monomi di S globalmente isobari, tale che $\varphi(\Phi) = 0$. Allora si ha $\Phi \backsim 0$. Inoltre, se Φ è omogeneo nelle Z, Φ è combinazione di binomi isobari ed omogenei nelle Z.*

Ordiniamo lexicograficamente le s-ple di interi $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ tali che $h_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{s} h_j = q$, dove q è il peso globale dei monomi di

Φ, ponendo $(h_1, \dots, h_s) > (h'_1, \dots, h'_s)$ se esiste un intero p, $1 \leq p < s$, tale che $h_j = h'_j$ se $1 \leq j \leq p - I$, $h_p > h'_p$. Possiamo supporre per il corollario 2 al lemma 1, che sia $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove i monomi $M_{(h)}$ hanno peso (h). Nell'insieme delle s-ple $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ indicanti i monomi di S che compaiono in Φ, sia $(k) = (k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ quella minima (v è il massimo intero nell'insieme degli j tali che $k_j > 0$). Proveremo innanzitutto che $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j v_j$ dove $b_j \in A$.

Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ si ha:

$$d_{(k)}\, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_1^{k_1+1}, y_1^{k_1} y_2^{k_2+1}, \dots, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}).$$

Poichè y_1 e quindi $y_1^{k_1}$ non è divisore dello zero, si può dividere per $y_1^{k_1}$ e si ha:

$$d_{(k)}\, y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_2^{k_2+1}, y_2^{k_2} y_3^{k_3+1}, \dots, y_2^{k_2} y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \bmod y_1 .$$

Ma y_2 (e quindi $y_2^{k_2}$) non è divisore dello zero mod y_1; quindi nella relazione precedente si può dividere per $y_2^{k_2} \pmod{y_1}$ e si ottiene:

$$d_{(k)}\, y^{k_3} \dots y_v^{k_v} \in (y_3^{k_3+1}, y_3 y_4^{k_4+1}, \dots, y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \bmod (y_1, y_2),$$

da cui proseguendo analogamente, si deduce

$$d_{(k)}\, y_v^{k_v} = 0 \bmod (y_1, \dots, y_{v-1})$$

ed infine: $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j$ dove $b_j \in A$.

Per ogni combinazione $Q = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ del tipo sopra considerato, diciamo ordine di Q e lo denotiamo con $\nu(Q)$, l's-pla minima (h) tale che $d_{(h)} \neq 0$. Allora $\nu(\Phi) = (k)$. Proveremo che esiste un polinomio Φ' tale che: $\Phi' \backsim \Phi$, $\nu(\Phi') > \nu(\Phi)$, Φ' è combinazione di monomi globalmente isobari. Infatti, per quanto precede si ha:

$$\Phi = d_{(k)} M_{(k)} + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j M_{(k)} + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)} .$$

Inoltre, in virtù del lemma 2, si può scrivere, per ogni j:

$$y_j M_{(k)} = (y_j M_{(k)} - y_v M'_j) + y_v M'_j$$

dove $y_v M'_j$ è isobaro a $y_j M_{(k)}$.

Dunque, posto $\Phi' = \sum_{j=1}^{v-1} (b_j y_v) M'_j + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)}$, si ha:

$$\Phi \backsim \Phi' \quad \text{e} \quad \nu(\Phi') > \nu(\Phi).$$

Proseguendo in questo modo si ottiene in conclusione che esiste $c \in A$ tale che $\Phi \backsim c M_{q,0,\dots,0}$. Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ segue che $c y_1^q = 0$ da cui, poichè y_1 non divide lo zero, $c = 0$ e quindi $\Phi \backsim 0$.

Inoltre se Φ è una forma nelle Z di grado r, si può supporre che i monomi $M_{(h)}$ siano tutti di grado r nelle Z; dal corso della dimostrazione segue allora anche l'ultima asserzione della proposizione.

3. Ci proponiamo adesso di stabilire, colla seguente proposizione 3, una proprietà di riduzione dei binomi isobari ed omogenei a binomi unitari nelle Z, modulo particolari binomi lineari appartenenti al nucleo di φ.

Siano n, r, interi positivi. Sia J l'insieme costituito dai sistemi di r s-ple non necessariamente distinte di numeri interi ≥ 0:

$$(i_1^1, \dots, i_s^1),\ (i_1^2, \dots, i_s^2), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r)$$

tali che $\sum_{u=1}^{s} i_u^k = n$ per ogni $k = 1, 2, \dots, r$.

Sia $W = \mathbf{N}^s \times J$ (prodotto cartesiano).

Se $T \in W$ chiamiamo *peso* di T, e lo notiamo $P(T)$, l's-upla

$$c_1 + \sum_{k=1}^{r} i_1^k,\ c_2 + \sum_{k=1}^{r} i_2^k, \dots, c_s + \sum_{k=1}^{r} i_s^k$$

e diciamo che due elementi di W sono *isobari* se hanno lo stesso peso. Ogni elemento T di W si spezza in $T = C \times I$ dove $C \in \mathbf{N}^s$ e I è un insieme di r s-ple $(i_1^v, \dots, i_s^v)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k^v = n$ $v = 1, 2, \dots, r$.

Se $T = C \times I$ e $T' = C' \times I'$ sono elementi di W e si ha $C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$, $C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_s)$, poniamo $D(T, T') = \sum_{j=1}^{s} |c_j - c'_j|$.

Sia $T = (c_1, \dots, c_s), (i^1_1, \dots, i^1_s), (i^2_1, \dots, i^2_s), \dots, (i^r_1, \dots, i^r_s)$ un elemento di W tale che, per almeno un h, risulti $c_h > 0$, e siano k, q, tali che $i^q_k > 0$, (k e q esistono certamente essendo $\sum_{t=1}^{s} i^v_t = n$ per ogni v). Denotiamo allora con $\psi(T)$ il sottoinsieme di W costituito dagli elementi T' isobari a T del tipo $T' = (c_1, \dots, c_h - 1, \dots, c_k + 1, \dots, c_s), (i^1_1, \dots, i^1_s), \dots, (i^q_1, \dots, i^q_h + 1, \dots, i^q_k - 1, \dots, i^q_s), \dots, (i^r_1, \dots, i^r_s)$, al variare di h, k, q, in modo che $c_h > 0$, $i^q_k > 0$.

LEMMA 3. *Dati due elementi $T = C \times I$, $T' = C' \times I'$, appartenenti a W e isobari, se $C \neq C'$, esiste una successione $T_0 = C_0 \times I_0$, $T_1 = C_1 \times I_1, \dots, T_g = C_g \times I_g$ di elementi di W isobari tali che $T_0 = T$, $T_{i+1} \in \psi(T_i)$, $D(T_g, T') = 0$ ovvero $C_g = C'$.*

Poniamo $H = \{h \in N \mid c_h > c'_h\}$, $K = \{k \in N \mid c_k < c'_k\}$. Poichè $C \neq C'$, H e K sono entrambi non vuoti. Sia $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, per la condizione di isobarità si ha: $c_{k_1} + \sum_{v=1}^{r} i^v_{k_1} = c'_{k_1} + \sum_{v=1}^{r} i'^v_{k_1}$, di qui si deduce che esiste q tale che $i^q_{k_1} > 0$. Da $h_1 \in H$, segue che $\psi(T)$ non è vuoto; sia $T_1 \in \psi(T)$, allora:

$$P(T_1) = P(T) \quad \text{e} \quad 0 \leq D(T_1, T') < D(T, T').$$

Se $D(T_1, T') = 0$ allora $C_1 = C'$ e la dimostrazione è conclusa, altrimenti si opera allo stesso modo su T_1 e si ottiene un sistema T_2 tale che $P(T_2) = P(T_1)$ e $0 \leq D(T_2, T') < D(T_1, T')$. Così proseguendo si perviene infine a un sistema T_g che soddisfa a:

$$P(T_g) = P(T) \quad \text{e} \quad D(T_g, T') = 0$$

da cui $C_g = C'$ c.v.d.

PROPOSIZIONE 3. *Denotiamo con Λ_1 l'ideale di B generato dai binomi del tipo $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ tali che $i_u = j_u$ se $u \neq h, k$*

$i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; *allora se* Q *è un binomio isobaro e omogeneo nelle* Z, *si ha:* $Q = NF \bmod \Lambda_1$ *dove* N *è un monomio nelle sole* y *e* F *un binomio isobaro (e quindi omogeneo) nelle sole* Z.

Sia $\vartheta : S \longrightarrow W$ la corrispondenza così definita

$$y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r} \longrightarrow (t_1, \dots, t_s), (i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r).$$

Per il corollario alla proposizione 1, ϑ è biunivoca. Sia ora dato un binomio isobaro e omogeneo nelle Z: $Q = M - M'$ e sia T_1 un sistema appartenente a $\psi(\vartheta(M))$. Notiamo che $M = \vartheta^{-1}(T_1) \bmod \Lambda_1$.

Allora $Q = M - M' = (\vartheta^{-1}(T_1) - M') \bmod \Lambda_1$ e per il lemma 3, si ha: $Q = (\vartheta^{-1}(T_g) - M') \bmod \Lambda_1$ da cui: $Q = NF \bmod \Lambda_1$ dove N è un monomio nelle sole y_j e F un binomio isobaro nelle sole Z c.v.d.

4. Premettiamo adesso alcuni lemmi concernenti sistemi di numeri naturali, mediante i quali possiamo esprimere i binomi isobari nelle sole Z come combinazione dei binomi isobari di secondo grado (Prop. 4).

Sia L l'insieme dei sistemi ordinati costituiti da $r \geq 2$ s-uple di interi ≥ 0 : $(i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k^h = n$ per ogni h, dove l'ordinamento è quello lexicografico (introdotto nella prop. 2).

L'insieme L ora definito è equipotente all'insieme J introdotto nel n^0 3.

DEFINIZIONE 5. Dati due elementi $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ e $N = (j_1^1, \dots, j_s^1) \geq \dots \geq (j_1^r, \dots, j_s^r)$ di L, poniamo $M > N$ se per il più piccolo u tale che $(i_1^u, \dots, i_s^u) \neq (j_1^u, \dots, j_s^u)$ si ha $(i_1^u, \dots, i_s^u) > (j_1^u, \dots, j_s^u)$. In tal modo L è totalmente ordinato.

Sia ora dato un elemento di L: $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$.

Denotiamo con $\sigma(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi $F = (f_1^1, \dots, f_s^1) \geq \dots \geq (f_1^r, \dots, f_s^r)$ tali che:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{r} f_k^h = \sum_{h=1}^{r} i_k^h \quad \text{per ogni } k,\ 1 \leq k \leq s.$$

Siano inoltre p, q due interi distinti tali che $1 \leq p, q \leq r$.

Sia $F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r, \dots, f_s^r)$ un elemento di $(\mathbf{N}^s)^r$ tale che

$$(f_1^t, \dots, f_s^t) = (i_1^t, \dots, i_s^t) \quad \text{se } t \neq p, q,$$

$$f_h^p + f_h^q = i_h^p + i_h^q \quad \text{se } 1 \leq h \leq s,$$

$$\sum_{h=1}^{s} f_h^p = \sum_{h=1}^{s} f_h^q = n.$$

F' individua un elemento di J e quindi un elemento F di L nella bigezione $J \longrightarrow L$.

Diciamo allora che F è dedotto da M con una sostituzione elementare e denotiamo con $\tau(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi deducibili da M con sostituzioni elementari successive al variare della coppia (p, q). Si ha manifestamente : $\tau(M) \subset \sigma(M)$.

LEMMA 4. *Sia* $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ *un sistema di* L, *sia* t *un intero* $(1 \leq t \leq s - 1)$ *per cui valgono le seguenti condizioni :*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{t} i_k^1 < n \qquad\qquad (2') \qquad i_t^1 < \sum_{h=1}^{r} i_t^h .$$

Allora esiste in $\tau(M)$ *un sistema* M' *tale che* $M' > M$.

Infatti, essendo $\sum_{k=1}^{s} i_k^1 = n$, da (2) si deduce che esiste un intero $p\,(t < p \leq s)$, tale che $i_p^1 > 0$. Inoltre da (2') segue che esiste un intero $q, (1 < q \leq r)$, tale che $i_t^q > 0$. Allora se si pone :

$$F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r \ \dots, f_s^r) \in (\mathbf{N}^s)^r ,$$

dove :

$$f_v^u = i_v^u \quad \text{per } u \neq 1, q;\ f_v^1 = i_v^1,\ f_v^q = i_v^q \quad \text{per } v \neq t, p ;$$

$$f_t^1 = i_t^1 + 1,\ f_p^1 = i_p^1 - 1, \quad f_t^q = i_t^q - 1, \quad f_p^q = i_p^q + 1,$$

F' individua un elemento di J, dunque un elemento F di L, t tale che: $F \in \tau(M)$, $F > M$ (in quanto $(f_1^1, \dots, f_s^1) > (i_1^1, \dots, i_s^1)$). Siano ora: M_0 il massimo di $\sigma(M)$ ed M_1 il massimo di $\tau(M)$. Vale il

LEMMA 5. *Per ogni sistema M di L si ha $M_0 = M_1$. Essendo $M_1 \leq M_0$, è sufficiente provare che M_1 non può essere strettamente minore di M_0; supponiamo infatti $M_1 < M_0$. Sia*

$$M_1 = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r),\ M_0 = (j_1^1, \dots, j_s^1) \geq \dots \geq (j_1^r, \dots, j_s^r).$$

Sia u il più piccolo intero tale che $(i_1^u, \dots, i_s^u) < (j_1^u, \dots, j_s^u)$, sia t il minimo intero tale che $i_t^u < j_t^u$. Si ha $t < s$, perchè, se fosse $i_k^u = j_k^u$ per $1 \leq k < s$, e $i_s^u < j_s^u$: seguirebbe:

$$n = \sum_{k=1}^{s} i_k^u < \sum_{k=1}^{s} j_k^u = n:$$

assurdo. Si ha inoltre, in virtù di (1):

$$\sum_{h=1}^{u-1} i_t^h + \sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=1}^{u-1} j_t^h + \sum_{h=u}^{r} j_t^h; \tag{3}$$

poichè, per la definizione di u: $h < u \Longrightarrow i_p^h = j_p^h$ per ogni $p = 1, 2, \dots, s$, si ha $i_t^h = j_t^h$ e quindi, per (3): $\sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=u}^{r} j_t^h$. Poniamo ora [2])

$$N = (i_1^u, \dots, i_s^u) \geq (i_1^{u+1}, \dots, i_s^{u+1}) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r),$$

$g_k^p = i_k^{p+u-1}$, onde si ha $N = (g_1^1, \dots, g_s^1) \geq \dots \geq (g_1^q, \dots, g_s^q)$ dove $q = r - u + 1$. Risulta:

$$g_t^1 = i_t^u < j_t^u \leq \sum_{h=u}^{r} j_t^h = \sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=1}^{q} g_t^h$$

---

[2]) ripetendo in $(\mathbf{N}^s)^{r-u+1}$ le stesse considerazioni fatte all'inizio del n° 4 per $(\mathbf{N}^s)^r$.

da cui:

$$g_t^1 < \sum_{h=1}^{q} g_t^h . \tag{4}$$

Si ha inoltre:

$$\sum_{k=1}^{t} g_k^1 = \sum_{k=1}^{t-1} g_k^1 + g_t^1 = \sum_{k=1}^{t-1} i_k^u + i_t^u < \sum_{k=1}^{t-1} j_k^u + j_t^u \leq n.$$

Ne segue:

$$\sum_{k=1}^{t} g_k^1 < n. \tag{5}$$

In virtù delle relazioni (4) e (5), segue dal lemma 4 che esiste un sistema $N_1 \in \tau(N)$ tale che $N_1 > N$. Allora, se poniamo $N_1 = (f_1^1, \dots, f_s^1) \dots (f_1^q, \dots, f_s^q)$ e denotiamo con M_2 l'elemento individuato in L dal sistema: $(i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^{u-1}, \dots, i_s^{u-1}), (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots$ $\dots, (f_1^q, \dots, f_s^q)$ di $(\mathbf{N}^s)^r$, si ha $M_2 \in \tau(M_1) = \tau(M)$ e $M_2 > M_1$, contro l'ipotesi che M_1 sia massimo in $\tau(M)$. Ciò è assurdo e quindi: $M_1 = M_0$ c.v.d.

DEFINIZIONE 6. Diciamo *semplice* un binomio del tipo

$$Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$$

dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h.

Per ogni monomio $F = Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$, si può supporre

$$(i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r).$$

Se T è il sottoinsieme di S costituito dai monomi di grado r nelle sole Z, si ha allora la corrispondenza biunivoca $\delta : T \longrightarrow L$ così definita:

$$Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r} \longrightarrow (i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r) .$$

Dimostriamo adesso la

PROPOSIZIONE 4. *Ogni binomio Q nelle sole Z isobaro e quindi omogeneo, appartiene all'ideale Λ_2 generato in B dai binomi semplici.*

Proviamo innanzitutto che se F e F' sono due monomi nelle sole Z isobari e se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$ allora vale

$$F = F' \bmod \Lambda_2 . \tag{6}$$

Infatti, $F - F'$ è un binomio nelle Z isobaro e omogeneo, e si ha quindi necessariamente $\partial F = \partial F' \geq 2$.

Allora se $\delta(F')$ è deducibile da $\delta(F)$ mediante una sostituzione elementare, si possono fattorizzare F e F' nel modo seguente $F = KG$, $F' = KG'$ dove G e G' sono monomi isobari nelle Z di secondo grado e $K \in S$.

Di qui $F - F' = K(G - G') \in \Lambda_2$.

Più generalmente, se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$, ragionando come sopra, si vede che $F - F'$ è combinazione finita a coefficienti in B di binomi semplici, cioè: $F = F' \bmod \Lambda_2$.

Sia ora $Q = F - F'$ un binomio nelle sole Z, isobaro; ciò implica: $\sigma(\delta(F)) = \sigma(\delta(F'))$ da cui, con le notazioni introdotte nel lemma 5: $(\delta(F))_0 = (\delta(F'))_0$. Per il lemma 5 si ha allora $(\delta(F))_1 = (\delta(F'))_1$, e di qui si deduce: $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$. Dunque vale la (6) e $Q \in \Lambda_2$ c.v.d.

5. Siamo adesso in grado di stabilire il teorema centrale del presente lavoro, dal quale trarremo immediatamente, nel numero successivo, le annunciate applicazioni alle algebre relative all'ideale $\mathfrak{m}^n$.

TEOREMA 1. *L'ideale $\mathfrak{q}_\infty$ di B* [3]) *generato dalle forme Φ tali che $\varphi(\Phi) = 0$, ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo*

---

[3]) Abbiamo adottato per l'ideale in questione la notazione $\mathfrak{q}_\infty$ già introdotta da Micali in [2].

(λ_1) $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ *dove* $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$, *e*

(λ_2) $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i_1' \dots i_s'} Z_{j_1' \dots j_s'}$ *dove* $i_h + j_h = i_h' + j_h'$ *per ogni* h.

Sia infatti Φ una forma di $\mathfrak{q}_\infty$ di grado r nelle Z. Si ha: $\Phi = \Sigma a_i M_i$ dove gli M_i sono monomi unitari di grado r, $a_i \in A$, per ogni i. Allora il peso globale di ogni M_i vale nr, onde Φ è combinazione di monomi globalmente isobari. Si può quindi applicare la proposizione 2 e si ha: Φ è combinazione a coefficienti in A di binomi isobari e omogenei nelle Z. D'altra parte, per le proposizioni 3 e 4, ogni binomio isobaro e omogeneo nelle Z appartiene all'ideale generato da binomi dei tipi (λ_1) e (λ_2); di qui l'asserto.

COROLLARIO. *L'ideale* $\mathfrak{q}$ *di* B *generato dalle forme lineari* $\Sigma b_{i_1 \dots i_s} Z_{i_1 \dots i_s}$ *tali che* $\Sigma b_{i_1 \dots i_s} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s} = 0$ *ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo* (λ_1).

6. I risultati ottenuti permettono di determinare l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees e l'anello graduato associato relativi all'ideale $\mathfrak{m}^n$.

Ricordiamo brevemente il significato di queste strutture. Sia A un anello e $\mathfrak{a}$ un suo ideale proprio.

DEFINIZIONE 7. Sia T l'algebra tensoriale relativa all'ideale $\mathfrak{a}$ e Q l'ideale di T generato dagli elementi del tipo $xy - yx$, dove $x, y \in \mathfrak{a}$. Chiamiamo *algebra simmetrica* di $\mathfrak{a}$ l'algebra quoziente T/Q [4].

Nel seguito denoteremo con $\mathfrak{a}$ un ideale di tipo finito e con $a_1, a_2, \dots, a_s$, un suo sistema di generatori.

Si ha la seguente proposizione (cf. [2], ch I, n^0 2).

PROPOSIZIONE 5. *Posto* $B = A[Z_1, \dots, Z_s]$ *chiamiamo* $\mathfrak{q}$ *l'ideale di* B *generato dalle forme lineari* $b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_s Z_s$, *dove* $b_j \in A$ $(1 \leq j \leq s)$, *tali che* $b_1 a_1 + \dots + b_s a_s = 0$. *Allora si ha* $S(\mathfrak{a}) \simeq B/\mathfrak{q}$.

---

[4]) Per maggiori particolari sulle algebre tensoriali e simmetriche, cf. [1].

DEFINIZIONE 8. Diciamo *algebra di Rees* $R(\mathfrak{a})$ dell'ideale $\mathfrak{a}$ il sottoanello di $A[Z]$ costituito dalle somme finite del tipo $c_0 + c_1 Z + + c_2 Z^2 + \ldots + c_n Z^n$ dove $c_i \in \mathfrak{a}^i$.

Vale la seguente proposizione (cf. [2]):

PROPOSIZIONE 6. *Se chiamiamo* $\mathfrak{q}_\infty$ *l'ideale omogeneo di* B *generato dalle forme* $g(Z_1, \ldots, Z_s)$ *tali che* $g(a_1, \ldots, a_s) = 0$, *allora* $R(\mathfrak{a})$ *è isomorfa a* $B/\mathfrak{q}_\infty$.

Si ha evidentemente $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_\infty$.

DEFINIZIONE 9. Chiamiamo *anello graduato associato* dell'ideale $\mathfrak{a}$, l'anello $G(\mathfrak{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$.

Segue facilmente dalla proposizione 6 la seguente

PROPOSIZIONE 7. *È possibile rappresentare* $G(\mathfrak{a})$ *come quoziente di* $A[Z_1, \ldots, Z_s]$ *rispetto all'ideale* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_\infty + \mathfrak{a}\, A[Z_1, \ldots, Z_s]$.

Possiamo adesso concludere, in virtù del teorema 1, che per l'ideale $\mathfrak{m}^n$, dove $\mathfrak{m}$ è un ideale generato da una A-successione $y_1, \ldots, y_s$, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2. *Si hanno i seguenti isomorfismi*:
$S(\mathfrak{m}^n) = A[\ldots Z_{i_1 \ldots i_s} \ldots]/\mathfrak{q}$, *dove* $\mathfrak{q}$ *è generato dai binomi del tipo* $y_h Z_{i_1 \ldots i_s} - y_k Z_{j_1 \ldots j_s}$ *con* $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $R(\mathfrak{m}^n) = A[\ldots Z_{i_1 \ldots i_s} \ldots]/\mathfrak{q}_\infty$, *dove* $\mathfrak{q}_\infty$ *è generato dai binomi* $Z_{i_1 \ldots i_s} Z_{j_1 \ldots j_s} - Z_{i_1' \ldots j_s'} Z_{j_1' \ldots j_s'}$ *con* $i_h + j_h = i_h' + j_h'$ *per ogni* h *e da* $y_h Z_{i_1 \ldots i_s} - y_k Z_{j_1 \ldots j_s}$ *con* $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $G(\mathfrak{m}^n) = A[\ldots Z_{i_1 \ldots i_s} \ldots]/\mathfrak{q}'$, *dove* q' *è generato dagli elementi* $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_s^{i_s}$, $(i_1 + i_2 + \ldots + i_s = n)$ *e dai binomi* $Z_{i_1 \ldots i_s} Z_{j_1 \ldots j_s} - Z_{i_1' \ldots i_s'} Z_{j_1' \ldots j_s'}$ *dove* $i_h + j_h = i_h' + j_h'$ *per ogni* h.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CHEVALLEY, *Fundamental concepts of algebra.* Academic Press Inc. New York 1956.

[2] A. MICALI, *Sur les algèbres universelles* (tesi) Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14, 2 (1964).

[3] D. REES, *The grade of an ideal or module.* Proc. Camb. Phil Soc. 53 (1957) pag. 28-42.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° gennaio 1967.