

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

Una rappresentazione topologica delle curve di una superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 18-35

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__18_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__18_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA RAPPRESENTAZIONE TOPOLOGICA DELLE CURVE DI UNA SUPERFICIE

Nota () di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (a Milano)*

1. - Una superficie $\Phi(x, y, z) = 0$ ¹⁾ algebrica d'ordine μ , non passante per il punto improprio Z_∞ dell'asse z , e il relativo piano μ -plo $z = z(x, y)$ vengono topologicamente definiti dando la Riemanniana $\pi - \varphi$ del piano (proiettivo complesso) (x, y) forato lungo la curva $\varphi(x, y) = 0$, diramante il piano μ -plo stesso, accompagnata dal sistema delle sostituzioni (sui μ valori di z) collegate ai vari cicli del gruppo di Poincaré della $\pi - \varphi$ ²⁾.

Appare come presumibile a priori che in questa rappresentazione della Φ possa inserirsi quella di una curva appartenente alla Φ , data mediante la sua proiezione (da Z_∞), $f(x, y) = 0$ ³⁾, sul piano π , coincidente per esempio con $z = 0$: ma subito si incontrano difficoltà in quanto il cilindro $f(x, y) = 0$ sega la Φ secondo una curva f^* , che in generale deve presumersi riducibile in varie componenti ciascuna delle quali ha per proiezione (semplice o multipla) la curva $f(x, y) = 0$ (del piano $z = 0$).

Scopo del presente lavoro è l'analisi approfondita di questa possibile rappresentazione delle curve tracciate su Φ .

Si darà dapprima una descrizione di tale rappresentazione topologica, in forma astratta.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 Maggio 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, Milano.

1) Che indicheremo poi brevemente con Φ .

2) Cfr. [4], [7] — vedi la bibliografia alla fine della nota — o anche il cap. VIII di O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik (1935).

3) Indicheremo poi brevemente con f la curva $f(x, y) = 0$.

In seguito, a determinare concretamente il modello topologico della Φ , verrà assunta la relativa treccia diramante $T(\varphi)$ ⁴⁾ cui viene congiunta la treccia della curva f , cioè verrà assunta la treccia complessiva $T(\sigma)$ della curva unica (ancorchè spezzata) $\sigma = \varphi + f$.

Anzi, a questo proposito, si dovrà introdurre un *ampliamento* del solito concetto di *treccia* di una curva ψ per mettere in evidenza le proprietà della ψ in relazione alla sua immersione nello spazio topologico dato dal piano proiettivo complesso forato lungo una data curva χ (cfr. n. 3) ⁵⁾.

Si dovrà anche introdurre un secondo concetto nuovo, quello di *ciclo di una treccia* (cfr. n. 3).

Si perverrà allora abbastanza facilmente a trovare le singole componenti f_i^* della f^* , e a precisare quella che passi per un certo punto di Φ (con proiezione su f).

Per ciascuna componente (che risulta rappresentata sulla curva multipla $f(x, y) = 0$) si possono allora determinare i punti di diramazione (su f) della corrispondente funzione $z(x, y)$ e conseguentemente il genere.

Si conclude il lavoro con alcuni esempi (per ovvie ragioni di brevità relativi a casi semplicissimi) che mostrano il concreto valore delle considerazioni svolte.

2. - Per le superficie Φ , che considereremo, facciamo la sola ipotesi che esse siano irriducibili e che la relativa curva di diramazione φ risulti semplice (cioè dia luogo a scambi per la funzione $z(x, y)$). Indichiamo con m l'ordine di Φ .

Poi, fissato in $\pi - \varphi$ un generico punto Ω , chiamiamo con $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ i valori (diversi) che $z(x, y)$ assume in Ω .

Data la superficie Φ restano (teoricamente) determinati i cicli del gruppo di Poincaré di $\pi - \varphi$, le relazioni topologiche esistenti fra essi e le sostituzioni che essi operano sui μ va-

⁴⁾ Cfr. n. 1 di [6] e anche il n. 1 di C. MARCHIONNA TIBILETTI, *La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante*, Rend. Acc. Lincei, s. VII, 18 (1955).

⁵⁾ Nella nostra applicazione la ψ sarà la curva f e la χ la curva di diramazione φ .

lori z_s ($s = 1, \dots, \mu$), sostituzioni costituenti il gruppo di monodromia Γ . Secondo le osservazioni di Enriques⁶⁾ e Zariski⁷⁾, per avere tale modello topologico, basta assegnare un sistema di cicli contenuti in una sezione piana (generica) di $\pi - \varphi$ (ad esempio la sezione col piano $x = 0$), legati da certe « relazioni generatrici » e le relative sostituzioni.

Notiamo però che tali relazioni generatrici, e perciò il modello in questione, risultano noti comodamente quando si dia la treccia algebrica della curva φ ⁸⁾.

Osserviamo ancora che queste rappresentazioni topologiche danno, insieme alla Φ iniziale, anche altre superficie Φ' ottenibili da Φ con una trasformazione birazionale, che si riduce ad un'omologia (con centro in Z_∞) per le Φ' non passanti per Z_∞ , cioè per le superficie che abbiamo supposto trattare nel presente lavoro⁹⁾.

Naturalmente la nostra trattazione è invariante rispetto a tali omologie.

Ora ci proponiamo di *rappresentare nel precedente modello topologico le curve di Φ* .

Sia f_1^* una curva data, irriducibile, di Φ ; tale curva viene proiettata da Z_∞ in una curva piana f , del piano (x, y) di ordine n e genere p .

Partendo dalla precedente f_1^* su Φ appare come generico il caso in cui la $z(x, y)$ (definita da Φ) limitata ai punti della f risulti una funzione riducibile in due, di cui una ad un sol valore in relazione ad f_1^* , ed un'altra a $\mu - 1$ valori rappresentante una ulteriore curva f_2^* di Φ , tagliata in $\mu - 1$ punti dalle secanti per Z_∞ .

⁶⁾ Cfr. [4].

⁷⁾ Cfr. [7], o anche il cap. VIII di O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces* l. c.

⁸⁾ Cfr. n. 3 di [5]. Tale treccia diramante non solo è sempre determinabile teoricamente ma, in molti casi, e per ampie categorie di curve, è stata costruita effettivamente o si può facilmente costruire (cfr. ad esempio [3] e [6]).

⁹⁾ Questa ipotesi, che le nostre superficie Φ non passino per Z_∞ , è introdotta per semplificare l'esposizione: il rimuoverla porterebbe a semplici varianti.

Tuttavia dobbiamo considerare come generale il caso in cui la f è proiezione da Z_∞ , oltre che della curva f_1^* anche di altre curve (irriducibili, di Φ) $f_2^*, \dots, f_v^*$.

Ciò posto, veniamo alla rappresentazione delle f_i^* : consideriamo in $\pi - \varphi$ l'insieme dei punti della Riemanniana di f che indichiamo con $f - P_\varphi$ (ove P_φ è il complesso dei punti di φ che stanno anche su f), assumiamo in $f - P_\varphi$ un'origine Ω_1 ¹⁰) e scegliamo una linea (aperta) l che colleghi Ω con Ω_1 (porremo poi Ω , Ω_1 ed l nel piano $x = 0$).

Ogni determinazione z_s ($s = 1, \dots, \mu$) di $z(x, y)$ in Ω , per prolungamento analitico lungo l (da Ω ad Ω_1), diventa una determinazione della $z(x, y)$ in Ω_1 , che chiamiamo z_{1s} (assumendo uguali l'indice di z_s e il secondo indice di z_{1s}).

Ora consideriamo un ciclo $\bar{g}_f$ uscente da Ω_1 e giacente in $f - P_\varphi$; un ciclo g_f ottenuto percorrendo successivamente il cammino l da Ω ad Ω_1 , un ciclo $\bar{g}_f$, e il cammino l^{-1} da Ω_1 ad Ω scambia i valori z_s secondo una sostituzione S_f . Le sostituzioni S_f legate ai vari g_f costituiscono un sottogruppo Γ_f di Γ , che, per generalità, dobbiamo supporre intransitivo.

Le z_{1s} (in Ω_1) per i cicli $\bar{g}_f$ si scambiano ovviamente secondo un gruppo $\bar{\Gamma}_f$, isomorfo a Γ_f . Precisamente tali $\bar{\Gamma}_f$ e Γ_f coincidono se considerati come gruppi di sostituzioni sugli indici s di z_s e z_{1s} , e precisamente $\bar{\Gamma}_f$ è il trasformato di Γ_f con l'operazione — sulle z_s — relativa al cammino $l = \Omega\Omega_1$. Le z_{1s} , per le sostituzioni di $\bar{\Gamma}_f$ risultano divise in sistemi di intransittività che chiamiamo separatamente con $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_v$ e tutti insieme con Σ .

Ciò indica che la $z(x, y)$, quando la si pensi come funzione dei punti della sola curva f (e non dell'intero piano x, y) si spezza in v funzioni $z^{(i)}(x, y)$ ciascuna delle quali ha in Ω_1 i valori z_{1s} contenuti rispettivamente in uno dei sistemi Σ_i ($i = 1, \dots, v$).

Ognuna delle funzioni $z^{(i)}(x, y)$ dà luogo ad una curva irriducibile f_i^* di Φ (che si proietta da Z_∞ in f).

¹⁰) Si potrebbe anche scegliere l'origine Ω coincidente con Ω_1 . Questo modo di procedere può sembrare, a priori, il più semplice; a posteriori invece è risultato più utile distinguere le due origini.

Notiamo anzi che *una sola determinazione z_1 , della $z(x, y)$ definisce il sistema Σ_1 cui appartiene, cioè un punto solo di f_i^* (in corrispondenza al quale si può assumere Ω_1) definisce il relativo Σ_1 .*

3. - Per procedere conviene premettere un'estensione del concetto di treccia algebrica e alcune ulteriori considerazioni sulle trecce che possono essere interessanti per loro stesse, in quanto utili anche per altri problemi.

a) Fino ad ora la treccia di una curva ψ algebrica è stata costruita pensando la curva immersa nel piano proiettivo complesso π (delle variabili x e y) e mettendo pertanto in evidenza i punti critici della funzione $y(x)$ definita dalla ψ .

Per qualche problema (come, per esempio, quello che è oggetto del presente lavoro) può essere necessario rappresentare sulla treccia anche altri punti P notevoli della curva ψ , che risultano intersezioni di ψ con un'altra curva χ del piano π .

Considerata la treccia $T(\psi + \chi)$ della curva (unica anche se riducibile) spezzata in ψ e χ isoleremo in questa l'insieme (ordinato) dei tratti relativi ai punti critici di ψ ed ai punti P_χ comuni a ψ e χ . Questo insieme di tratti costituisce la *treccia $T(\psi - P_\chi)$, ampliata rispetto alla solita treccia $T(\psi)$ di ψ , che mette in evidenza anche i punti di ψ staccati dalla curva χ .*

La $T(\psi - P_\chi)$ viene a rappresentare la curva ψ come contenuta nello spazio topologico costituito dal piano π forato secondo la curva ψ .

b) Sia data una curva (piana) ψ e sia T una sua treccia, eventualmente anche ampliata¹¹⁾ (costruita con le solite convenzioni). Chiamiamo *arco* di treccia la parte τ di un filo contenuto in un tratto di T , parte che si immagina percorsa da uno (considerato nei vari casi come primo) all'altro estremo (essendo posti questi estremi su due setti adiacenti)¹²⁾.

¹¹⁾ Cfr. il comma *a*) di questo stesso paragrafo.

¹²⁾ Tale parte τ di filo è descritta da un y_i quando x descrive un cappio λ di π_x .

Notiamo che il punto di ψ di coordinate $x=0$ ed $y=y_r$ (essendo $x=0$ l'origine dei cappi costruttori di T appartenenti al piano π_r) viene rappresentato sulla treccia sopra ciascuno dei suoi setti in una medesima posizione (che indichiamo ancora con y_r). Allora diciamo che due archi di una treccia (anche non appartenenti a tratti consecutivi) sono *connessi* quando il secondo estremo (concepito come coppia x, y) di uno di essi coincide col primo estremo dell'altro.

Indichiamo con il nome *insieme connesso di archi di treccia* un insieme ordinato di archi tali che due archi consecutivi sono connessi¹³⁾.

Un insieme connesso di archi di treccia si dirà *chiuso* se anche il primo e l'ultimo arco vengono connessi nei loro estremi rimasti liberi. Chiameremo col nome di *ciclo di una treccia* un tale insieme connesso chiuso di archi di treccia: questo nome di ciclo è giustificato dal fatto che i suddetti insiemi chiusi di archi rappresentano cicli della Riemanniana di ψ ¹⁴⁾.

4. - Vogliamo ora *determinare, nel precedente modello topologico*, (cfr. n. 2) *le curve di Φ che si proiettano (da Z_∞) in una curva piana f data.*

A tal fine, *diamo il modello topologico di Φ mediante la treccia diramante $T(\varphi)$ ed inoltre assegnamo la treccia $T(\sigma)$ della curva $\sigma = \varphi + f$ composta dalle curve φ ed f .*

Premettiamo la nomenclatura necessaria.

¹³⁾ Avvertiamo che l'ordine dei tratti in cui vengono qui presi gli archi consecutivi può non essere quello dei successivi tratti della treccia e che in un insieme connesso di archi uno stesso tratto può comparire più volte in posizioni diverse e con archi uguali o diversi.

¹⁴⁾ Tali cicli della treccia rappresentano cicli della Riemanniana della curva ψ che risultano ora dati da vari archi anche non consecutivi, sulla treccia T (ma connessi sulla Riemanniana di ψ) similmente a quanto accade sul modello della Riemanniana di ψ costituito da un poligono di $4p$ lati, ove pure un ciclo è rappresentato da una somma di archi di linee sconnessi sul modello (e connessi sulla Riemanniana di ψ). Cfr. ENRIQUES, CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, cap. III, n. 38, Bologna (1924).

Chiamiamo x_σ i punti critici della funzione $y = y(x)$ definita da σ , segnati nel piano π_x della variazione complessa x : essi sono dati precisamente dai punti x_φ critici della $y(x)$ definita da φ , dai punti critici x_f della $y(x)$ definita da f e dai punti $x_{\varphi f}$ ascisse delle intersezioni di φ ed f . Indichiamo con O un'origine, generica ma fissata, sul piano π_x (data per esempio, da $x = 0$) e con λ i soliti cappi (orientati) uscenti da O ed avvolgenti i suddetti punti critici x_σ , che servono per costruire la treccia $T(\sigma)$ ¹⁵). Distinguiamo tali cappi con i nomi λ_φ , λ_f , e $\lambda_{\varphi f}$ in relazione ai punti critici x_φ , x_f , $x_{\varphi f}$ che essi avvolgono; i corrispondenti tratti della treccia verranno chiamati t_φ , t_f , $t_{\varphi f}$.

Precisamente: i tratti t_φ (presi nell'ordine in cui si trovano su $T(\sigma)$) danno la treccia $T(\varphi)$ della curva φ , quando da essi si tolgano i fili di f , ed analogamente i tratti t_f (ordinati come in $T(\sigma)$ ed a prescindere dai fili di φ) danno la treccia $T(f)$ della curva f . Infine, per le considerazioni del n. 3 a), l'insieme dei tratti t_f e $t_{\varphi f}$ (presi nell'ordine in cui si trovano in $T(\sigma)$) dà la treccia ampliata $T(f - P_\varphi)$.

Sul piano della variabile complessa y siano $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ ed $y_1, y_2, \dots, y_n$ i punti che danno i valori della $y(x)$ definita rispettivamente da φ ed f in $x = 0$: indichiamo con $\pi_y(0)$ tale piano della variabile y . Sono i suddetti punti η_j ($j = 1, \dots, m$) ed y_r ($r = 1, \dots, n$) che, quando x descrive i precedenti cappi λ , muovendosi (in una col piano $\pi_y(x)$ della variabile y che li contiene) generano i fili della treccia $T(\sigma)$.

L'origine Ω su $\pi - \varphi$, indicata nel n. 2, l'assumiamo ora nel punto $x = 0$ ed $y = \infty$ (punto che sta su tutti i piani $x = \text{cost.}$).

Chiamiamo poi con $\gamma(\eta_j)$ i cappi di $\pi_y(0)$ intorno ai punti η_j ($j = 1, \dots, m$) aventi origine in Y_∞ ¹⁶), disposti parallelamente all'asse immaginario e supposti tutti provenienti dalla sua parte negativa: tali cappi operano con sostituzioni S (note) sulle fissate determinazioni $z_1, z_2, \dots, z_y$ della $z(z, y)$ — in Ω —.

¹⁵) Cfr. n. 3 di [1].

¹⁶) Cfr. [2] a pag. 767.

Scegliamo l'origine Ω_1 su $f - P_\varphi$ (cfr. n. 2) nel punto di coordinate $x=0$ ed $y=y_1$ e scegliamo il cammino $l = \Omega\Omega_1$, sul piano $\pi_y(0)$, parallelo all'asse immaginario, in modo analogo ai suddetti cappi $\gamma(\eta_j)$; il cammino l varierà, come i cappi $\gamma(\eta_j)$ ¹⁷⁾ quando il piano $\pi_y(0)$ — per generare la treccia $T(\sigma)$ — si muove parallelamente a se stesso, divenendo un generico piano $\pi_y(x)$.

In seguito sarà utile considerare sul piano $\pi_y(0)$ dei cammini l_r ($r=1, \dots, n$) analoghi ad l , paralleli all'asse immaginario, che vanno da Y_∞ ad uno qualsiasi dei punti y_r (porremo $l_1 = l$)¹⁸⁾.

Le determinazioni z_{1s} ($s=1, \dots, \mu$) sono state ottenute (cfr. n. 2) rispettivamente dalle z_s per prolungamento analitico lungo $l = l_1$; analogamente indichiamo ora con z_{rs} la determinazione della $z(x, y)$ in $x=0, y=y_r$ ottenuta prolungando la z_s (in Ω) lungo l_r . Notiamo esplicitamente che il primo indice r di z_{rs} è uguale a quello dell'ordinata y_r del punto $x=0, y=y_r$ in cui viene calcolata la z_{rs} stessa, il secondo indice s è quello della z_s da cui z_{rs} proviene per prolungamento analitico lungo l_r .

Con questa nomenclatura una determinazione z_{hs} diventa la determinazione z_{ks} (con lo stesso indice s) per il cammino ottenuto percorrendo successivamente l_h^{-1} ed l_k .

Tutti i μn valori z_{rs} ($r=1, \dots, n; s=1, \dots, \mu$) sono le determinazioni, in $x=0$ della $z(x, y)$ pensata come funzione del punto della f , cioè come funzione $z = z(x, y(x))$, della x , oltre che direttamente, anche tramite la $y = y(x)$ definita da f .

5. Diamo ora alcuni teoremi semplici ma essenziali.

TEOREMA 1. *Ogni ciclo della Riemanniana $f - P_\varphi$ di origine Ω_1 , si riduce ad un ciclo della treccia $T(f - P^\varphi)$.*

¹⁷⁾ Cfr. [2].

¹⁸⁾ Possiamo sempre pensare, data la genericità di Ω , che due punti y_r del piano $\pi_y(0)$ non stiano mai sulla stessa parallela all'asse immaginario. Così i vari l_r , su $\pi_y(0)$, risultano distinti.

Per la dimostrazione di tale teorema notiamo che ogni ciclo C di $f - P_\varphi$, uscente da Ω_1 , quando si consideri lungo esso solo la variazione della x , dà luogo ad un ciclo C_x del piano π_x ¹⁹⁾.

Ora un tale C_x è riducibile ad una somma di certi cappi λ_f e $\lambda_{\varphi f}$ percorsi successivamente in un certo ordine. Tenendo conto anche della variazione della y su C (a partire da $y = y_1$ in $\pi_y(0)$) lo stesso ciclo viene rappresentato dal percorso di un punto F di f che parte da y_1 e si muove successivamente — sui vari piani $\pi_y(x)$ — nei tratti t_f e $t_{\varphi f}$ corrispondenti ai suddetti cappi λ_f e $\lambda_{\varphi f}$.

Ora il percorso di F in ciascuno dei suddetti tratti è dato da un filo della treccia $T(f - P_\varphi)$ relativo alla f e ciò per la stessa definizione di treccia.

Viceversa un ciclo della treccia $T(f - P_\varphi)$ dà un ciclo C di $f - P_\varphi$.

TEOREMA 2. *Quando un punto F descrive un arco di treccia, appartenente ad un tratto t_f o $t_{\varphi f}$, che collega un punto y_h con un punto y_k (k eventualmente anche uguale ad h) i valori z_{h_s} di z si mutano nei valori z_{k_s} secondo una sostituzione sui secondi indici s , definita dai fili di ψ che risultano tagliare la linea $l = \Omega F$.*

Ciò dipende dal fatto che quando un filo di φ viene a tagliare il cammino $l = \Omega F$ al cammino stesso si somma un ciclo infinitesimo intorno a un filo di φ ²⁰⁾.

Pertanto, indicata con S la sostituzione sulle determinazioni z_s (in Ω) portata dal suddetto filo di φ , nel punto²¹⁾ in cui taglia $l = \Omega F$, le determinazioni z_{rs} di z relative ad F si mutano secondo una sostituzione che opera sui secondi indici come la S sugli indici delle z_s .

¹⁹⁾ In sostanza C_x è una proiezione di C sul piano della variabile complessa x .

²⁰⁾ Cfr. per esempio [4] e [2].

²¹⁾ Come è noto, ciascun punto della $T(\varphi)$ è concepito come centro di un cappio cui è legata una sostituzione sulle z che cambia quando il cappio stesso, spostandosi, è tagliato da un altro filo della $T(\varphi)$ stessa.

TEOREMA 3. *Tutti e soli i valori z_{1i} della $z(x, y)$ legati al punto Ω_1 di $f - P_{\zeta}$ e relativi ad una stessa curva irriducibile f_i^* di Φ , che si proietta da Z_{∞} in f , sono quelli che si mutano gli uni negli altri percorrendo tutti i cicli della treccia $T(f - P_{\zeta})$ aventi origine e termine in y_1 .*

Tale proposizione segue ovviamente dai teoremi 1 e 2 in quanto i cicli della treccia $T(f - P_{\zeta})$ in esame costituiscono un sistema completo (che può servire da base) per tutti i cicli di $f - P_{\zeta}$ uscenti da Ω_1 .

6. - Vogliamo ora indicare come si possa procedere praticamente alla determinazione dei suddetti sistemi di intransitività Σ_i ($i = 1, \dots, \nu$) legati ad y_1 , quando siano date la treccia diramante $T(\varphi)$ e la treccia $T(\sigma)$.

a) Per esempio si può fissare un sistema (base) di $2p$ cicli Riemanniani C_j (indipendenti) di f , uscenti da Ω_1 : ciò risulta facile a partire dalla treccia $T(\varphi)$ soprattutto nei casi in cui la $T(f)$ è data in relazione ad una forma canonica del gruppo di monodromia della $y(x)$ definita da f^{22} .

Si devono considerare poi i cicli $C_{\varphi f}$ di f , uscenti da Ω_1 (e nulli su f) che circondano rispettivamente ciascuno dei punti P_{φ} di φ che stanno su f .

Il modo di operare di tali cicli $C_{\varphi f}$, uscenti da Ω_1 , si rileva dall'esame (in base al teorema 2) dei soli tratti $t_{\zeta f}$ di $T(\sigma)$. Per precisare in che consiste questo esame notiamo che in un tratto $t_{\varphi f}$ vi è un filo di f tale che, una volta tolto, i rimanenti fili del tratto risultano non avere più alcuna torsione fra loro. Tale filo di f corrisponde al ramo della curva f stessa che si incontra con φ nel punto P_{ζ} definitore del suddetto tratto $t_{\zeta f}$ ed ha entrambi gli estremi (sui due setti di $t_{\zeta f}$) in un punto y_r (con lo stesso indice r).

Chiamiamo con τ_r l'arco dato dal precedente filo di f considerato entro lo stesso tratto $t_{\zeta f}$.

²²⁾ In questo ordine di idee cfr. per esempio: C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Treccie relative a forme canoniche del gruppo di monodromia*, Rend. Ist. Lombardo, 88 (1955).

Quando $y_r = y_1$ il relativo arco τ_1 dà un ciclo $C_{\varphi f}$, quando poi $y_r \neq y_1$ l'arco τ_r dà un ciclo $\bar{C}_{\varphi f}$ circondante un punto P_φ (e nullo su f) ma non uscente da Ω_1 . In quest'ultimo caso per avere un effettivo ciclo $C_{\varphi f}$ occorre prendere successivamente i cammini l_1^{-1} , l_r , τ_r , l_r^{-1} , l_1 . Però, dato il modo in cui è stata fissata la nomenclatura, il ciclo $\bar{C}_{\varphi f}$ opera sui secondi indici delle z_{rs} (fermo restando il primo indice) così come opera $C_{\varphi f}$ sui secondi indici delle z_{1s} . In ogni caso i suddetti archi τ_r relativi ai vari tratti t_r danno il modo di operare di tutti i cicli $C_{\varphi f}$.

I precedenti cicli C_f e $C_{\varphi f}$ formano una base di $f - P_\varphi$; pertanto per avere i sistemi di intransitività Σ_i basta rilevare dalla treccia come essi operano sulle μ determinazioni z_{1s} (in y_1).

b) Qualora, per la forma data della $T(f)$, fosse scomodo ricercare una base dei cicli di $f - P_\varphi$ alla ricerca dei precedenti sistemi Σ_i si può procedere nel modo seguente.

Consideriamo le suddette μn determinazioni z_{rs} ($r = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, \mu$) e tutti gli archi forniti dai vari tratti di $T(f - P_\varphi)$. In base al teorema 2 rileviamo dall'andamento di tali archi (in relazione al loro percorso ed ai fili di φ che si avvolgono ad essi) le corrispondenti sostituzioni sulle z_{rs} . L'insieme I di queste sostituzioni genera (per prodotto) il gruppo G (imprimitivo ed intransitivo, in generale) di tutte le sostituzioni sulle z_{rs} per i cammini di $f - P_\varphi$. Dal modo di operare dell'insieme I (o meglio del gruppo G) otteniamo i sistemi di intransitività Σ_i legati ad y_1 .

Dal punto di vista pratico per avere facilmente il modo di operare delle sostituzioni di I (e di G) possiamo procedere come segue.

Rappresentiamo le determinazioni z_{rs} con dei punti disposti in righe e colonne: in una stessa riga sono posti i punti rappresentativi delle z_{rs} cui compete lo stesso valore di r ed in una stessa colonna quelli rappresentativi delle z_{rs} con lo stesso valore di s . Segnamo poi le linee colleganti i punti z_{rs} che man mano vengono mutati gli uni negli altri per i tratti di $T(f - P_\varphi)$ — cioè per le sostituzioni di I —.

Indicheremo precisamente ed useremo tale schema nei successivi esempi (cfr. n. 8).

Risultano appartenere ad uno stesso sistema di intransitività Σ_i , cioè ad una stessa curva f_i^* (di Φ), i valori z_r , che vengono congiunti con un cammino ottenuto con le suddette linee colleganti; così dallo schema precedente si rilevano i sistemi di intransitività Σ_i legati ad y_1 .

Il procedimento contiene in sè buone verifiche, infatti quello che succede per y_1 deve accadere anche per ogni altro y_r .

7. - Consideriamo le varie componenti $z^{(i)}(x, y)$ ($i=1, \dots, v$) della funzione $z(x, y)$ definita su f e relative rispettivamente alle varie curve (irriducibili) f_i^* della superficie.

Osserviamo che i punti P_φ comuni alle curve f e φ in cui vi sia un contatto di ordine dispari fra la φ e un ramo (lineare o superlineare) di f non generano su f un punto di diramazione per alcuna delle precedenti funzioni $z^{(i)}(x, y)$.

Allora si tratta di vedere per quale $z^{(i)}(x, y)$ è di diramazione ciascuno dei punti P_φ (che non risultino non diramanti per le regioni suesposte). Ciò appare dall'esame dei corrispondenti tratti $t_{\varphi f}$ di $T(f - P_\varphi)$: se per uno di tali tratti risulta variato l'indice s delle z_r relative ad una certa $z^{(i)}(x, y)$ allora lo stesso tratto dà un punto di diramazione effettiva per la stessa $z^{(i)}(x, y)$ su f .

Dal modello in esame si ottengono così i punti di diramazione su f di ogni $z^{(i)}(x, y)$ e in particolare risulta quando una $z^{(i)}(x, y)$ è senza punti di diramazioni su f .

Le osservazioni precedenti conducono alla *valutazione del genere p_i della f_i^** , tramite la notissima formula di Zeuthen²³):

$$p_i = h_i(\pi - 1) + 1 + \frac{\delta}{2}$$

ove π è il genere di f , h_i il numero dei valori della $z^{(i)}(x, y)$ su f , δ il numero dei punti di diramazione della stessa $z^{(i)}(x, y)$ e p_i il genere di f_i^* .

²³) Cfr. ad esempio cap. IV, n. 38 di ENRIQUES e CHISINI, *Teoria geometrica, ecc.*, I. c.

A partire dai nostri dati sono noti o conoscibili i numeri π , h_1 e δ .

8. - Diamo ora alcuni esempi di applicazione del criterio indicato nel precedente n. 6.

Nella descrizione relativa a tali casi non ci soffermeremo, per ragioni di brevità, sui particolari costruttivi delle trecce in questione (ne daremo solo qualche cenno, in nota).

a) Sia una quadrica Φ_2 e φ_2 la conica che è sua curva diramante. Consideriamo la curva $\sigma = \varphi_2 + f_3$ ove f_3 è una cubica nodata tritangente alla conica φ_2 .

La fig. 1 dà la relativa treccia $T(\sigma)$ ²⁴⁾.

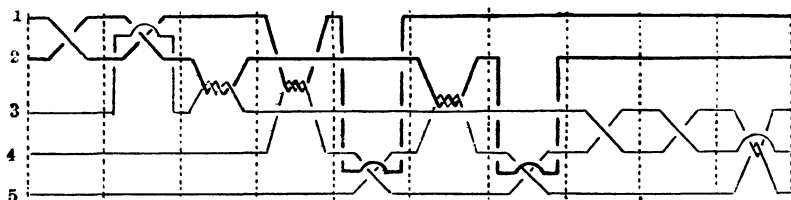


Fig. 1

Precisamente i primi due fili — quelli che escono, all'inizio della treccia, dai punti indicati con 1 e 2 —, presi da soli, danno la treccia della φ_2 ; gli altri tre fili — uscenti dai posti 3, 4, 5 — danno, presi da soli, la treccia della f_3 .

I posti 3, 4, 5 sui vari setti della fig. 1 danno rispettivamente i punti indicati sopra con y_1 , y_2 , y_3 .

Sui fili della treccia $T(\varphi)$, in $T(\sigma)$, sono deposte ²⁵⁾ le sostituzioni $(z_1 z_2)$ relative alle determinazioni della funzione $z = z(x, y)$ data dalla Φ_2 .

Usiamo ora il criterio b) indicato nel precedente n. 6 per trovare le curve di Φ_2 che si proiettano in f .

²⁴⁾ Una tale treccia si costruisce facilmente a partire dalla forma limite data da una conica e tre sue tangenti (Cfr. ad esempio [6], per costruzioni analoghe).

²⁵⁾ Cfr. il cap. II di [6].

I nomi delle determinazioni della $z(x, y)$ siano fissati come è indicato nel n. 5 e siano precisamente:

$$(I) \quad \begin{array}{ll} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ z_{31} & z_{32} \end{array}$$

Ora i due tratti (uguali) 5° e 7° della treccia $T(\sigma)$ — v. fig. 1 — danno, per il teorema 2. la sostituzione $(z_{21}z_{32})(z_{22}z_{31})$ in quanto il filo uscente da y_2 sul primo setto perviene al posto y_3 sul secondo setto essendo avvolto — per un sol giro — da un filo di φ , e il filo uscente da y_3 giunge in y_2 sul secondo setto essendo ancora avvolto — per un giro — da un filo di φ .

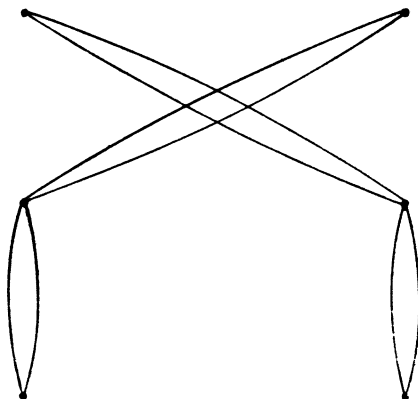


Fig. 2

I tratti (uguali) 8° e 9° danno la sostituzione $(z_{11}z_{21})(z_{12}z_{22})$ in quanto il filo uscente da $y_1[y_2]$ sul primo setto giunge in $y_2[y_1]$ sul secondo setto.

Gli altri tratti t_f e t_{zf} danno l'identità sulle z_{rs} : precisamente: i tratti 3°, 4° e 6° la danno in virtù del teorema 2 per il numero pari degli avvolgimenti con i fili di φ che compaiono in essi e l'ultimo tratto di $T(\sigma)$ dà pure l'identità perchè in esso non vi sono avvolgimenti con fili di φ ed ogni filo ha la stessa posizione sul primo e sull'ultimo setto.

Segnamo tali risultati nello schema della fig. 2: precisamente in tale schema i punti segnati con un tondino indicano

ordinatamente i valori della tabella (I) e le linee che uniscono due di tali punti indicano le sostituzioni sopra trovate che portano una nell'altra le determinazioni rappresentate dagli stessi due punti.

Sullo schema della fig. 2 si vede subito che i sistemi di intransitività legati al punto y_1 sono due, costituiti ciascuno da un solo elemento. Pertanto la curva f_3 in esame è proiezione di due curve (cubiche gobbe) della quadrica Φ_2 .

OSSERVAZIONE. Possiamo considerare il caso in cui f_3 non ha il punto doppio pur rimanendo tritangente a φ_2 , oppure quello in cui f_3 non è più tangente a φ_2 in tutti i punti comuni.

Le relative trecce ²⁰⁾ differiscono dalla $T(\sigma)$ della fig. 1 nel modo seguente: nell'ipotesi della mancanza del punto doppio l'ultimo tratto è spezzato in due tratti ugualmente canonici corrispondenti ciascuno ad una diramazione semplice; nel caso poi in cui manca uno dei suddetti contatti di f_3 e φ_2 il corrispondente tratto (sia il 3° o il 4° o il 6° della fig. 1) è diviso in due tratti uguali ciascuno rappresentativo di un nodo.

Si verifica subito che in entrambi questi casi è legato ad y_1 un unico sistema di intransitività Σ_i formato dai due elementi z_{11} , z_{12} : cioè la f_3 è allora proiezione di una sestica irriducibile di Φ_2 .

Si vede anche dall'esame della treccia che quando f_3 è di genere 1 e tritangente a φ_2 la $z(x, y)$ definita su f_3 (a due valori) è senza punti di diramazione (i tre punti di contatto di f_3 e φ_2 risultano punti di diramazione apparente).

In questi vari casi si trova subito, in base al n. 7, il genere della sestica di Φ_2 che si proietta in f_3 .

b) Consideriamo la superficie generale Φ_3 del terz'ordine. La treccia $T(\sigma)$ della fig. 3 (disegnata su due righe) è rappresentativa della curva $\sigma = \varphi_6 + f_1$ ove φ_6 è la curva diramante il piano multiplo dato dalla suddetta superficie Φ^3

²⁰⁾ Queste trecce si possono costruire ancora a partire dalla forma limite data da una conica e 3 rette tangenti o no a φ_2 (v. nota ²⁴⁾).

proiettata da un punto (Z_∞) esterno, e la f_1 è una retta bitangente a φ_6 ²⁷⁾.

Il filo uscente dal posto indicato con 7 compete ad f_1 ed i fili uscenti dagli altri posti rappresentano, da soli, la treccia $T(\varphi)$ di φ_6 . Come è noto ²⁸⁾ nei posti 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono deposte rispettivamente le sostituzioni

$$(z_1 z_2) \quad (z_1 z_2) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3).$$

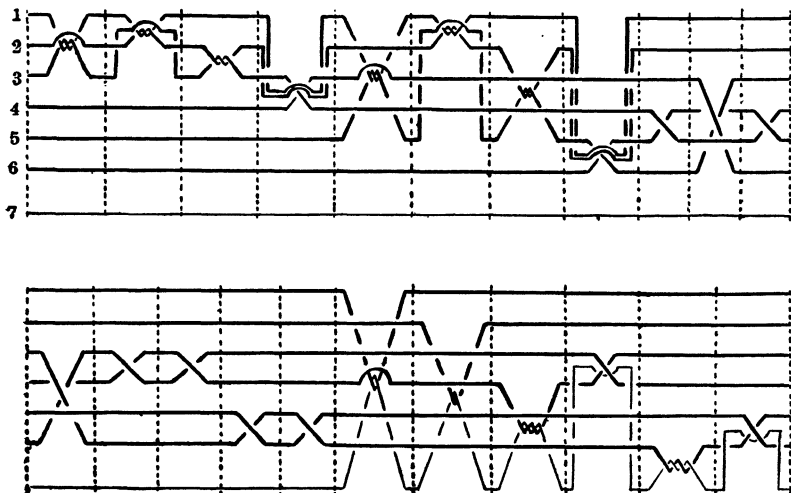


Fig 3

Operiamo anche qui con il criterio b) del n. 6: siano

$$(II) \quad z_{11} \quad z_{12} \quad z_{13}$$

le determinazioni della $z(x, y)$ nel punto $x=0, y=y_1$ (rappresentato sulla fig. 3, nei vari setti, dal posto 7).

Lo schema, analogo a quello dell'esempio a) precedente, è ora rappresentato dalla fig. 4 ove i punti (segnati con tondini) indicano rispettivamente le tre determinazioni di (II)

²⁷⁾ Tale treccia è ottenuta aggiungendo opportunamente a quella di φ_6 (che è nota, cfr. [5] cap. I) un filo rappresentativo di f_1 in modo che la f_1 sia bitangente a φ_6 .

²⁸⁾ Cfr. il cap. II di [6].

Qui in virtù del teorema 2, solo i tratti 17° e 18° operano sulle z_{rs} con sostituzioni diverse dall'identità e precisamente con lo scambio $(z_{11}z_{12})$.

Dall'esame della fig. 4 risulta che i sistemi d'intransitività legati al punto y_1 sono due, dati rispettivamente dalle due determinazioni z_{11} , z_{12} e dall'unica determinazione z_{13} .

La f_1 è pertanto proiezione di una conica e di una retta di Φ_3 .

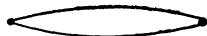


Fig. 4

OSSERVAZIONI. Notiamo (cfr. n. 6) che i punti del piano corrispondenti ai nodi $(17)^2$ e $(27)^2$ della treccia sono effettivi punti di diramazione per la funzione a due valori che dà la suddetta conica di Φ_3 (e ciò per il modo di operare dei relativi tratti $t_{\phi f}$).

Inoltre, anche qui, come nell'esempio precedente, si vede subito che se la f_1 non è tangente in due punti alla ϕ_6 (la treccia $T(\sigma)$ risulta allora quella della fig. 3 in cui uno o entrambi i tratti quartultimo e penultimo sono divisi in due ulteriori tratti canonici, uguali, rappresentativi di nodi) il sistema di intransitività legato ad y_1 è costituito da tutte e tre le determinazioni z_{11} , z_{12} , z_{13} della $z(x, y)$.

In queste circostanze la f_1 è solo proiezione di una cubica (piana) di Φ_3 .

In base al n. 7 si vede dall'esame della treccia che quando f_1 è tangente in un punto a ϕ_6 la suddetta cubica di Φ_3 ha genere 0 e quando la f_1 non è tangente a ϕ_6 la stessa cubica di Φ_3 ha genere 1²⁹).

²⁹) Nel primo caso si hanno 4 punti di diramazione della funzione $z(x, y)$ definita su f_1 dati rispettivamente, sulla fig. 3, dai tratti 17° , 18° e da uno dei tratti quartultimo o penultimo diviso in due tratti rappresentativi di nodi (come è detto sopra nel testo).

Nel secondo caso, in cui f_1 non è tangente a ϕ_6 si hanno 6 punti di diramazione dati (sempre sulla fig. 3) dai tratti 17° , 18° e dai tratti quartultimo e penultimo entrambi divisi in due tratti rappresentativi di nodi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, Rend. Ist. Lombardo **66** (1933).
- [2] O. CHISINI, *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, note I e II, Rend. Acc. Lincei, s. 6, **19** (1934).
- [3] M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*, Rend. Ist. Lombardo, **83** (1950).
- [4] F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Annali di Matematica, s. IV, **1** (1923).
- [5] E. MARCHIONNA, *Sul gruppo fondamentale di una curva algebrica. Applicazioni alle superficie multiple prive di curva diramante*, Annali di Matematica, s. IV, **41** (1955).
- [6] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Trecce algebriche di curve di diramazione: costruzioni ed applicazioni*, Rend. Sem. Matem. di Padova, **24** (1955).
- [7] O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, American Journal of Math., **51** (1929).