RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Sui gruppi risolubili complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 118-120

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__118_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUI GRUPPI RISOLUBILI COMPLEMENTATI

FRANCO NAPOLITANI *)

Un gruppo G viene chiamato K-gruppo [2], se il reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i suoi sottogruppi è complementato. Inoltre C. Christensen [1] con il termine nC-gruppo (risp: cC-gruppo) indica un gruppo in cui ogni sottogruppo normale (risp: caratteristico) è dotato di complemento.

Da un noto teorema di G. Zacher [3] segue immediatamente che nei gruppi finiti risolubili le classi dei K-gruppi, nC-gruppi e cC-gruppi coincidono. Questo fatto non è più vero per i gruppi risolubili infiniti: infatti il gruppo additivo Q dei razionali, che è privo di sottogruppi caratteristici non banali, non ha il reticolo dei sottogruppi complementato.

Tuttavia tra nC-gruppi e K-gruppi tale equivalenza continua a sussistere anche nei gruppi risolubili [1]) infiniti.

1. Siano G un nC-gruppo ed N un sottogruppo normale di G. Si consideri un sottogruppo $U \lhd G$ contenente N. Per ipotesi, U ha un complemento V in $\mathcal{L}(G)$, cioè V verifica le relazioni $U \cup V = G$ e $U \cap V = 1$.

Dalla relazione di modularità segue

$$U \cap (V \cup N) = (U \cap V) \cup N = N.$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Un gruppo G dicesi risolubile se la sua serie derivata ha lunghezza finita.

Quindi $V \cup N/N$ è un complemento di U/N in $\mathcal{L}(G/N)$ e G/N è anch'esso un nC-gruppo.

LEMMA: *Sia G un nC-gruppo. G è un K-gruppo se contiene un sottogruppo normale abeliano N tale che il quoziente G/N sia un K-gruppo.*

DIM: Sia H un complemento di N in $\mathcal{L}(G)$; H essendo isomorfo a G/N è un K-gruppo. Inoltre sia $T \subseteq N$ un sottogruppo normale di G.

Esiste in G un sottogruppo K tale che $T \cup K = G$, $T \cap K = 1$. Ora $K \cap N$ è un sottogruppo normale di K ed altresì normale in N essendo N abeliano, dunque normale in $K \cup N = G$.

Segue dalla relazione di modularità

$$T \cup (K \cap N) = (T \cup K) \cap N = N,$$

e, poichè $T \cap (K \cap N) = 1$, $K \cap N \lhd G$ è un complemento di T in $\mathcal{L}(N)$.

Si ha quindi, per l'arbitrarietà del sottogruppo $T \subseteq N$, che ogni sottogruppo normale di G contenuto in N possiede un complemento in $\mathcal{L}(N)$ normale in G.

Si consideri un sottogruppo M di G. Nell'isomorfismo naturale tra G/N ed H, ad $M \cup N/N$ corrisponde un sottogruppo $V \subseteq H$. Poichè H è un K-gruppo, V ha un complemento V' in $\mathcal{L}(H)$. Inoltre è evidente che $M \cap V' = 1$ e $M \cup N \cup V' = G$.

Sia C un sottogruppo di G contenente V' tale che $C \cap M = 1$ e massimale per questa condizione.

Proviamo che C è un complemento di M, cioè, essendo $C \cap M = 1$, che $C \cup M = G$. Poichè se $C \cup M \supseteq N$ ciò è vero, essendo $M \cup N \cup V' = G$, assumiamo $C \cup M \not\supseteq N$ e verifichiamo che si giunge ad una contraddizione.

Infatti, in tal caso, $(C \cup M) \cap N$ è un sottogruppo normale di G propriamente contenuto in N. Esiste pertanto un sottogruppo non identico $R \subseteq N$ e normale in G tale che $R \cap [(C \cup M) \cap N] = 1$; $R \cup [(C \cup M) \cap N] = N$.

Si ha

$$(R \cup C) \cap M \subseteq (R \cup C) \cap (M \cup C) = [R \cap (M \cup C)] \cup C = C;$$

d'altra parte $(R \cup C) \cap M \subseteq M$ e quindi $(R \cup C) \cap M \subseteq C \cap M = 1$.

Questa relazione contraddice la massimalità di C: pertanto $C \cup M \supseteq N$ e C è un complemento di M. Quanto detto assicura, essendo M un sottogruppo arbitrario di G, che G è un K-gruppo.

COROLLARIO: *Sia G un gruppo risolubile. G è un nC-gruppo se, e solo se, è un K-gruppo.*

DIM: La sufficienza della condizione essendo evidente, proviamo che un nC-gruppo risolubile è un K-gruppo. Sia

$$(*) \qquad G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \ldots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1,$$

la serie derivata di G. Se la lunghezza della (*) è 1, il gruppo è abeliano e, date le ipotesi, è un K-gruppo.

Una ipotesi di induzione sulla lunghezza n della serie derivata di G consente di supporre che $G/G^{(n-1)}$ sia un K-gruppo; allora dal lemma precedente segue che G è un K-gruppo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHRISTENSEN C. - *Complementation in groups,* Mathematische Zeit. 84 (1964) 52-69.

[2] SUZUKI M. - *Structure of a group and the structure of the its lattice of subgroups,* Erg. der Mat. Springer Verlag, Berlin 1956.

[3] ZACHER G. - *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 22 (1953) 111-122.

Manoscritto pervenuto in redazione 17 febbraio 1967