

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

**Sulle oscillazioni forzate di un circuito comprendente
una bobina a nucleo di ferro**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 23 (1954), p. 407-421

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__407_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE OSCILLAZIONI FORZATE DI UN CIRCUITO COMPRENDENTE UNA BOBINA A NUCLEO DI FERRO

Nota () di GIUSEPPE COLOMBO (a Padova)*

Nella presente Nota si studia un caso di oscillazioni sottoarmoniche del terzo ordine che si presentano in un circuito oscillante comprendente una bobina a nucleo di ferro quando vi si inserisca una forza elettromotrice periodica.

In questo lavoro pervengo a dimostrare l'esistenza e la stabilità di soluzioni periodiche (s. p.) sottoarmoniche di un certo tipo, per l'equazione differenziale (e, d) che regge il fenomeno in discorso, facendo un'opportuna ipotesi sulla forza elettromotrice inserita e sulle caratteristiche del circuito. Questo mio lavoro, si riattacca a recenti ricerche di Schouten ed Heijn ¹⁾, riguardanti il caso che la forza elettromotrice sia di tipo sinusoidale, ed a ricerche di Elias ed associati ²⁾. Le schematizzazioni fatte da questi autori nelle loro ricerche, pregiate specialmente dal punto di vista sperimentale, non hanno permesso di dare al loro studio quei caratteri di generalità che è invece desiderabile e soprattutto non hanno permesso di pervenire a risultati concreti per quanto riguarda la stabi-

(*) Pervenuta in Redazione il 30 luglio 1954.

¹⁾ I. P. SCHOUTEN ed H. J. HEIJN, *Subharmonic oscillation in electric circuits containing iron-core reactors*. Applied Scientific Research, Section B, vol. B. 2, N. 4, 1952, p. 301. (Olanda).

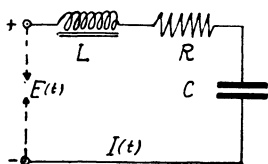
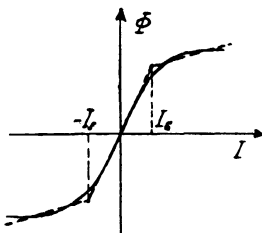
²⁾ G. J. ELIAS e H. MIEDEMA, *Tijdschr. Ned. Radio Gen.*, 11 (1946) 141; G. J. ELIAS, *Ibid.*, 13 (1948) 37; ELIAS ed S. DUINKER, *Ibid.*, 14 (1949), 163. Non ho avuto la possibilità di consultare questi ultimi lavori.

lità. Nei lavori citati si finisce per studiare qualche caso numerico particolare ed a ridurre ad uno solo il numero, che come vedremo è relativamente elevato, dei parametri.

Essendo escluso che con i soliti metodi dell'analisi non-lineare che si usa per le piccole non-linearità, di Kryloff, Bogoliuboff, Cartwright, Minorsky si possa pervenire a qualche risultato concreto ho cercato un metodo che lasciasse la maggior generalità al problema e non comportasse uno sviluppo impossibile di calcoli.

Ho ottenuto i risultati che riassumo brevemente qui sotto.

Si consideri il circuito di fig. 1_A) comprendente una capacità C una resistenza R , ed una bobina di induzione L con nucleo di ferro, ai capi del quale sia inserita una forza elettromotrice $E(t)$ periodica di periodo T . Sia $x(t)$ la carica del condensatore all'istante t . Il flusso Φ relativo al nucleo di ferro dipende non linearmente dalla intensità $\dot{x} = I$ della corrente che circola nella bobina. La legge di dipendenza di Φ da I che denoteremo con $\Phi = f(I)$ è rappresentata graficamente in fig. 1_B).

Fig. 1_AFig. 1_B

Posto $L(\dot{x}) = f'(\dot{x})$, l'equazione che regge il fenomeno si scrive come è ben noto nella forma

$$e) \quad L(\dot{x})\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{x}{C} = E(t).$$

Si considera dapprima il caso (vedi fig. 1_B) che $L(\dot{x}) = L_1$ per $|\dot{x}| \leq I_s$, $L(\dot{x}) = L_2$ per $|\dot{x}| > I_s$ e che $E(t)$ sia uguale a $\pm E_0$ secondo che $2nT \leq t < (2n+1)T$ ovvero $(2n+1)T \leq t < 2(n+1)T$ e si dimostra sotto opportune ipotesi qualitative per R , L_1 , L_2 , C , E_0 , T che la e) ammette un ciclo sta-

bile in senso forte di minimo periodo $6T$. Quindi con un semplice ragionamento di carattere geometrico, si deduce dal teorema dimostrato per l'equazione lineare a tratti, (che denoteremo con e'), che, se e poco si scosta da e' , la s.p. di minimo periodo $6T$ continua ad esistere. Questa s.p. è poi stabile nel senso che, in ogni istante successivo a quello iniziale, la distanza tra i punti rappresentativi, sul piano delle fasi, della s.p. e di una generica soluzione di e), corrispondenti a condizioni iniziali sufficientemente prossime a quelle della s.p., si mantiene minore di una quantità finita, infinitesima con la distanza iniziale.

Si considera brevemente anche il caso in cui esiste una s.p. stabile nello stesso senso, di periodo minimo $2T$.

1. - Costruzione di un ciclo per una equazione approssimante la e). - Consideriamo dapprima la seguente equazione lineare a tratti

$$(1) \quad \ddot{x} + 2D\dot{x} + x = E(t) = -1^{\mathfrak{J}\left(\frac{t}{T}\right)}E \quad \text{per} \quad |\dot{x}| > I$$

$$(2) \quad L\ddot{x} = 0 \begin{cases} \text{per } x > 0, |\dot{x}| \leq I, 2nT \leq t < (2n+1)T \\ \text{e per } x < 0, |\dot{x}| \leq I, (2n-1)T \leq t \leq 2nT \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} L\ddot{x} = 2E \quad \text{per } x \leq 0, |\dot{x}| \leq I, 2nT \leq t < (2n+1)T \\ L\ddot{x} = -2E \quad \text{per } x \geq 0, |\dot{x}| \leq I, (2n-1)T \leq t < 2nT \end{cases}$$

ove $\mathfrak{J}\left(\frac{t}{T}\right)$ è la parte intera di $\frac{t}{T}$, ed n è un numero intero, positivo o nullo, e dimostriamo che, se T, I, E, D, L soddisfano ad opportune condizioni qualitative, l'equazione stessa ammette una soluzione periodica stabile, in senso forte, di minimo periodo $6T$.

Assunto un sistema di riferimento cartesiano ad assi obliqui come in fig. 2, si associ ad esso un riferimento polare con l'origine in $E \equiv (E, O)$ e l'asse polare diretto come l'asse x ed orientato nel verso opposto; l'anomalia θ sia contata a partire da esso in verso orario.

Si consideri ora la generica soluzione di (1) per $0 \leq t \leq T$. Essa è ovviamente

$$(4) \quad \begin{cases} x = E + Ce^{-Dt} \operatorname{sen}(\nu t + \varphi - \sigma), \\ \dot{x} = Ce^{-Dt} \operatorname{sen}(\nu t + \varphi), \end{cases}$$

avendo posto

$$(5) \quad \cos \sigma = -D, \quad \operatorname{sen} \sigma = \nu = \sqrt{1 - D^2}.$$

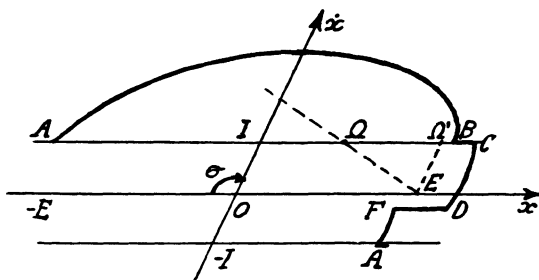


Fig. 2

Le (4) rappresentano una curva la cui equazione polare rispetto al prefissato riferimento è

$$(6) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{D}{\nu} \theta}$$

ove

$$(7) \quad \theta = \nu t + \varphi, \quad C = \frac{\rho_0}{\operatorname{sen} \sigma} e^{-\frac{D}{\nu} \varphi}.$$

Premesso ciò si consideri la soluzione (4) di (1) soddisfacente alle seguenti condizioni iniziali

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \tau-0} x(t) = x_A < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \tau-0} \dot{x}(t) = I$$

con $0 < \tau < T$.

Denotate con ρ_A , θ_A le coordinate polari di $A = (x_A, I)$. l'equazione polare della curva rappresentativa di tale soluzione sarà

$$(9) \quad \rho = \rho_A e^{-\frac{D}{\nu}(\theta - \theta_A)}$$

ovvero, essendo $I = \rho_A \sin \theta_A / \sin \sigma$, di equazione

$$(10) \quad \rho = \frac{I \sin \sigma}{\sin \theta_A} e^{-\frac{D}{v}(\theta - \theta_A)}.$$

La curva γ , orientata nel verso delle θ (e quindi delle t) crescenti incontra la retta $\dot{x} = I$ per la prima volta in un punto B di coordinate cartesiane (x_B, I) e polari (ρ_B, θ_B) .

Tenuto conto che l'equazione polare della retta $\dot{x} = I$ è

$$(11) \quad \rho = \frac{I \sin \sigma}{\sin \theta}$$

θ_B dovrà soddisfare l'equazione

$$(12) \quad \sin \theta_A e^{\frac{D}{v}\theta_B} - \sin \theta_B e^{\frac{D}{v}\theta_A} = 0.$$

e sarà, tra tutti i valori di θ_B soddisfacenti alle (13), proprio il più piccolo che superi θ_A .

Sia ora

$$(13) \quad t_1 = \tau + \frac{\theta_B - \theta_A}{v}$$

l'istante in cui $P(t)$ che descrive γ , partendo all'istante τ da A raggiunge B .

Supponiamo per adesso che risulti

$$(14) \quad t_1 \leq T, \quad x_B > 0$$

riservandoci più avanti di determinare condizioni sufficienti, riguardanti i parametri, perchè esse siano soddisfatte.

Se sono soddisfatte le (14) il punto $P(t)$, giunto in B , per soddisfare le equazioni (1), (2), (3), deve ora seguire la legge (2). Succede così che P , per così dire, striscia ora sulla semiretta $\dot{x} = I$, $x > 0$ nel verso delle x crescenti, con velocità proprio uguale ad I per tutto il tempo che va dall'istante t_1 all'istante T , giungendo in questo istante sul punto C di coordinate

$$(15) \quad x_C = x_B + I(T - t_1), \quad \dot{x}_C = I$$

Ora, il punto $P(t)$ si smuove seguendo la legge (3₂) e

nell'intervallo di tempo $(T, 2T)$ raggiunge (sempre che resti durante tutto questo intervallo di tempo nella striscia $|\dot{x}| < I$) il punto D di coordinate

$$(16) \quad \begin{cases} x_D = -\frac{ET^2}{L} + I(2T - t_1) + x_B, \\ \dot{x}_D = I = -2\frac{ET}{L} + I. \end{cases}$$

La (16) vale, come è stato detto più sopra, solo se D cade entro la semistriscia $|\dot{x}| \leq I$, $x > 0$ perchè allora tutto l'arco CD è contenuto in essa, cioè solo se $\dot{x}_D > -I$, che comporta

$$(17) \quad T < \frac{IL}{E},$$

e solo se, oltre ad essere $x_B > 0$, I è sufficientemente piccolo ed L sufficientemente elevato in modo che risulti $x_D > 0$.

Dall'istante $2T$, all'istante $3T$, $P(t)$ striscia di nuovo, seguendo la legge (2), sulla retta $\dot{x} = I$ raggiungendo il punto F di coordinate

$$(18) \quad \begin{cases} x_F = x_D + \left(I - 2\frac{ET}{L}\right)T = I(3T - t_1) - 3\frac{ET^2}{L} + x_B \\ \dot{x}_F = I - 2\frac{ET}{L}. \end{cases}$$

Se I è sufficientemente piccolo ed L sufficientemente elevato risulterà certamente (sempre se $x_B > 0$).

$$(19) \quad x_F > 0$$

allora, dall'istante $3T$, $P(t)$ segue, finchè resta nella semistriscia $|\dot{x}| < I$, $x > 0$, la legge (3₂) cioè la legge

$$(20) \quad \begin{cases} x = -\frac{E}{L}(t - 3T)^2 + \left(I - \frac{2ET}{L}\right)(t - 3T) - \frac{3ET^2}{L} + \\ \quad \quad \quad + I(3T - t_1) + x_B \\ \dot{x} = -\frac{2E}{L}(t - 3T) + I - \frac{2ET}{L}. \end{cases}$$

Se è

$$(21) \quad \frac{IL}{2E} < T < \frac{IL}{E}$$

e, sempre qualora siano soddisfatte le (14) se I è sufficientemente piccolo ed L sufficientemente elevato, il punto $P(t)$ raggiunge la semiretta $\dot{x} = -I$ in un punto $\bar{A}$ di ascissa

$$(22) \quad x_{\bar{A}} = x_B + I(2T - t_1) - 2 \frac{ET^2}{L}$$

nell'istante $\bar{\tau}$ soddisfacente alle

$$(23) \quad \bar{\tau} = 2T + \frac{IL}{E}$$

che è, tenuto conto delle (21), certamente maggiore di $3T$ e minore di $4T$. Restano ancora da determinare le condizioni cui debbono soddisfare i parametri affinchè risultino soddisfatte le (14).

Poichè certamente $\theta_B - \theta_A$ non supera π , perchè la (14) risulti soddisfatta occorre e basta che sia

$$(24) \quad T < \tau + \frac{\pi}{\nu}.$$

Si osservi inoltre che, sopra una generica delle traiettorie rappresentative delle soluzioni di (1), la $\dot{x}$ raggiunge il suo massimo in un punto che sta sulla retta

$$(25) \quad E - x = 2D\dot{x},$$

la quale incontra la retta $\dot{x} = I$ nel punto Ω di coordinate

$$(26) \quad x_0 = E - 2DI, \quad \theta_0 = \pi - \sigma,$$

e basta che sia

$$(27) \quad I < \frac{2E}{D},$$

perchè Ω e quindi a maggior ragione B cada nel primo quadrante cioè sia soddisfatta la seconda delle (14). La (27) risulta certamente soddisfatta per I sufficientemente piccolo.

Facciamo ora una importante osservazione:

Osservazione I: Se T, I, L, E, D sono tali che risultino soddisfatte le (21) e le (27), se esistono valori positivi di τ in modo tale da poter soddisfare alla (24), e se il secondo membro di (22) risulta positivo, una generica soluzione di (1), (2), (3) uscente in un istante τ , generico entro certi limiti, da un punto A della semiretta $x < 0$ $\dot{x} = I$ raggiunge la semiretta $x > 0$, $\dot{x} = -I$, $x = -I$ in un istante τ dato da (23) che, come si riconosce dall'esame del secondo membro della stessa, risulta indipendente da A e da τ .

Premesso ciò consideriamo un elemento generico, dell'insieme $\mathcal{J}$ costituito dalle soluzioni dell'equazioni (1), (2), (3), che all'istante

$$(28) \quad \tau^* = \frac{IL}{E} - T$$

escono da un generico punto A del segmento chiuso (A_1, A_2) definito dalle $\dot{x} = I$, $-\frac{3}{2}E \leq x \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon < \frac{1}{2}E - DI$. Perchè, in corrispondenza al valore di τ uguale a τ^* dato da (28), possa risultare soddisfatta la (24) occorre che sia

$$(29) \quad T > \frac{IL}{2E} + \frac{\pi}{2\nu},$$

che comporta per la (21),

$$(30) \quad \frac{IL}{E} > \frac{\pi}{\nu};$$

quindi infine riassumendo le (21), (29) si ha

$$(31) \quad \frac{IL}{2E} + \frac{2\nu}{\pi} < T < \frac{IL}{E}.$$

Per quanto riguarda il secondo membro di (22) il fatto che esso risulti positivo una volta soddisfatte le (31) è certamente assicurato qualora sia

$$(32) \quad E + IT - 2\frac{ET^2}{L} - 2DI > 0,$$

e questa condizione, assieme alla (31) comprende la (27) ed assicura che la traiettoria, relativa ad (1), (2), (3), corrispondente

alle condizioni iniziali $P(\tau^*) = A$, completamente si svolge da A ad $\bar{A}$ come è stato descritto più sopra.

Possiamo in base a ciò concludere col seguente lemma.

LEMMA I. - *Se sono soddisfatte le condizioni (31), (32), una generica traiettoria che abbia inizio nell'istante τ^* da un punto del segmento (A_1, A_2) giunge sull'istante $3T - \tau^*$ in un punto A della semiretta $x > 0$, $\dot{x} = -I$.*

Si può anche aggiungere in base alla osservazione I la seguente:

Osservazione II: Sotto le stesse ipotesi una generica traiettoria uscente in un istante τ , assunto in un intorno opportunamente piccolo di τ^* , da un punto del segmento (A_1, A_2) , giunge, nello stesso istante $3T - \tau^*$, in un punto della semiretta $x > 0$, $\dot{x} = -I$.

In base al lemma I l'esistenza di un ciclo chiuso per l'equazione lineare a tratti (1), (2), (3) sarà provata qualora si dimostri che almeno per qualche A il corrispondente $\bar{A}$ coincide col simmetrico di A rispetto ad O .

Per questo cominciamo con l'osservare che da (15) tenuto conto di (13) e (28) e della

$$(33) \quad x_B = I + I \cos \sigma - I \operatorname{sen} \sigma \cdot \cot \theta_B,$$

che si deduce subito con considerazioni geometriche, si ha

$$(34) \quad x_C = E + I \cos \sigma - I \operatorname{sen} \sigma \cot \theta_B + I \left(2T - \frac{IL}{E} - \frac{\theta_B - \theta_A}{v} \right).$$

Da questa si ottiene

$$(35) \quad \frac{dx_C}{d\theta_B} = \frac{I}{v} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \theta_B} - 1 \right) + \frac{I}{v} \frac{d\theta_A}{d\theta_B}.$$

Ci assicuriamo ora che mentre A descrive il segmento (A_1, A_2) , θ_B non superi σ . Basta osservare la figura 2) e tener conto della (10), per convincersi che, per questo, basta che risulti

$$(36) \quad \rho_A e^{-\frac{D}{v}(\sigma - \theta_A)} < I$$

e ciò comporta che B non cade a destra del punto $\Omega' \equiv (E, I)$.

Quest'ultima tenuto conto che $\rho_{A_2} < \frac{5}{2}E$ comporta

$$(37) \quad \frac{5}{2}Ee^{-\frac{D}{v}(\sigma-\theta_A)} < I$$

e siccome è $\theta_A < \frac{2I}{5E}$ si ha infine

$$(38) \quad \frac{D\sigma}{v} > \lg \frac{5E}{2I} + \frac{2D}{5E} \frac{I}{v}.$$

In base a queste considerazioni possiamo concludere che se sono soddisfatte le (31), (38) mentre A descrive il segmento (A_1, A_2) , θ_A cresce, θ_B decresce e poichè, essendo $\pi - \sigma < \theta_B < \sigma$ e $\frac{d\theta_A}{d\theta_B} < 0$, tenuto conto di (35), risulta $\frac{dx_C}{d\theta_B} < 0$, si conclude che x_C cresce, cioè C si sposta sempre verso destra descrivendo un segmento tutto contenuto nell'intervallo $\Omega\Omega'$. In modo che in relazione a queste traiettorie ai punti di (A_1, A_2) vengono a corrispondere biunivocamente i punti di un segmento (C_1, C_2) tutto contenuto in $\Omega\Omega'$.

Ora da (15), (21) si ha

$$(39) \quad x_A = x_C + IT - 2 \frac{ET^2}{L},$$

e da questa

$$x_A > x_0 + IT - 2 \frac{ET^2}{L} > E - 2DI + IT - 2 \frac{ET^2}{L}.$$

Se infine

$$(40) \quad E - 2DI + IT - 2 \frac{ET^2}{L} > \frac{1}{2}E - DI$$

ai punti di (A_1, A_2) corrispondono biunivocamente i punti di un segmento $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ tutto contenuto nel simmetrico (A'_1, A'_2) di (A_1, A_2) rispetto ad O .

Esisterà quindi certamente un A^* tale che il corrispondente $\bar{A}^*$ è simmetrico di A^* rispetto ad O . In base alla simmetria

dell'equazione (1), (2), (3) rispetto ad O risulta così provato che:

Se sono soddisfatte le ipotesi (31), (32), (38), (40) esiste certamente un ciclo chiuso di minimo periodo $6T$ che interseca la semiretta $\dot{x} = I$ in un punto interno all'intervallo $\Omega\Omega'$.

Resta da far vedere la compatibilità delle condizioni (31), (32), (38), (40) ma di ciò ci si convince rapidamente pensando per esempio che I e v tendano a zero ed L all'infinito in maniera opportuna.

Si vede allora che:

Osservazione III: Esistono certamente, al tendere di I e v a zero e di L a $+\infty$ opportunamente, valori di T che soddisfano a tutte le disuguaglianze.

Concludiamo con l'osservazione seguente:

Osservazione IV: Al tendere di I a zero il minimo parallelogramma appartenente alla striscia $|\dot{x}| < I$ che contiene l'arco di una generica traiettoria appartenuta all'insieme $\mathfrak{J}$, tende a restringersi intorno al punto E .

2. - Stabilità del ciclo. - Cominciamo con l'osservare che per tutti i valori di θ_A appartenenti ad un intervallo comunque piccolo contenuto in $(\theta_{A_1}, \theta_{A_2})$ ovviamente non può essere $x_{\bar{A}} = x_A$.

Si pensi ora alla trasformazione $\bar{A} = \mathfrak{T}(A')$ che associa a ciascun punto A' del segmento (A'_1, A'_2) , simmetrico di A rispetto ad O , il punto $\bar{A}$. Questa trasformazione $\mathfrak{T}$ è biunivoca, continua e risulta una contrazione.

In base a ciò si può dire che esiste almeno un punto unito A^* che diremo stabile intendendo di dire che un intorno generico ma sufficientemente piccolo di $\bar{A}^*$ si contrae in se nella trasformazione.

Il ciclo γ^* dell'insieme $\mathfrak{J}$ che corrisponde al punto A^* è quindi stabile almeno rispetto alle traiettorie di $\mathfrak{J}$, anzi stabile in senso forte poichè ogni altra traiettoria di $\mathfrak{J}$ sufficientemente prossima e γ^* tende ad esso al tendere di t a $+\infty$.

Ma si può dire di più, cioè si può provare la stabilità di questo ciclo γ^* rispetto a tutte le soluzioni di (1), (2), (3) che corrispondono a condizioni iniziali sufficientemente prossime a quelle del ciclo stesso.

Sia infatti P^* l'intersezione di γ^* con il semiasse positivo delle x , e t^* l'istante in cui $P(t)$, che è uscito da A^* nell'istante τ^* , raggiunge P^* . Si consideri uno generico degli interni di A^* sulla semiretta $x < 0$, $\dot{x} = I$ i cui simmetrici si trasformano in $\mathcal{C}$ contraendosi e sia i un tale intorno e i' il suo corrispondente sulla semiretta $x > 0$, $\dot{x} = -I$.

Si considerino inoltre punti $P(t^*)$ corrispondenti alle soluzioni che soddisfano alla $P(\tau^*) = A \subset i$. Detti punti appartengono ad un arco semplice aperto d , che contiene P^* come punto interno, e che è tagliato in un punto solo da ogni curva del sottoinsieme $\mathcal{J}'$ di $\mathcal{J}$, costituito da quelle traiettorie di $\mathcal{J}$ che escono da i .

Consideriamo l'insieme $\mathcal{J}''$ delle soluzioni di (1), (2), (3) soddisfacenti alle condizioni iniziali $P(t^*) = \mathcal{Q}$ essendo $\mathcal{Q}$ un punto di un generico campo C_a contenente d e sufficientemente piccolo.

Le traiettorie dell'insieme $\mathcal{J}''$ raggiungono la semiretta $x > 0$, $\dot{x} = -I$ nell'istante $3T$, (cfr. L'Osservazione I), in punti di un intorno di $\bar{A}^*$, magari più grande di i' , ma tutto contenuto nel simmetrico di i rispetto ad O . Da questo istante in poi esse si confondono con quelle dell'insieme $\mathcal{J}$ e raggiungono nell'istante $6T + t^*$ un punto di d .

Resta così provata la stabilità del ciclo rispetto alle traiettorie di $\mathcal{J}''$.

Faremo un'ultima osservazione:

Osservazione V: Consideriamo la trasformazione $\bar{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$ che associa ad ogni punto $\mathcal{Q}$ di C_a il punto $\mathcal{Q}' = P(6T + t^*)$ essendo $P(t^*) = \mathcal{Q}$. In questa trasformazione continua e univoca che trasforma C_a in d , P^* è un punto unito stabile nel senso che ogni suo intorno sufficientemente piccolo si contrae nella trasformazione.

3. - Esistenza di una soluzione periodica di minimo periodo $6T$ per l'equazione e).

Ritorniamo ora all'equazione e) che riscriviamo per comodità,

$$(41) \quad \mathcal{L}(\dot{x})\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = E(t)$$

Si facciano le seguenti ipotesi:

a) Le funzioni $\mathcal{L}(\dot{x})$, $E(t)$, siano funzioni continue con le loro derivate prime, pari $\mathcal{L}(\dot{x})$, dispari $E(t)$; $E(t)$ sia inoltre periodica di periodo $2T$.

b) Denotati con E , L_1 , L_2 , σ , k , δ delle costanti positive con I l'intensità di saturazione, con $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ delle funzioni pari di $\dot{x}$, e con $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ delle funzioni soddisfacenti alla condizione $\eta_2(t+T) = -\eta_1(t)$, poniamo

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \begin{cases} L_1 + k\varepsilon_1 & \text{per } |x| \geq I_s - \sigma \\ L_2 + k\varepsilon_2 & \text{per } |x| \leq I_s - \sigma \end{cases} \\ E(T) = \begin{cases} E + k\eta_1(t) & \text{per } \delta < t < T - \delta \\ -E + k\eta_2(t) & \text{per } T + \delta \leq t \leq 2T - \delta \end{cases} \end{array} \right.$$

c) $\mathcal{L}(x)$ sia monotona in $(I_s - \sigma, I_s + \sigma)$ e quindi in $(-I_s - \sigma, -I_s + \sigma)$, $E(t)$ lo sia in $(T - \delta, T + \delta)$, in $(2T - \delta, 2T + \delta)$ e così via.

Nel seguito ³⁾ riteniamo di aver scelto le variabili dipendente e indipendente in modo che $L_1 = \frac{1}{C} = 1$; denoteremo inoltre L_2 con L , I_s con I , R con D . Dimostriamo ora l'esistenza di un ciclo per la (41) nell'ipotesi:

d) $\mathcal{L}$, I , E , T , D soddisfino le condizioni necessarie per la validità del teorema dimostrato nei numeri precedenti e σ , δ , k , I , $v = \sqrt{1 - D^2}$ siano sufficientemente piccoli ed, in relazione al valore di I e di v , L sufficientemente elevato.

³⁾ Supponendo naturalmente di aver preventivamente adimensionalizzate le quantità fisiche che compaiono in (41).

Si noti che al tendere di σ , k , δ a zero l'equazione (41), tenuto anche conto delle posizioni fatte in c), tende ad assumere all'esterno della striscia $|\dot{x}| \leq I$ la forma (1), mentre per ogni valore di E tende nell'interno della striscia ad assumere la forma (2), (3) in un intorno del punto $(-E, O)$ definito da $|x + E| \leq \rho$, $|\dot{x}| \leq I$ ed in un intorno del punto (E, O) definito da $|x - E| \leq \rho$, $|\dot{x}| \leq I$, essendo ρ piccolo dell'ordine di I .

Premesso ciò, supposte soddisfatte le condizioni a), b), c), d), consideriamo le soluzioni di (41), che escono nell'istante t^* da un generico punto Q di C_a .

Queste traiettorie penetrano per la prima volta nella striscia $|\dot{x}| \leq I$ nei punti di un intervallo della semiretta $\dot{x} = I$, $x > 0$ che, al tendere di k , σ , δ a zero, finirà per essere contenuto in $\Omega\Omega'$. Finchè la traiettoria resterà nella striscia $|\dot{x}| \leq I$ il suo comportamento tenderà a quello delle traiettorie relative all'equazione approssimante (2), (3), i cui archi (vedi osservazione IV) appartenenti alla striscia suddetta, sono contenuti in un intorno del punto E che è infinitesimo con I , proprio per la ragione che, in questo intorno, la (41) tende a confondersi con le (2), (3), qualunque sia il valore di E . Lo stesso può ripetersi al riguardo dei rami delle traiettorie che restano in prossimità del punto $(-E, O)$.

Confrontando dunque questa soluzione con quella, relativa al sistema approssimante, che nello stesso istante t^* esce dal medesimo punto Q , potremo asserire che il divario all'istante $6T + t^*$, computato come somma dei quadrati delle differenze delle x e $\dot{x}$ relative alle due soluzioni di confronto, tende a zero al tendere di k , σ , δ , I , ν a zero e di L corrispondentemente a $+\infty$.

Basta allora tener presente la osservazione V per riconoscere che in relazione a (41) si può definire una trasformazione $\mathcal{T}^*$, nella stessa maniera in cui per la (1), (2), (3) abbiamo definita la $\mathcal{T}$, associando a ciascun punto Q di C_a il punto $P(6T + t^*) = Q'$, ove $P(t)$ è la soluzione di (41) che soddisfa alle $P(t^*) = Q$, e che questa $\mathcal{T}^*$ tende a coincidere con la $\mathcal{T}$ al tendere di k , σ , δ , I , ν a zero e di L a $+\infty$, sempre in

modo che risultino soddisfatte le condizioni (31), (32), (38), (40) (Osservazione III).

Da un certo punto in poi al variare di questi parametri nel modo suddetto il trasformato in $\mathfrak{T}^*$ di C_a sarà completamente contenuto in C_a e la trasformazione (per la dipendenza continua dei valori iniziali) sarà continua e biunivoca.

In $\mathfrak{T}^*$ esisterà almeno un punto unito cioè per l'equazione (41) una soluzione periodica di minimo periodo $6T$; anzi si potrà dire che per una generica soluzione di (41) soddisfacenti alla $P(t^*) = Q \subset C_a$ il divario per ogni $t > t^*$ della soluzione periodica sarà finito e dell'ordine di C_a .

Concludiamo con la seguente:

Osservazione VI: Fisse restando le ipotesi a), b), c) nella equazione (41), lasciamo cadere la ipotesi d) e la sostituiamo con la semplice altra ipotesi che T sia sufficientemente elevato, k , σ , δ sufficientemente piccoli.

Si dimostra allora, con un ragionamento dello stesso tipo di quello fatto più sopra, che l'equazione (41) ha una soluzione periodica di periodo $2T$, stabile nello stesso senso di quella di periodo $6T$ trovata nell'ipotesi d). Detta soluzione corrisponde ad un movimento costituito dai periodici passaggi del sistema della posizione di equilibrio $x = E$ all'altra $x = -E$.