

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**Sulla rappresentazione parametrica della soluzione
generale di un sistema di equazioni lineari in un
modulo sopra un anello principale**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 37 (1967), p. 307-311

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__307_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA
SOLUZIONE GENERALE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI
LINEARI IN UN MODULO SOPRA UN ANELLO PRINCIPALE

di GABRIELE DARBO (a Genova) *)

In alcune ricerche sulla teoria dei dispositivi elettrici lineari mi sono servito di un risultato riguardante i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, con un numero di equazioni anche diverso dal numero delle funzioni incognite, risultato che ho potuto ottenere con mezzi elementari di algebra omologica. Poichè tale risultato è formulabile in ambito puramente algebrico ho ritenuto opportuno farne oggetto della presente nota.

1. – Sia A un anello principale, X un A -modulo. Consideriamo il sistema di equazioni

$$(1) \quad \begin{array}{l} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \dots + \lambda_{1p}x_p = 0 \\ \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \dots + \lambda_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{q1}x_1 + \lambda_{q2}x_2 + \dots + \lambda_{qp}x_p = 0 \end{array}$$

i coefficienti λ_{ij} essendo in $\mathcal{A}$ e le x_i in X .

La matrice dei coefficienti $L = \{\lambda_{ij}\}$ può essere interpretata come omomorfismo tra $\mathcal{A}$ -moduli liberi di rango p e q

$$L: \Lambda^p \rightarrow \Lambda^q$$

e il sistema di equazioni (1) si può scrivere

$$\Phi x = 0$$

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico Università, Via L. B. Alberti, Genova.

dove $\Phi: X^p \rightarrow X^q$ è un omomorfismo di A -moduli, e $x \in X^r$. Si può, mediante gli isomorfismi canonici $A^p \otimes_A X = X^p$, $A^q \otimes_A X = X^q$, identificare Φ con l'omomorfismo

$$L \otimes_A X: A^p \otimes_A X \rightarrow A^q \otimes_A X$$

L'insieme delle soluzioni di (1) sarà dato pertanto dal nucleo dell'omomorfismo $L \otimes_A X$.

Consideriamo la sequenza esatta

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } L \rightarrow A^p \rightarrow A^q \rightarrow \text{Coker } L \rightarrow 0$$

$\text{Ker } L$ essendo libero in quanto sottomodulo di un modulo libero (A è principale!), avremo che la (2) è una risoluzione libera di $\text{Coker } L$.

Tensorializzando la (2) con X otterremo il complesso

$$(3) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \rightarrow \text{Coker } L \otimes X \rightarrow 0$$

In genere l'esattezza della (3) può venir meno in X^p .

Calcolando il quoziente d'omologia si ha come è noto la sequenza esatta ¹⁾:

$$(4) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Tor}^A(\text{Coker } L, X) \rightarrow 0.$$

Se $\text{Tor}^A(\text{Coker } L, X) = 0$ si ottiene:

$$(\text{Ker } L) \otimes X = \text{Ker } \Phi$$

Poichè $\text{Ker } L \subset A_p$, risulta essere $\text{Ker } L$ isomorfo a A^k dove $k = p - \text{rang } L$ ($\text{rang } L$ è la caratteristica della matrice L). Esiste dunque un morfismo iniettivo

$$\theta: A^k \rightarrow A^p$$

tale che il morfismo, pure iniettivo ²⁾

$$\theta \otimes X: A^k \otimes X \rightarrow A^p \otimes X$$

¹⁾ Questa sequenza è spezzante se X è divisibile come A -modulo, tale essendo allora $(\text{Ker } L) \otimes X$.

²⁾ La sequenza $0 \rightarrow A^k \xrightarrow{\theta} A^p \xrightarrow{L} A^q$ è esatta e $\theta(A^k)$ è componente diretta in A^p .

porge una rappresentazione parametrica delle soluzioni di (1) che, scritta per disteso, sarà del tipo

[illegible]

con u_i elementi arbitrari di X ($i = 1, \dots, k$) e $\theta = \{\theta_{ji}\}$.

2. – Supponiamo ora che l'anello A oltre ad essere principale sia una K -algebra essendo K un corpo commutativo. Poichè $\text{Tor}^A(\text{Coker } L, X)$ è in questo caso anche uno spazio vettoriale su K , la sua dimensione su K chiameremo *ordine* (globale) del sistema (1).

Indichiamo con tX il sottomodulo di torsione di X . Tensorializzando la sequenza (2) con tX e mappandola nella (3) mediante la inclusione $tX \subset X$ si perviene al diagramma commutativo (a meno di tacite identificazioni canoniche):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X & \rightarrow & X^p & \xrightarrow{\Phi} & X^q & \rightarrow & (\text{Coker } L) \otimes X \rightarrow 0 \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes tX & \rightarrow & tX_p & \xrightarrow{t\Phi} & tX^q & \rightarrow & (\text{Coker } L) \otimes tX \rightarrow 0 \end{array}$$

Da questo se ne deduce (passando ai quozienti d'omologia dei complessi rappresentati dalle righe e alle mappe tra questi indotte dalle frecce verticali) il diagramma commutativo a righe esatte:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X & \rightarrow & \text{Ker } \Phi & \xrightarrow{\tau} & \text{Tor}^4(\text{Coker } L, X) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \varepsilon_1 & & \uparrow \wr \varepsilon \\ 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes tX & \rightarrow & \text{Ker } t\Phi & \xrightarrow{\tau_t} & \text{Tor}^4(\text{Coker } L, tX) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Fin qui tutto è canonico ed ε è isomorfismo. Interpretiamo ora il diagramma (5) come diagramma di spazi vettoriali su K ; in tale categoria le righe sono sequenze esatte «spezzanti».

Potremmo dunque trovare un morfismo (di spazio vettoriale!) non canonico μ che è *inverso a destra* dell'epimorfismo $\varepsilon_{\tau_1} : \text{Ker } t\Phi \rightarrow \text{Tor}^d(\text{Coker } L, X)$ per cui si avrà (in virtù della commutatività di (5)):

$$\text{identità} = \varepsilon \tau_1 \mu = \tau \varepsilon_1 \mu$$

M è libero la cosa è ovvia essendo $\text{Tor}^4(M, X) = 0$; altrimenti M ammette una risoluzione del tipo

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $\sigma \in A$ e $\sigma \neq 0$. Tensorializzando con X si ricava la sequenza esatta (a meno di identificazioni canoniche)

$$0 \rightarrow \text{Tor}^4(M, X) \rightarrow X \xrightarrow{\sigma} X \rightarrow M \otimes X \rightarrow 0$$

e quindi $\text{Tor}^4(M, X) = \text{Ker } \sigma$ che ha dimensione finita per ipotesi.

4. - Con il criterio dato al n. 3 risulta immediata l'applicazione dei risultati ottenuti precedentemente al caso dei sistemi di equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti. Mettiamoci, tanto per fare un esempio, nel campo reale e consideriamo lo spazio X delle funzioni C^∞ sulla retta: Questo spazio si consideri come A -modulo, A essendo l'anello degli operatori differenziali (lineari a coefficienti costanti); A in questo caso coincide con l'anello $R[D]$ dei polinomi nel simbolo di derivazione D ed è perciò principale. Esso è altresì una R -algebra ed ogni suo elemento non nullo opera come endomorfismo su X avente nucleo di dimensione finita, uguale al grado del polinomio in D (o, se si preferisce, all'*ordine* dell'operatore). Si può dunque esprimere la soluzione generale del sistema mediante la rappresentazione (6) in cui le $\theta_{j,i}$ sono operatori differenziali e le V_r sono certe funzioni C^∞ che appartengono al sottomodulo di torsione di X ; cioè quelle funzioni che sono somme di prodotti di polinomiali, esponenziali, e sinusoidali, che soddisfano insomma a qualche equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti. La soluzione generale viene descritta dunque al variare di k funzioni arbitrarie $u_1, \dots, u_k$ e di h costanti arbitrarie $c_1, \dots, c_h$. Notiamo ancora che in questo caso X è un A -modulo divisibile e perciò le righe di (5) sono « spezzanti » anche nella categoria dei A -moduli. Si può assumere, quindi, che il morfismo μ considerato al n. 2 sia A -compatibile e da ciò seguono facilmente ulteriori informazioni sulla rappresentazione (6).