RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO ZOLEZZI

Teoremi di esistenza nella teoria dei controlli ottimi in dimensione finita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__163_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TEOREMI DI ESISTENZA NELLA TEORIA DEI CONTROLLI OTTIMI IN DIMENSIONE FINITA

TULLIO ZOLEZZI *)

SUMMARY. We prove an existence theorem in finite dimensional optimal control theory, with the following hypotheses: (i) the admissible controls are in a bounded subset of some L^p ($p \geq 1$), consisting of functions with values (almost everywhere) in given convex closed moving constraints and generating states with values in a given closed set at the final time T; (ii) a weakly convergent sequence of controls generates a strongly convergent sequence of states (e.g. a linear differential system gives such a dependence of states on controls); (iii) we minimize a real function of the form $\int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt$, where f is convex with respect to the control u, locally Lipschitzean with respect to the state x, and measurable with respect to t. Examples show that this result is independent on the known existence theorems. This theorem can be extended without any substantial change to infinite dimensional case, as it will be shown in another paper.

Introduzione.

In questo lavoro si dimostra un teorema d'esistenza per controlli ottimi in dimensione finita, nell'ipotesi che i controlli stiano in una parte limitata di qualche spazio L^p (v. più sotto per le no-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 9 del Comitato nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Genova.

tazioni) (l'ipotesi che le equazioni che legano i controlli e gli stati siano differenziali e lineari non è essenziale). Lo scopo di questo lavoro è di portare nuovi contributi al problema considerato, precisando alquanto, in certe direzioni, i risultati di esistenza finora noti ([3]), e soprattutto di provare teoremi di esistenza con metodi (diversi da quelli usati in [6]) abbastanza generali e suscettibili di essere applicati direttamente a problemi analoghi di controllo in dimensione infinita (come verrà mostrato in altri lavori).

NOTAZIONI. Se X, Y sono spazi di Banach, $\mathcal{B}(X, Y)$ è lo spazio (di Banach) degli operatori lineari e limitati tra X ed Y. Se $R : X \to Y$ allora R^{-1} è l'inverso di R. $\| \cdot \|$ indica la norma, $\to$ indica la convergenza forte, $\rightharpoonup$ indica la convergenza debole, in ogni spazio di Banach considerato. R^k è lo spazio euclideo reale a k dimensioni. Se $A \subset R^k$, $\bar{A}$ ne indica la chiusura, $\overline{\text{co}}\, A$ l'inviluppo convesso chiuso. Se $x = (x^1, \ldots, x^k) \in R^k$, $|x| = \sum_{j=1}^{k} |x^j|$. Se $T > 0$, $[0, T] = \{t \in R^1 : 0 \leq t \leq T\}$; $(0, T) = \{t \in R^1 : 0 < t < T\}$.

Se $p \geq 1$, L^p è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $f : [0, T] \to R^k$ tali che $t \to |f(t)|^p$ è integrabile in $[0, T]$ secondo Lebesgue, con la norma $\left(\int_0^T |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$.

L^∞ è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $f : [0, T] \to R^k$ che sono essenzialmente limitate in $[0, T]$ rispetto alla misura di Lebesgue, con la norma $\operatorname{ess.sup}_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$.

C è lo spazio di Banach di tutte le funzioni $f : [0, T] \to R^k$ continue in $[0, T]$, con la norma $\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$. In ogni caso, k è individuato dal contesto.

Se $x : [0, T] \to R^k$ è assolutamente continua, $\dot{x}$ ne indica la derivata. q. o. abbrevia la locuzione « quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue ». mis è la misura di Lebesgue in R^k: misurabile significa « misurabile rispetto alla misura di Lebesgue ».

Se X ed Y sono L^p oppure C, se $A : X \to Y$, se $Q \subset X$ e se $t \in [0, T]$, allora $A(Q)(t) = \{y(t) : y \in A(Q)\}$.

Se a è una matrice ad elementi reali, $|a|$ è la somma dei moduli dei suoi elementi, a^{-1} è l'inversa di a. Se a e b sono matrici ad elementi reali, ab è la matrice prodotto righe per colonne di a per b.

Se a è una matrice ad elementi funzioni, $a \in L^p$ significa che ogni elemento di a è in L^p.

TEOREMA 1. *Siano X_1, X_2 spazi di Banach reali, sia $F \subset X_1$, tale che*

(i) *F è limitato;*

(ii) *sia M: (F, topologia debole) $\to X_2$ continua;*

(iii) *sia $L \in \mathcal{B}(X_1, X_1)$.*

Sia $N > 0$, $S_N = \{u \in X_1 : \| u \| \leq N\} \supset F$, sia $h : L(S_N) \times M(F) \to R^1$ tale che

(iv) *$u_1 \to h(u_1, u_2)$ è convessa e fortemente continua in $L(S_N)$ per ogni $u_2 \in M(F)$;*

(v) *$u_2 \to h(u_1, u_2)$ è fortemente continua in $M(F)$, uniformemente per $u_1 \in L(F)$.*

Allora $u \to h(Lu, Mu)$ è debolmente semicontinua inferiormente in F.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $g(u, v) = h(Lu, Mv)$ con $g : S_N \times F \to R^1$. Allora

(1) $u \to g(u, v)$ è fortemente continua e convessa in S_N per ogni $v \in F$.

La convessità è immediata dalle (iii), (iv). Sia poi $u_k \in S_N$, $k = 1, 2, \ldots$, $u_k \to u$ allora $Lu_k \to Lu$ allora per ogni $v \in F$ si ha $g(u_k, v) \to g(u, v)$. La (1) è provata. Proviamo che

(2) $v \to g(u, v)$ è debolmente continua in F, uniformemente per $u \in F$.

Infatti se $\{v_s\}$ è una successione generalizzata in F, $v \in F$ e $v_s \to v$, allora $Mv_s \to Mv$ e se $u \in F$ si ha $g(u, v_s) \to g(u, v)$ uniformemente per $u \in F$. Poniamo ora $f(u) = h(Lu, Mu)$, con $f : F \to R^1$. Proviamo che per ogni $c \in R^1$ l'insieme $M_c = \{u \in F : f(u) \leq c\}$ è debolmente chiuso in F. Sia $c \in R^1$. Sia u_0 nella chiusura debole in F di M_c. Dalla (2) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno debole U di u_0 tale che se $u \in F$ e $v \in U \cap F$, si ha $|g(u, v) - g(u, u_0)| < \varepsilon$. Sia $c_1 = c + \varepsilon$, e poniamo $M_1 = \{u \in S_N : g(u, u_0) \leq c_1\}$. Per la (1), M_1 è convesso e fortemente chiuso, quindi debolmente chiuso. Sia U_1 un intorno debole di u_0 con $U_1 \subset U$. Allora $U_1 \cap F \cap M_c \neq \Phi$

per cui esiste $\bar{u}$ tale che $g(\bar{u}, \bar{u}) \leq c$. Allora $g(\bar{u}, u_0) \leq g(\bar{u}, \bar{u}) + |g(\bar{u}, \bar{u}) - g(\bar{u}, u_0)| \leq c + \varepsilon = c_1$ quindi $\bar{u} \in M_1$ allora u_0 sta nella chiusura debole di M_1 cioè in M_1 per cui $f(u_0) \leq c$, c. v. d.

TEOREMA 2. *Sia data la famiglia di equazioni differenziali con condizioni iniziali e finali*

$$(*) \quad \dot{x}(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,u(t) + c(t), \text{ q. o. in } [0, T]$$

$$(**) \quad x(0) = x^0$$

$$(***) \quad x(T) \in E,$$

con $T > 0$, $x^0 \in R^n$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; *sia* $1 < p < +\infty$ *dato*, $N > 0$ *dato*, $p + q = pq$, *sia* a *matrice* $n \times n$, b *matrice* $n \times m$, $c(t) \in R^n$.

Supponiamo che

(1) $a \in L^1$, $b \in L^q$, $c \in L^1$;

(2) E *sia non vuoto e chiuso in* R^n.
Sia data l'applicazione $t \longrightarrow U(t)$, *da* $[0, T]$ *nei sottinsiemi di* R^m, *tale che*

(3) *per ogni* $t \in [0, T]$, $U(t)$ *è non vuoto, chiuso e convesso.*

(4) $F = \{u \in L^p : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ *q. o. in* $[0, T]$, *la corrispondente soluzione* $x = Mu$ di (*), (**) *soddisfa anche* (***)$\}$ *è non vuoto.*
Sia $R_F = \bigcup_{0 \leq t \leq T} (M(F))(t)$, $S_N = \{u \in L^p : \| u \| \leq N\}$.
Sia $f : [0, T] \times R_F \times R^m \longrightarrow R^1$ *tale che*

(5) *per ogni* $x \in R_F$ *e per ogni* $u \in R^m$, $t \longrightarrow f(t, x, u)$ *è misurabile.*

(6) *per ogni* $x \in M(F)$, *per ogni* $u \in S_N$, $t \longrightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$.

(7) $u \longrightarrow f(t, x, u)$ *è convessa per quasi ogni* $t \in [0, T]$ *e per ogni* $x \in R_F$.

(8) $|f(t, x_1, u(t)) - f(t, x_2, u(t))| \leq \omega(t, x_2, u(t))\,|x_1 - x_2|$ *per ogni* $u \in F$, *per ogni* x_1, x_2 *in* R_F, *per quasi ogni* $t \in [0, T]$, *con* $t \longrightarrow \omega(t, y(t), u(t)) \in L^1$ *per ogni* $u \in F$ *ed* $y \in M(F)$, *e con* $u \longrightarrow \int_0^T \omega(t, y(t), u(t))\,dt$ *limitata in* F *per ogni* $y \in M(F)$.

Allora esiste $u^* \in F$ *tale che se* $x^* = Mu^*$, *si ha*

$$\int_0^T f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt = \min\left\{ \int_0^T f(t, (Mv)(t), v(t))\, dt : v \in F \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la (1) esiste, per ogni $u \in L^p$, una ed una sola soluzione secondo Carathéodory, $x = Mu$, di (*), (**). Detta Φ una matrice fondamentale di $\dot{x} = ax$, si ha che

$$(Mu)(t) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)\,x^0 + \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,u(s)\,ds + \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,c(s)\,ds,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Proviamo che

(i) $u_k \in L^p$, $k = 1, 2, \ldots$, $u_k \rightharpoonup u$ in L^p implica $Mu_k \to Mu$ in C.

Infatti $M = P + \alpha$, ove α è una costante, e $P : L^p \to C$, con

$$(Pu)(t) = \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,u(s)\,ds,\ t \in [0, T].$$

Si ha

$$\| Pu \| = \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,u(s)\,ds \right| \le$$

$$\le \sup_{0 \le t \le T} \int_0^T |\,\Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,u(s)\,|\,ds \le \Phi_0 \| b \| \, \| u \|,$$

ove Φ_0 è una costante. Allora P è un operatore lineare limitato tra L^p e C. Sia ora S la sfera unitaria chiusa in L^p. $P(S)$ è equicontinuo in C: infatti sia $x \in P(S)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\varepsilon > 0$, allora esi-

ste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che, essendo $v \in S$,

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \left| \int_0^{t_2} \Phi(t_2)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} \Phi(t_2)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,ds \right| + \left| \int_0^{t_1} \Phi(t_2)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} \Phi(t_1)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\,\Phi(t_2)\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,|\,ds +$$

$$+ \int_0^{t_1} |\,\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\,\|\,\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,v(s)\,|\,ds \leq \varepsilon\,\Phi_0\,(1 + \|\,b\,\|),$$

a patto che $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$. Allora P è compatto tra L^p e C. Di qui la (i). Allora, essendo $1 < p < +\infty$, si è provato che

(ii) M è continuo tra ogni parte limitata di L^p con la topologia debole e C.

Proviamo che

(iii) F è debolmente compatto in L^p.

Essendo L^p riflessivo, basta provare che F è debolmente chiuso. Basta dunque dimostrare che $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, $u_k \rightharpoonup u$ in L^p implica $u \in F$. Infatti $\|u\| \leq \liminf \|u_k\| \leq N$. Dalla (ii) segue che $(Mu_k)(T) \to (Mu)(T)$, per cui dalla (2) si trova $(Mu)(T) \in E$. Esiste una successione $\{v_k\}$ di combinazioni convesse della $\{u_k\}$ tale che $v_k \to u$ in L^p. Dalla (3), $v_k(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]$, inoltre una sottosuccessione $\{v_i\}$ della $\{v_k\}$ converge ad u q. o. in $[0, T]$ per cui $u(t) = \lim v_i(t)$ q. o. in $[0, T]$, per cui, dalla (3), $u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]$. Quindi la (iii) è provata.

Poniamo ora

$$h(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))\,dt.$$

Allora, per la (6), $h : M(F) \times S_N \to R^1$. Proviamo che

(iv) $u \to h(x, u)$ è convessa e fortemente continua in S_N per ogni $x \in M(F)$.

La convessità è immediata per la (7). La continuità è immediata per le (5), (7), (6) e per [7], teorema 2.1 pag. 22, e per [5], par. 19.2. Quindi la (iv) è provata. Proviamo che

(v) $x \longrightarrow h(x, u)$ è fortemente continua in $M(F)$ uniformemente per $u \in F$.

Infatti se $x_k \in M(F)$, $x \in M(F)$, $x_k \longrightarrow x$ in C, e se $u \in F$, dalla (8) si ha

$$| h(x_k, u) - h(x, u) | \leq \int_0^T \omega(t, x(t), u(t)) | x_{kj}(t) - x(t) | dt \leq \omega_0 \| x_k - x \| ,$$

ove ω_0 è una costante, quindi la (v) è provata.

Per la (4) e dal teorema 1 si ha, per le (ii), (iii), (iv) e (v), la tesi, c. v. d.

NOTA 1. Dalla dimostrazione del teorema 2 risulta che le (*), (**) possono essere sostituite da una qualunque famiglia di equazioni (non necessariamente differenziali e lineari) per le quali sussista un teorema di esistenza ed unicità in $[0, T]$ il quale definisca una funzione M che ad ogni controllo u di F associ il corrispondente stato x in modo che valga la (ii) del teorema 1.

NOTA 2. Sono note (v. [2]) condizioni necessarie e sufficienti perchè valga la (4), che è l'ipotesi di controllabilità del problema nel teorema 2, per esempio nel caso che E sia una sfera chiusa di R^n. ω soddisfa le ipotesi richieste nella (8) del teorema 2 se per ogni $y \in R_F$ si ha $t \longrightarrow \omega(t, y, u)$ misurabile per ogni $u \in R^m$, $u \longrightarrow \omega(t, y, u)$ continua per quasi ogni $t \in [0, T]$, e se inoltre $t \longrightarrow \omega(t, x(t), v(t)) \in L^1$ per ogni $x \in M(F)$, per ogni $v \in S_N$. Ciò è infatti immediato dal teorema 2.2 pag. 26 di [7].

NOTA 3. Il teorema 2 è ancora vero se si definisce $F = \{u \in L^p : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T], (Mu)(t) \in E$ per ogni $t \in I\}$, ove $I \subset [0, T]$ si supponga (non vuoto) fra i dati, ferme restando le ipotesi.

È infatti immediato provare che, così definito, F è ancora debolmente chiuso in L^p.

Sia ora R_F un dato sottoinsieme non vuoto di R^n.

E' importante notare che il teorema 2 sussiste ancora se si suppone che i vincoli siano della forma $(t, x) \to U(t, x)$ (applicazione di $[0, T] \times R_F$ nelle parti non vuote di R^m), ferme restandone le ipotesi tranne la (3) che si sostituisce con la seguente

(3′) per ogni $(t, x) \in [0, T] \times R_F$, $U(t, x)$ è non vuoto, e, posto per ogni $\delta > 0$,

$$U(t, x, \delta) = \bigcup_{|(s, y) - (t, x)| \leq \delta} U(s, y), \text{ risulta } \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}\, U(t, x, \delta) = U(t, x).$$

Infatti, sia $t_0 \in (0, T)$, $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, $u_k \to u$ in L^p. Basta provare che $u(t_0) \in U(t_0, (Mu)(t_0))$ per quasi ogni $t_0 \in (0, T)$. Dalla dimostrazione della (i) del teorema 2 si ha che per ogni $\delta > 0$ esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\bar{\varepsilon} < \delta/2$ e se $t \in [t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}] \subset [0, T]$, allora $|(Mu_k)(t_0) - (Mu_k)(t)| < \delta/4$ per ogni k. Allora $|(Mu_k)(t) - (Mu)(t_0)| \leq \delta/2$ per ogni $t \in [t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ e per k abbastanza grande. Allora per gli stessi t e k si ha $u_k(t) \in U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$ tranne che per un sottinsieme di misura nulla di $[t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}]$. Allora per ogni ε con $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ si ha

$$(1/2\varepsilon) \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} u_k(s)\, ds \in \overline{\text{co}}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta),$$

per cui, per gli stessi ε, si trova

$$(1/2\varepsilon) \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} u(s)\, ds \in \overline{\text{co}}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$$

e quindi $u(t_0) \in \overline{\text{co}}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$ per ogni $\delta > 0$ e per quasi ogni $t_0 \in [0, T]$. Allora dalla (3′) si ha che $u \in F$.

Se $L \in \mathcal{B}(L^p, L^p)$, esiste il minimo, in F, nelle stesse ipotesi del teorema 2, per la funzione

$$u \to \int_0^T f(t, (Mu)(t), (Lu)(t))\, dt + g((Mu)(s)),$$

ove $s \in [0, T]$ è un ulteriore dato del problema, e g è semicontinua inferiormente da R_F in R^1 (« problema di Bolza »). La dimostrazione è, per il teorema 1, immediata.

NOTA 4. Il teorema 1 è una modifica (valida in ipotesi sostanzialmente più generali) di risultati di [1].

Il teorema 2 è indipendente dai risultati annunciati in [3] e dimostrati in [6], essenzialmente per la mancanza di ipotesi (nel teorema 2) sulla « regolarità di movimento » dei vincoli $t \longrightarrow U(t)$, e per la diversità delle ipotesi richieste in [3], teorema 3, sul secondo membro della (*) e su f (integrando dell'integrale da minimizzare). Anche l'estensione nella nota precedente al caso di vincoli dipendenti anche dagli stati non rientra nei risultati di [3] (v. nota 7).

COROLLARIO 1. *Sia H l'insieme dei punti di minimo in F per la funzione*

$$u \longrightarrow g(u) = \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt.$$

Nelle ipotesi del teorema 2, H è debolmente compatto in L^p.

DIMOSTRAZIONE. Se $u_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, ed $u_k \rightharpoonup u$ in L^p, si ha che $\liminf g(u_k) \geq g(u)$ per il teorema 2, da cui $\inf \{g(v): v \in F\} \geq g(u)$. Però F è debolmente chiuso quindi $u \in F$ quindi $u \in H$, allora H è debolmente compatto in L^p, c.v.d.

La dimostrazione del teorema 2 cade se $p = 1$, però sussiste un analogo risultato in ipotesi alquanto più restrittive.

TEOREMA 3. *Sia dato l'insieme di equazioni differenziali con condizioni iniziali e finali*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)\, x(t) + b(t)\, u(t) + c(t), \ \text{q. o. in } [0, T] & (*) \\ x(0) = x^0 & (**) \end{cases}$$

$$x(T) \in E, \qquad (***)$$

con $T > 0$, $x^0 \in R^n$ *dati*, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $c(t) \in R^n$, a *matrice* $n \times n$, b *matrice* $n \times m$. *Supponiamo che*

(1) $a \in L^1$, $b \in L^\infty$, $c \in L^1$;

(2) *E sia non vuoto e chiuso in* R^n.
Sia data l'applicazione $t \longrightarrow U(t)$, *da* $[0, T]$ *nei sottinsiemi non vuoti di* R^m, *tale che*

(3) *per ogni* $t \in [0, T]$, $U(t)$ *è non vuoto, chiuso e convesso, ed esiste* $\varphi \in L^1$ *tale che q. o. in* $[0, T]$, $v \in U(t)$ *implica* $|v| \leq \varphi(t)$.

Sia $N > 0$ *dato. Supponiamo che*

(4) $F = \{u \in L^1 : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ *q. o. in* $[0, T]$, *la corrispondente soluzione* $x = Mu$ *di* (*), (**) *soddisfa anche* (***)$\}$ *sia non vuoto.*
Sia $R_F = \bigcup_{0 \leq t \leq T} M(F)(t)$, $S_N = \{u \in L^1 : \| u \| \leq N\}$.
Sia $f : [0, T] \times R_F \times R^m$ *tale che*

(5) *per ogni* $x \in R_F$ *e per ogni* $u \in R^m$,
$t \longrightarrow f(t, x, u)$ *è misurabile*;

(6) *per ogni* $x \in M(F)$, *per ogni* $u \in S_N$, $t \longrightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$;

(7) $u \longrightarrow f(t, x, u)$ *è convessa per quasi ogni* $t \in [0, T]$ *e per ogni* $x \in R_F$.

(8) $|f(t, x_1, u(t)) - f(t, x_2, u(t))| \leq \omega(t, x_2, u(t))\,|x_1 - x_2|$ *per ogni* $u \in F$, *per ogni* x_1, x_2 *in* R_F, *per quasi ogni* $t \in [0, T]$. *con* $t \longrightarrow \omega(t, y(t), u(t)) \in L^1$ *per ogni* $u \in F$ *ed* $y \in M(F)$, *e con* $u \longrightarrow \int_0^T \omega(t, y(t), u(t))\, dt$ *limitata in* F *per ogni* $y \in M(F)$.

Allora esiste $u^* \in F$ *tale che se* $x^* = Mu^*$, *si ha*

$$\int_0^T f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt = \min \left\{ \int_0^T f(t, (Mv)(t), v(t))\, dt : v \in F \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano M, P, α, Φ come nella dimostrazione del teorema 2, con $M : L^1 \to C$. Proviamo che

(i) $P : (F,$ topologia debole$) \to C$ è continuo.

Infatti per la (1) $\| Pu \| \leq \Phi_0 \int_0^T | b(s)\, u(s) | ds \leq \Phi_0 \| b \| \, \| u \|$, dove Φ_0 è una costante, per cui $P \in \mathcal{B}(L^1, C)$. Se $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, se $u \in F$ e se $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $| t_1 - t_2 | < \delta(\varepsilon)$ si ha

$$\left| \int_0^{t_1} \Phi(t_1)\, \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, u(s)\, ds - \int_0^{t_2} \Phi(t_2)\, \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, u(s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{t_1} | \Phi(t_1) - \Phi(t_2) | \, | \Phi^{-1}(s) | \, | b(s)\, u(s) | \, ds +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} | \Phi(t_2)\, \Phi^{-1}(s) | \, | b(s)\, u(s) | \, ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \Phi_0 \| b \| + \Phi_0 \| b \| \int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)\, ds \leq 2\varepsilon \Phi_0 \| b \| .$$

Allora $P(F)$ è equicontinuo in ogni punto di $[0, T]$. Sia $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, $u \in F$, $u_k \to u$ in L^1, allora $Pu_k \to Pu$ in C per cui $(Pu_k)(t) \to (Pu)(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Per l'equicontinuità di $P(F)$ si ha allora che $Pu_k \to Pu$ in C, quindi P è sequenzialmente continuo tra (F, topologia debole) e C. La (i) sarà provata se si dimostrerà, per [4], V. 6. 3, che

(ii) F è debolmente compatto in L^1.

Infatti posto $F_1 = \{u \in L^1 : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]\}$, $F_2 = \{u \in L^1 : (Mu)(T) \in E\}$, si ha $F = F_1 \cap F_2$. È immediato osservare che, per la (3) e per l'affinità di M, F_1 è convesso. Inoltre è fortemente chiuso. Infatti se $u_k \in F_1$, $k = 1, 2, \ldots$, con $u_k \to u$ in L^1, allora $\| u \| \leq N$; per una sottosuccessione $\{u_n\}$ di $\{u_k\}$ si ha

$u_n(t) \to u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]$, per la (3). Quindi F_1 è debolmente chiuso. Inoltre, per la (3), se I è un sottinsieme misurabile di $[0, T]$ ed $u \in F_1$, si ha $\left| \int_I u(s)\, ds \right| \leq \int_I \varphi(s)\, ds$ da cui ([4]; IV. 8. 11) si ha la compattezza debole sequenziale di F_1 in L^1. Allora ([4]; V. 6. 1) F_1 è debolmente compatto in L^1. M è continuo tra la topologia debole di L^1 e quella debole di C; sia $Q: C \to R^n$ tale che $Q(y) = y(T)$ per ogni $y \in C$. Allora Q è continuo tra la topologia debole di C ed R^n però $F_2 = (QM)^{-1}(E)$ allora F_2 è debolmente chiuso in L^1. Allora ([4]; V. 6. 1.) la (ii) e quindi la (i) sono provate.

Poniamo ora

$$h(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt\,;$$

allora per la (6) si ha $h : M(F) \times S_N \to R^1$.

Proviamo che

(iii) $u \to h(x, u)$ è convessa e fortemente continua in S_N per ogni $x \in M(F)$.

La convessità è immediata per la (7). La continuità è immediata per la (7), la (5), la (6) e per il teorema 2.1 di [7], pag. 22, e per [5], par 19.2. Quindi la (iii) è provata. Proviamo che

(iv) $x \to h(x, u)$ è fortemente continua in $M(F)$, uniformemente per $u \in F$.

Infatti se $x_k \in M(F)$, $x \in M(F)$, $x_k \to x$ in C e se $u \in F$, dalla (8) si ha

$$h(x_k, u) - h(x, u) \leq \int_0^T \omega(t, x(t), u(t))\, |x_k(t) - x(t)|\, dt \leq \omega_0 \| x_k - x \|\,,$$

ove ω_0 è una costante, quindi la (iv) è provata.

Per la (4) e dal teorema 1, per le (i), (ii), (iii) e (iv), si ha la tesi, c.v.d.

È inoltre immediato osservare che

COROLLARIO 2. *Sia H l'insieme dei punti di minimo in F per la funzione*

$$u \to \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt\,.$$

Nelle ipotesi del teorema 3, H *è debolmente compatto.*

NOTA 5. I corollari 1 e 2 consentono la risoluzione di più generali problemi variazionali rispetto a quelli fin qui trattati (per esempio, problemi di « minimax »).

NOTA 6. Riguardo al teorema 3 sono valide osservazioni analoghe a quelle delle note precedenti, con ovvie modifiche.

NOTA 7. Con le stesse notazioni dei teoremi 2 e 3, consideriamo il seguente esempio: sia $n = m = 2$, siano $T = 1$; $\psi(t) = 2(1-t)^{-1/3}$, $\psi_0(t) = 1g\,\psi(t)$ per $0 \leq t < 1$; $a(t) = b(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi(1) = 2$.

Sia $Q = \{t \in [0,1] : t \text{ razionale}\}$. Poniamo, per $t \in [0,1]$,

$$U(t) = \{(u_1, u_2) : -1 \leq u_1 \leq 1,\ tu_1 \leq u_2 \leq 2\}, \text{ se } t \in Q$$

$$U(t) = \{(u_1, u_2) : u_1 = 1,\ -\psi_0(t) \leq u_2 \leq 0\}, \text{ se } t \notin Q.$$

Sia $f(t,x,u) = A(t,x) + B(x)\,|\,u\,|^p$, dove supponiamo

$t \to A(t,x)$ misurabile per ogni x;

$|\,A(t,x_1) - A(t,x_2)\,| \leq A_0(t)\,|\,x_1 - x_2\,|$ per ogni x_1 ed x_2, con $A_0 \in L^1$;

$|\,B(x_1) - B(x_2)\,| \leq B_0\,|\,x_1 - x_2\,|$ per ogni x_1 ed x_2, con $B_0 \in R^1$.

Se $p \geq 1$, le ipotesi dei teoremi 2 o 3 relative ad a, b, c, U, sono soddisfatte, e così quelle concernenti f ([5], par. 19.2). Se $p = 1$ e se indichiamo in questo esempio con g il secondo membro della (*) del teorema 3, si ha che non esistono due costanti reali C e D tali che $|\,g(t,x,u)\,| \leq C + D\,|\,u\,|$ per ogni (t,x) ed $u \in U(t)$; inoltre $\bigcap_{\delta>0} \bigcup_{|s-t|\leq\delta} U(t) \neq U(s)$ se $s \notin Q$; infine non è sempre verificata la condizione che per ogni (t,x) e per ogni $u \in U(t)$ si abbia $f(t,x,u) \geq \varphi_0(|\,u\,|)$, con φ_0 continua e $\lim_{s\to+\infty} \varphi_0(s)/s = +\infty$ (v. [3], teor. 3 pag. 484).

Consideriamo infine il seguente esempio: sia $n = m = 2$, $T = 1$, sia

$$U(t) = \{(u_1, u_2) : tu_1 \leq u_2 \leq 2,\ -1 \leq u_1 \leq 1\}.$$

Allora $t \longrightarrow U(t)$ verifica in $[0, T]$ la condizione (Q) di [3]. Poniamo ora

$$c(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \text{ razionale in } [0, 1], \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \text{ irrazionale in } [0, 1], \text{ e sia} \end{cases}$$

$g(t, x, u) = u + c(t)$. Allora g, come secondo membro della $(*)$, soddisfa le ipotesi del teorema 2 però gli insiemi $t \longrightarrow g(t, U(t))$ non godono in $[0, 1]$ della proprietà (Q) di [3]. Da ciò si deduce facilmente che la $(3')$ della nota 3 (nelle ipotesi del teorema 2) è indipendente dalle ipotesi cui debbono soddisfare i vincoli nel teorema 3 di [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] Browder, *Remarks on the direct method of the calculus of variations.* ARCH. RAT. MECH. ANAL. vol. 20 (1965), 251-258.

[2] Conti, *Notes on optimum control theory.* Lecture series no. 43, University of Maryland.

[3] Cesari, *Existence theorems for optimal solutions in Pontryagin and Lagrange problems* J S.I.A.M. CONTROL, Ser A, vol. 3, no. 3 (1966), 475-498.

[4] Dunford-Schwartz, *Linear Operators, part* 1. Interscience Pub., 1958.

[5] Vainberg *Variational methods for the study of nonlinear operators.* Holden-Day, 1964.

[6] Cesari, *Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints I.* TRANS. A.M.S. vol. 124 (1966), 369-412.

[7] Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* Pergamon Press, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 maggio 1967