RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Sulla teoria del potenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 510-522

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__510_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLA TEORIA DEL POTENZIALE

Nota di ENRICO MAGENES (*a Modena*)

In questa nota prenderò in considerazione il comportamento alla frontiera del potenziale di doppio strato obliquo e della derivata obliqua del potenziale di semplice strato (ordinari e generalizzati) con momento e densità solamente sommabili e gli integrali principali connessi; e dimostrerò la validità delle classiche relazioni limiti anche nelle nuove ipotesi sulle densità e i momenti, mettendo inoltre in relazione i problemi e i risultati con recenti lavori di A. P. CALDERON e A. ZYGMUND [2] [1]), di S. G. MIHLIN [7] e miei [6].

1. - Sia D un dominio limitato e a connessione superficiale semplice dello spazio (x, y, z) euclideo, la cui frontiera F sia dotata di piano tangente e curvature continue; nell'intorno di ogni suo punto M la frontiera si può rappresentare allora, prendendo come piano (x, y) il piano tangente in M e come asse z l'asse n_M normale interno a F in M, mediante l'equazione $z = f(x, y)$, dove $f(x, y)$ è funzione continua con le sue derivate prime e seconde in un intorno dello zero. Per ogni punto M di F sia definito un asse l_M, non situato sul piano tangente a F in M e penetrante in D, i cui coseni direttori siano funzioni hölderiane di M su F.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 novembre 1955.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale del presente lavoro.

Sia poi $\varphi(Q)$ una funzione sommabile su F e si consideri il potenziale di semplice strato

$$u(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma_Q . \tag{1}$$

È ben noto (v. [1] oppure il volume [8] di C. MIRANDA, al quale pure rinvio fin d'ora per ogni risultato noto sulla teoria del potenziale e delle equazioni ellittiche che interessi in seguito) che, se $\varphi(Q)$ è anche hölderiana su F, per ogni punto M di F vale la relazione limite

$$\lim_{P \to M \text{ (su } \pm n_M)} \frac{du(P)}{dl_M} = \mp 2\pi \cos(n_M, l_M)\varphi(M) + \tag{2}$$

$$+ \int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{MQ} d\sigma_Q$$

dove $+n_M$ sta ad indicare l'asse n_M stesso e $-n_M$ l'asse opposto e l'integrale $\int_F^*$ è un integrale principale di CAUCHY, quando si assumano come « domini di esclusione » le porzioni di superficie staccate su F dai cilindri circolari retti aventi per asse n_M.

Proponiamoci ora di estendere la (2) al caso che $\varphi(Q)$ sia solo *sommabile* su F. Si pongono allora anzitutto due problemi: *dimostrare l'esistenza del limite a primo membro della* (2) *e dimostrare l'esistenza dell'integrale principale a secondo membro della* (2)..

I due problemi sono però in strettissima relazione. Si può infatti facilmente dimostrare, come ora faremo, estendendo semplici calcoli già svolti da A. ZYGMUND e A. P. CALDERON [2] nel caso che F sia un piano, che *per quasi-tutti i punti M di F l'esistenza del limite e quella dell'integrale principale sono due fatti equivalenti;* e precisamente ciò avviene in tutti i cosidetti punti di LEBESGUE per la funzione φ[2].

---

[2]) Tali sono i punti nei quali l'integrale $\int_B |\varphi(Q) - \varphi(M)| d\sigma_Q$ (B boreliano di F) ha per derivata lo zero.

Sia infatti M un tale punto. Assunta nell'intorno di M la rappresentazione $z = f(x, y)$, di cui si è sopra detto, indichiamo per $r > 0$ con Γ_r il cerchio del piano (x, y) di equazione $x^2 + y^2 \leq r^2$ e con F_r la porzione di F che si proietta ortogonalmente su Γ_r. Supponiamo anche, per semplicità e senza per questo ledere la generalità [3]), che sia $\varphi(M) = 0$; allora in quanto M è un punto di LEBESGUE per φ, si ha

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{F_r} |\varphi(Q)| \, d\sigma_Q}{r^2} = 0 . \tag{3}$$

Per le proprietà ammesse sulla funzione $f(x, y)$ è possibile determinare quattro numeri positivi R, H, p e q, con $R < 1$, tali che per ogni (x, y) di Γ_R e qualunque sia il numero z, si abbia, posto $\rho = + \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|f(x, y)| < H\rho^2 < H\rho \quad , \quad |f_x(x, y)| < H\rho \quad , \quad |f_y(x, y)| < H\rho \tag{4}$$

$$p(\rho^2 + z^2) < \rho^2 + (z - f(x, y))^2 < q(\rho^2 + z^2) \quad [4]) . \tag{5}$$

Supponiamo ora il punto P su n_M e per fissare le idee sia esso interno a D e dunque $P \equiv (0, 0, z)$ con $z > 0$; potremo anche supporre $z < R$. Indichiamo con α, β, γ i coseni direttori di l_M e con $\Gamma_{R,z}$ la corona circolare di equazioni $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

Si ha allora, posto per semplicità $\varphi(x, y) = \varphi(Q)$, se Q è il punto di F di cordinate $(x, y, f(x, y))$,

$$\frac{du(P)}{dl_M} = \int_{F - F_R} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{\overline{PQ}} \, d\sigma_Q + \tag{6}$$

---

[3]) Basta ricordare che la (2) vale se φ è costante e scomporre $u(P)$ nella somma

$$\int_F [\varphi(Q) - \varphi(M)] \frac{1}{\overline{PQ}} \, d\sigma_Q + \int_F \varphi(M) \frac{1}{\overline{PQ}} \, d\sigma_Q .$$

[4]) I calcoli sono elementari e trovansi già svolti ad es. in [4] pag. 10-11.

$$+\iint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \varphi(x,\ y)\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma(f(x,\ y)-z)}{[x^2+y^2+(z-\ (x,\ y))^2]^{3/2}}\,\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy+$$

$$+\iint_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(x,\ y)\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma(f(x,\ y)-z)}{[x^2+y^2+(z-f(x,\ y))^2]^{3/2}}\,\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

Si osservi poi che, per definizione, l'integrale principale $\overset{*}{\int_F} \varphi(Q)\,\frac{d}{dl_M}\,\frac{1}{MQ}\,d\sigma_Q$ è il limite, se esiste finito,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{F-F_\varepsilon} \varphi(Q)\,\frac{d}{dl_M}\,\frac{1}{MQ}\,d\sigma_Q$$

cioè anche

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\int_{F-F_R} \varphi(Q)\,\frac{d}{dl_M}\,\frac{1}{MQ}\,d\sigma_Q+ \tag{7}$$

$$+\iint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \varphi(x,\ y)\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma f(x,\ y)}{[x^2+y^2+f^2(x,\ y)]^{3/2}}\,\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy\Big\}.$$

L'equivalenza sopra enunciata sarà dunque ovviamente dimostrata quando si siano dimostrate le due seguenti relazioni

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(x,\ y)\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma(f(x,\ y)-z)}{[x^2+y^2+(z-f(x,\ y))^2]^{3/2}}\,\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=0 \tag{8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \varphi(x,\ y)\left[\frac{\alpha x+\beta y+\gamma(f(x,\ y)-z)}{x^2+y^2+(z-f(x,\ y))^2]^{3/2}}-\right. \tag{9}$$

$$\left.-\frac{\alpha x+\beta y+\gamma f(x,\ y)}{[x^2+y^2+f^2(x,\ y)]^{3/2}}\right]\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=0.$$

Per dimostrare la (8), posto $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, indichiamo con $\chi(\rho,\vartheta)$ la funzione $|\varphi(x,y)|\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ espressa

mediante le variabili ρ e ϑ; tenendo presenti le (5), si ha

$$(10)\quad \left|\iint_{\Gamma_z}\varphi(x,\,y)\frac{\alpha x+\beta y}{[x^2+y^2+(z-f(x\;\;y))^2]^{3/2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy\right|\leq$$

$$\leq 2\int_0^z\int_0^{2\pi}\frac{\chi(\rho,\,\vartheta)\rho}{p^{3/2}[\rho^2+z^2]^{3/2}}\,\rho d\rho d\vartheta\,.$$

Introdotta la funzione

$$\psi(\rho)=\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\chi(r,\,\vartheta)rdrd\vartheta \qquad 0\leq\rho\leq R$$

si ha, per la (3), $\psi(\rho)=o(\rho^2)$ [5]; inoltre è $\psi'(\rho)=\int_0^{2\pi}\chi(\rho,\,\vartheta)d\vartheta$.

Quindi

$$\int_0^z\int_0^{2\pi}\frac{\chi(\rho,\,\vartheta)\rho}{(\rho^2+\vartheta^2)^{3/2}}\,\rho d\rho d\vartheta=\int_0^z\frac{\psi'(\rho)\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho=\frac{\psi(z)z}{\sqrt{8}\,z^3}-$$

$$-\int_0^z\frac{\psi(\rho)(z^2-2\rho^2)}{(\rho^2+z^2)^{5/}}\,d\rho\leq\frac{\psi(z)}{\sqrt{8}\,z^2}+3z^2\int_0^z\frac{\psi(\rho)}{z^5}=o(1)+\frac{1}{z^3}\int_0^z o(\rho^2)d\rho=o(1).$$

Dunque l'integrale a primo membro di (10) tende a zero con z. Quanto all'integrale

$$\iint_{\Gamma_z}\varphi(x,\,y)\frac{f(x,\,y)-z}{[x^2+y^2(z-f(x,\,y))^2]^{3/2}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

se si usa la stessa tecnica e si osserva che per le (4) risulta $|f(x,\,y)-z|<H\rho+z$, si arriva a maggiorarlo in modulo

---

[5]) Indichiamo con o il simbolo di LANDAU, vale a dire $v=o(t)$ significa che $\frac{v}{t}$ è infinitesimo.

mediante integrali del tipo

$$\int_0^z \frac{\psi'(\rho)\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho = o(1)$$

$$\int_0^z \frac{\psi'(\rho)z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho = \frac{\psi(z)}{\sqrt{8}\,z^2} + 3\int_0^z \frac{\psi(\rho)\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\,d\rho \leq o(1) + \frac{1}{z^3}\int_0^z o(\rho^2)d\rho = o(1).$$

Ne segue la validità della (8).

Per dimostrare la (9) si osservi anzitutto che, applicando il teorema del valore medio, detto $\tilde{z}$ un opportuno numero tra 0 e z si ha, tenendo presenti anche le (4), per $z \leq \rho \leq R < 1$,

$$\begin{aligned}
&|\,[\rho^2 + f^2(x,\,y)]^{3/2} - [\rho^2 + (z - f(x,\,y))^2]^{3/2}\,| = \\
&= 3\,|\,[\rho^2 + (\tilde{z} - f(x,\,y))^2]^{1/2}(\tilde{z} - f(x,\,y))z\,| \leq 3(\rho^2 + z^2)^{1/2}z^2 + \\
&+ 3(\rho^2 + z^2)^{1/2}z\,|\,f(x,\,y)\,| + 3\,|\,f(x,\,y)\,|\,z^2 + 3f^2(x,\,y)z < \\
&< 3\sqrt{2}\,\rho z^2 + 3H\sqrt{2}\,\rho^2 z + 3H\rho z^2 + 3H^2\rho^2 z \leq K\rho^2 z
\end{aligned}$$

con K costante opportuna.

Si ottiene allora, applicando anche le (5),

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{\Gamma_{R,z}} \varphi(x,\,y)(\alpha x + \beta y)\left[\frac{1}{[x^2+y^2+(z-f(x,\,y))^2]^{3/2}} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{[x^2+y^2+f^2(x,\,y)]^{3/2}}\right]\sqrt{1+f_x^2+f_x^2}\,dxdy\,\right| \leq \\
&\leq \frac{2K}{p^{3/2}}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\chi(\rho,\,\vartheta)\rho\cdot\rho^2 z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}\rho^3}\,\rho d\rho d\vartheta = \frac{2K}{p^{3/2}}\int_z^R \frac{\psi'(\rho)z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho = \\
&= \frac{2K}{p^{3/2}}\frac{\psi(R)z}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2K}{p^{3/2}}\frac{\psi(z)z}{\sqrt{8}\,z^3} + \frac{2K}{p^{3/2}}\cdot 3z\int_z^R \frac{\psi(\rho)\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\,d\rho \leq \\
&\leq o(1) + \frac{6K}{p^{3/2}}\,z\int_z^R \frac{\psi(\rho)\rho}{\rho^5}\,d\rho = o\,1) + z\int_z^R o(\rho^{-2})d\rho = o(1).
\end{aligned}$$

Analogamente si tratta l'integrale

$$\left| \iint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \varphi(x, y) \left[\frac{f(x, y) - z}{[x^2 + y^2 + (z - f(x, y))^2]^{3/2}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{f(x, y)}{[x^2 + y^2 + f^2(x, y)]^{3/2}} \right] \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy \right|$$

e d'altra parte questo integrale è ben noto nello studio della derivata normale del potenziale di semplice strato (v. ad es. [4] pag. 10-11), poichè la funzione tra parentesi quadre altro non è che la differenza $\frac{d}{dn_M}\frac{1}{\overline{PQ}} - \frac{d}{dn_M}\frac{1}{\overline{MQ}}$.

Dunque è dimostrata anche la (9) e l'equivalenza che si voleva.

2. - Ci si può dunque limitare a studiare o l'esistenza del limite a primo membro della (2) o quella dell'integrale principale a secondo membro; una volta dimostrata una delle due esistenze è immediato ricavare la validità della (2), in virtù della sua validità quando φ è costante e del risultato dimostrato nel numero precedente.

La dimostrazione diretta dell'esistenza per quasi-tutti gli M di F, dell'integrale $\int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_M}\frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q$ non si presenta però semplice; essa è stata ottenuta supponendo che F sia un piano, da A. ZYGMUND e A. P. CALDERON [2].

Ma si può osservare che è più semplice dimostrare l'esistenza del limite

$$\lim_{P \to M\ (\text{su } \pm n_M)} \frac{du(P)}{dl_M} \tag{11}$$

Tale esistenza per quasi-tutti gli M di F consegue dai lavori di C. W. OSEEN [10], come ho già avuto occasione di osservare in [6] (v. l'Osservazione del n. 3).

Infatti ogni potenziale di semplice strato (1) si può rappresentare anche nella forma

$$u(P) = \int_F \zeta(Q) H(Q, P) d\sigma_Q$$

dove $\zeta(Q)$ è una funzione sommabile su F e $H(Q, P)$ è il nucleo introdotto dall'OSEEN; e di qui consegue l'esistenza per quasi-tutti gli M di F del limite (11) (si veda appunto il n. 3 di [6] [6]).

Questa semplice osservazione mi sembra rivesta particolare interesse quando si passa a considerare gli analoghi problemi per l'equazione generale, lineare omogenea di tipo ellittico, anche in un numero qualunque di variabili

$$\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h,k}^{1,m} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = 0. \tag{12}$$

È noto che in opportune ipotesi di regolarità sui coefficienti di (12) si possono considerare tra le soluzioni di (12) i cosidetti potenziali generalizzati di semplice strato, analoghi ad (1),

$$u(P) = \int_F \varphi(Q) G(Q, P) d\sigma_Q$$

dove $G(Q, P)$ è una soluzione fondamentale della (12) e $\varphi(Q)$ è sommabile su F. Ed è anche noto che se φ è hölderiana su F vale la relazione analoga alla (2). Si pongono dunque gli stessi problemi ora considerati per la (2).

Orbene i calcoli svolti nel numero precedente si possono estendere, anche in m variabili, in modo sostanzialmente analogo (e solo per brevità ci siamo limitati nel n. 1 al caso del potenziale ordinario), onde *dimostrare l'equivalenza dell'esi-*

---

[6] In [6] ho considerato in particolare il caso in cui φ e ζ sono di quadrato sommabile su F, ma le considerazioni fatte valgono con le modifiche del caso, anche se ζ e φ sono solo sommabili.

stenza del limite (11) *e dell'integrale principale.*

$$(13) \qquad \overset{*}{\int_F} \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} G(M, Q) d\sigma_Q$$

E poichè i risultati dell'OSEEN sono stati estesi da G. GIRAUD [5] all'equazione (12), si può affermare *l'esistenza per quasi-tutti gli M di F del limite* (11), *anche in questo caso più generale.*

Ne viene così *l'esistenza per quasi-tutti gli M di F dell'integrale principale* (13) *relativo a una qualunque equazione* (12) *di tipo ellittico.*

Questo risultato risponde in modo esauriente, limitatamente agli integrali principali del tipo (13), ad una questione aperta nella teoria degli integrali principali (v. i lavori di A. P. CALDERON - A. ZYGMUND [2], [3] e di S. G. MIHLIN [7] e la conferenza di C. MIRANDA [9]), alla quale finora si era risposto (v. [2]) solo nel caso che l'equazione (12) si riduca all'equazione di LAPLACE e F sia un iperpiano dello spazio ad m dimensioni [7]).

3. - Le considerazioni dei n. precedenti si possono svolgere anche per i cosidetti potenziali di doppio strato « obliquo ».

Consideriamo per fissare le idee (ma valgono anche qui le estensioni al caso dell'equazione (12) in più variabili) il potenziale ordinario di doppio strato obliquo nello spazio a tre dimensioni

$$(14) \qquad w(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{PQ}} d\sigma_Q .$$

Se φ è hölderiana su F vale, come è noto, in ogni punto

---

[7]) Sarà bene osservare esplicitamente che quando i coefficienti della (12) non sono costanti in D l'integrale (13) non rientra in quelli studiati da CALDERON e ZYGMUND in [2]; per esso si conoscono per ora risultati riguardanti la « convergenza in media » e non quella « puntuale » che qui interesserebbe (si veda, oltre a [2], anche [3] e [7]).

M di F la relazione

$$(15)\qquad \lim_{P \to M\ (\text{su} \pm n_M)} w(P) = \pm 2\pi \cos(l_M, n_M)\varphi(M) + \\ + \int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q .$$

Nel caso che φ sia sommabile su F si possono svolgere a proposito della (15) considerazioni e calcoli del tutto analoghi a quelli svolti a proposito di (2), dimostrando che per quasi-tutti gli M di F l'esistenza del limite a primo membro e quella dell'integrale a secondo membro sono due fatti equivalenti.

D'altra parte ogni potenziale (14) è anche esprimibile come un ordinario potenziale di doppio strato (normale)

$$(16)\qquad w(P) = \int_F \zeta(Q) \frac{d}{dn_Q} \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\sigma_Q .$$

Basta pensare che per noti risultati di teoria del potenziale la (14) e la (16) si possono considerare come due trasformazioni lineari continue dello spazio Σ delle funzioni sommabili su F nello spazio delle funzioni armoniche in $D - FD$ e sommabili in D, normalizzati entrambi nel modo abituale; tali trasformazioni, per noti risultati sulla risoluzione del problema di DIRICHLET mediante funzioni del tipo (14) e (16), hanno lo stesso codominio se si considerano sulla varietà V delle funzioni hölderiane su F, varietà ovunque densa in Σ, e quindi devono avere lo stesso codominio anche se considerate su tutto Σ.

Ma per la (16) esiste il limite $\lim_{P \to M\ (\text{su} \pm n_M)} w(P)$, per quasi-tutti gli M di F, come è ben noto.

Dunque *per quasi-tutti gli M di F esiste anche l'integrale* $\int_F^* \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{\overline{MQ}}\, d\sigma_Q$ *e vale la* (15).

4. - Nei numeri precedenti si è in sostanza svolta una teoria dei potenziali « obliqui » nel caso di densità e momenti

solo sommabili. Si è ora naturalmente portati a completare questa teoria.

Una prima osservazione immediata è la seguente. Si considerino due punti P^+ e P^- simmetrici rispetto al punto M di F su n_M, il primo seguente e il secondo precedente M nel verso di n_M, e le differenze

$$\frac{du(P^+)}{dl_M} - \frac{du(P^-)}{dl_M} \quad , \quad w(P^-) - w(P^+) \tag{17}$$

dove $u(P)$ e $w(P)$ sono dati rispettivamente dalla (1) e dalla (14) con φ sommabile su F.

Dalla (2) e dalla (15) segue ovviamente che *per quasi-tutti gli M di F le due differenze tendono a* $4\pi\cos(l_M, n_M)\varphi(M)$ *quando* P^+ (*e quindi* P^-) *tende a* M. Ma si può osservare che a questo risultato si arriva rapidamente con gli stessi calcoli svolti nel n. 1, *indipendentemente* dalla validità della (2) e della (15) per quasi-tutti gli M di F.

Ci si può poi porre la questione del comportamento delle derivate del potenziale di doppio strato obliquo, analogamente a quanto è noto per il potenziale di doppio strato ordinario normale.

Procedimenti di calcolo assai vicini a quelli del n. 1 portano facilmente a dimostrare [8]) che *per quasi-tutti gli M di F la differenza*

$$\frac{dw(P^+)}{dl_M^*} - \frac{dw(P^-)}{dl_M^*} \tag{18}$$

dove l_M^* *è il cosidetto asse coriflesso di* l_M [9]), *tende a* $4\pi\cos(l_M, n_M)\beta^1(M)\mu(M)$ *al tendere di* P^+ (*e di* P^-) *a* M *su* n_M,

---

[8]) La dimostrazione è stata infatti data per esteso dal dott. A. MALFERRARI e si troverà in un lavoro di prossima pubblicazione.

[9]) Cioè, nel caso dei potenziali ordinari, l'asse simmetrico di l_M rispetto a n_M (si veda ad es. [8] n. 6).

essendo $\beta^{(l)}(M)$ una opportuna funzione dipendente solo dalla direzione l_M e nulla se $l_M = n_M$ [10]).

Il risultato ha interesse oltre che in sè anche perchè insieme a quello relativo alle differenze (17) permette di ritrovare rapidamente il *teorema di inversione della formula di* GREEN da me recentemente dimostrata in [6] con altro procedimento; e detto teorema di inversione si ottiene così in ipotesi sui dati μ e δ, che vi compaiono, più generali di quelle ammesse in [6] (la semplice sommabilità di μ e δ su F in luogo della sommabilità del loro quadrato [11])).

Osserviamo infine che le considerazioni relative all'equivalenza del limite a primo membro di (15) e dell'integrale principale (13) e all'analoga equivalenza del limite a primo membro di (15) e dell'integrale principale a secondo membro, così come le precedenti osservazioni sui limiti delle differenze (17) e (18), si possono svolgere anche se si considerano potenziali relativi a una distribuzione anche non sommabile di masse e precisamente quando si sostituisca (1) con

$$\int_F \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\mu_Q$$

e (14) con

$$\int_F \frac{d}{dl_Q}\frac{1}{\overline{PQ}}\, d\mu_Q$$

essendo μ una misura definitiva sui boreliani di F. Considerati i punti M di F in cui la μ sia derivabile e detta φ la derivata (densità) di μ in M, i risultati sono gli stessi e i calcoli del tutto analoghi a quelli dimostrati per (1) e (14).

---

10) La funzione $\beta^{(l)}(M)$ è la funzione che compare nella formula di GREEN per assi obliqui

$$\int_D (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u)d\tau = \int_F \left(\frac{1}{\cos(l,\, n)}\frac{vdu}{dl^*} - \frac{1}{\cos(l,\, n)}\frac{udv}{dl} + \beta^{(l)}uv\right)d\sigma.$$

Si veda ad es. [8] n. 6.

11) Sarà bene però osservare che le considerazioni precedenti permettono di arrivare solo al *teorema di inversione* e non ai teoremi di unicità e di completezza di cui è anche oggetto la memoria [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BOULIGAND - G. GIRAUD - P. DELENS: *Le problemè de la dérivée oblique en théorie du potentiel.* (Act. Sc. Ind. Hermann, Paris, 1935).

[2] A. P. CALDERON - A. ZYGMUND: *On the existence of certain integrals.* (Acta Math., vol. 88, 1952, pp. 85-139).

[3] A. P. CALDERON - A. ZYGMUND: *On a problem of Mihlin.* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 55-1955).

[4] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* (Ann. Mat. Pura e Appl., s. 4, t. XXVII, 1948, pp. 1-28).

[5] G. GIRAUD: *Nouvelle méthode pour traiter certaines problèmes rélatif aux équations du type elliptique.* (Journ. de Math. pures et appl. , s. IX, t. XVIII, 1939, pp. 111-143).

[6] E. MAGENES: *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* (In corso di stampa sugli Ann. di Mat. Pura e Appl.).

[7] S. G. MIHLIN: *Singular integral equations.* (Uspehi Mat. Nausk. (N. S.), 3, n. 3 (25), 1948, pp. 29-112). Trad. inglese nelle « Translations » dell'Amer. Mat. Soc., n. 24.

[8] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* (Springer, Berlin, 1955).

[9] C. MIRANDA: *Gli integrali principali nella teoria del potenziale.* (Ren. Sem. Mat. Fis., Milano, vol. XXIV, 1952-53, pp. 107-122).

[10] C. W. OSEEN: *Contributions à la théorie analitique des marées.* (Arkiv for Mat. Astr. Fys. b. 25 A, n. 24, 1937, pp. 1-39).