

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALBERTO FRIGERIO

## **Sui quasi gruppi associati ai gruppi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 28 (1958), p. 107-111

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1958\\_\\_28\\_\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__107_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUI QUASI GRUPPI ASSOCIATI AI GRUPPI

*Nota (\*) di ALBERTO FRIGERIO (a Napoli)*

§ 1. - In questa Nota da ogni gruppo  $G$  viene ricavato con opportuna costruzione un quasigruppo  $Q$ , da dirsi l'associato di  $G$ .

Si stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti perchè  $Q$  sia l'associato di un gruppo e da quanto viene detto per la dimostrazione di questo teorema ne risulta, implicitamente, che i quasigruppi associati di gruppi distinti sono distinti ed anzi, ne risulta un criterio che permette di costruire, dato un quasigruppo della classe in considerazione, il gruppo di cui esso è l'associato.

Allora segue facilmente che la regola che a  $G$  associa  $Q$  pone una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di  $G$  ed i sottoquasigruppi di  $Q$ , ed inoltre che esiste isomorfismo tra i reticoli delle congruenze di  $G$  e di  $Q$ .

Infine considerato il caso che  $G$  contenga un numero finito di elementi si da per il quasigruppo associato  $Q$  un teorema del tipo Jordan-Hölder.

§ 2. - È noto che l'insieme  $Q$  è rispetto all'operazione  $O$  un quasigruppo se:

1) ad ogni coppia ordinata di elementi  $a, b$  di  $Q$ , risulta associato per la  $O$ , un elemento univocamente determinato di  $Q$  che si indica con  $aOb$ ;

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 28 aprile 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

2) per ogni coppia ordinata  $a, b$  di  $Q$  esistono e sono univocamente determinati gli elementi  $x$  ed  $y$  di  $Q$  per i quali si ha:

$$aOx = b \quad , \quad yOa = b.$$

Si costruisce una vasta classe di quasigruppi nel seguente modo.

Dato un gruppo  $G$  se ne consideri l'elemento  $ab^{-1}$ , dove naturalmente  $a, b$  sono pure elementi di  $G$ .

Si consideri quindi l'operazione binaria  $O$  la quale associa ad ogni coppia ordinata di elementi di  $G$  un terzo elemento di  $G$  secondo la legge espressa dalla

$$(1) \quad aOb = ab^{-1}.$$

È immediato verificare che rispetto ad  $O$ , l'insieme degli elementi di  $G$  soddisfa 1) e 2) e quindi è un quasigruppo.

Si vede che in generale  $O$  non è associativa, infatti si ha:

$$(aOb)Oc = ab^{-1}c^{-1} \quad \text{ed} \quad aO(bOc) = a(bc^{-1})^{-1} = acb^{-1}.$$

Gli insiemi degli elementi che costituiscono  $G$  od un suo sottogruppo  $G_i$ , verranno indicati con  $Q$  o  $Q_i$ , quando si consideri operante su essi la  $O$ , rispetto cui sono dei quasigruppi.

Nel seguito  $Q$  sarà chiamato quasigruppo associato di  $G$  ed ora se ne osserveranno alcune proprietà generali connesse a quelle di  $G$ .

Si ha intanto il

**TEOREMA I:** *Condizione necessaria e sufficiente perchè un quasigruppo  $Q$  sia l'associato di un gruppo  $G$  è che:*

3) *esista in  $Q$  un elemento  $u$  tale che si abbia  $aOb = u$  se e solo se  $a = b$ ;*

4) *qualunque siano  $a, b, c$  di  $Q$  si abbia  $(aOc)O(bOc) = aOb$ .*

La condizione è necessaria: Infatti, indicando con  $u$  l'elemento unità di  $G$ , in  $Q$  si ha  $aOb = ab^{-1} = u$  se e solo se  $a = b$ , e con ciò 3) è verificata.

La condizione è pure sufficiente. Infatti dato il quasigruppo  $Q$  verificante le 3), 4) si consideri il gruppo  $G$  che ha gli stessi elementi di  $Q$  e nel quale l'operazione di prodotto è

definita dalla

$$(2) \quad ab = aO(uOb).$$

Che  $G$  sia un gruppo è stato già dimostrato da Whittaker<sup>1)</sup>, anzi, in più, tale autore fa vedere che

$$(3) \quad a^{-1} = uOa$$

$$(4) \quad a = uO(uOa).$$

Basta quindi verificare che  $Q$  è proprio l'associato di  $G$  e cioè che l'operazione  $O'$ , definita a partire da  $G$  secondo la (1) coincide con la  $O$  di  $Q$ .

Ed infatti da  $aO'b = ab^{-1}$  segue per le (3), (2), (4):  $ab^{-1} = a(uOb) = aO[uO(uOb)] = aOb$ , quindi  $O' = O$ .

§ 3 - È immediato che tra i sottogruppi di  $G$  ed i sottoquasigruppi di  $Q$  si può porre una corrispondenza biunivoca che fa corrispondere ad ogni sottogruppo il quasigruppo associato.

Basterà, evidentemente, dimostrare che un sottoquasigruppo  $S$  di  $Q$ , è in  $G$  un sottogruppo.

Infatti se  $(a, b \in S)$ , vale che  $aOb = ab^{-1} \in S$ .

$S$  è dunque un sottoinsieme di  $G$  tale che se  $a, b$  sono suoi elementi anche  $ab^{-1}$  è suo elemento, e questa è una condizione necessaria e sufficiente perchè  $S$  sia un sottogruppo di  $G$ .

§ 4. - Si ricorda che una relazione di congruenza su un'algebra  $A$ , dotata di una operazione binaria  $O$ , è una relazione di equivalenza  $\mathbf{g}$  tale che le  $a \equiv b(\mathbf{g})$ ,  $c \equiv d(\mathbf{g})$  implicano  $aOc \equiv bOd(\mathbf{g})$  e che l'insieme delle relazioni di congruenza su  $A$  costituiscono un reticolo se si conviene di porre  $\mathbf{g} \leq \mathbf{g}_1$  quando accade che  $a \equiv b(\mathbf{g})$  ( $a \in A$ ,  $b \in B$ ) implica  $a \equiv b(\mathbf{g}_1)$ .

Vale ora il:

---

<sup>1)</sup> J. V. WHITTAKER, *On the Postulates Defining a Group*. (The American Mathematical Monthly, novembre 1955). Si noti che in questo lavoro l'autore fa uso per i gruppi della notazione additiva; e che le condizioni 3), 4), qui date, sono i postulati II) e III).

**TEOREMA II:** *I reticoli delle relazioni di congruenza di un gruppo  $G$  e del quasigruppo  $Q$  associato a  $G$ , sono isomorfi.*

Si ponga per definizione, in  $Q$   $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$  se in  $G$  è  $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$  e viceversa.

Che data  $\mathbf{g}_i$  risulti così  $\mathbf{q}_i$  una relazione di congruenza è immediato.

Infatti se  $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$  e  $c \equiv d(\mathbf{q}_i)$ , segue  $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$  e  $c \equiv d(\mathbf{g}_i)$ , ma allora  $c^{-1} \equiv d^{-1}(\mathbf{g}_i)$  e  $ac^{-1} \equiv bd^{-1}(\mathbf{g}_i)$  cioè per la definizione di  $Q$   $aOc \equiv bOc(\mathbf{g}_i)$  e quindi  $aOc \equiv bOc(\mathbf{q}_i)$ .

Data  $\mathbf{q}_i$ , che risulti  $\mathbf{g}_i$  una relazione di congruenza si ha osservando che se  $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$ ,  $c \equiv d(\mathbf{g}_i)$  in  $Q$  risulta  $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$   $c \equiv d(\mathbf{q}_i)$  e da queste moltiplicando per  $u$  la seconda  $uOc \equiv uOd(\mathbf{q}_i)$ , che moltiplicata per la prima porge  $aO(uOc) \equiv bO(uOd)(\mathbf{q}_i)$  e ricordando le  $(r)$  e la definizione di  $\mathbf{g}_i$   $ac \equiv bd(\mathbf{g}_i)$ .

È ovvio che a  $\mathbf{g}_i$  distinte corrispondono  $\mathbf{q}_i$  distinte e viceversa e che  $\mathbf{g}_i \leq \mathbf{g}_j$  necessariamente  $\mathbf{q}_i \leq \mathbf{q}_j$  e viceversa; cioè che la corrispondenza è un isomorfismo tra i reticoli delle relazioni di congruenza di  $G$  e  $Q$ .

§ 5. - Nel caso di un numero finito di elementi  $G$  ed il suo associato  $Q$  avranno lo stesso ordine ed per il § 3 anche i sottoquasigruppi di  $Q$  avranno lo stesso ordine dei corrispondenti sottogruppi di  $G$ , talchè *l'ordine di un sottoquasigruppo di  $Q$  è un divisore dell'ordine di  $Q$* . La cosa, notoriamente, non è vera per un quasigruppo finito qualsiasi.

Ed ancora, sempre per  $G$  e  $Q$  finiti, dal § 4 segue che i blocchi di una  $\mathbf{q}_i$  hanno tutti lo stesso numero di elementi, perchè ciò accade per i blocchi delle corrispondenti  $\mathbf{g}_i$ .

Tal numero si dirà l'ordine di  $\mathbf{q}_i$  ed allora si può considerare la funzione  $f(\mathbf{q}_i)$  il cui dominio è il reticolo delle congruenze di  $Q$  ed il codominio cade (senza necessariamente esaurirlo) nell'insieme dei divisori di  $Q$ .

Inoltre, poichè considerati in  $G$  due sottogruppi normali  $G_j$  e

---

<sup>2)</sup> Si deve tener presente che per un quasi gruppo qualsiasi non è neanche vero che una relazione di congruenza individui un sotto-quasigruppo, cosa che invece accade per i gruppi.

$G_k$  esiste isomorfismo tra i gruppi fattoriali  $\frac{G_j \cup G_k}{G_j}$  e  $\frac{G_k}{G_j \cap G_k}$  si ottiene passando a considerare gli ordini delle congruenze di  $G$   $\frac{f(\mathbf{g}_j \cup \mathbf{g}_k)}{f(\mathbf{g}_j)} = \frac{f(\mathbf{g}_k)}{f(\mathbf{g}_j \cap \mathbf{g}_k)}$  e quindi  $f(\mathbf{q}_i \cup \mathbf{q}_k)f(\mathbf{q}_j \cap \mathbf{q}_k) = f(\mathbf{q}_j)f(\mathbf{q}_k)$  che dice essere  $\log f(\mathbf{q}_i)$  una valutazione sul reticolo delle congruenze di  $Q$ .

Infine il teorema di Jordan-Hölder trasportato dal reticolo di  $G$  a quello delle congruenze dell'associato  $Q$  dà in particolare:

*Considerate due catene del reticolo delle congruenze di  $Q$ , discendenti, massimali, con gli stessi estremi, le successioni dei rapporti dell'ordine di ciascuna congruenza rispetto alla seguente, sono costituite, prescindendo dall'ordine, dagli stessi numeri interi <sup>3)</sup>.*

---

<sup>3)</sup> Per altra via si può mostrare che tale risultato vale per ogni quasigruppo finito.