

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Su l'equazione differenziale $y''(x) + A(x)y(x) = 0$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 23 (1954), p. 340-342

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__340_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$y''(x) + A(x)y(x) = 0$$

Nota () di* GIORGIO TREVISAN *(a Padova)*

Scopo della presente Nota è di dare una dimostrazione molto semplice di due noti teoremi riguardanti l'equazione $y''(x) + A(x)y(x) = 0$. Il primo dovuto a CACCIOPPOLI¹⁾ afferma che se $A(x)$ è a variazione limitata in $x_0 \leq x < +\infty$ e compresa tra due numeri positivi allora ogni soluzione dell'equazione è limitata assieme alla sua derivata prima; il secondo dovuto a MILLOUX²⁾ stabilisce che se $A(x) \rightarrow +\infty$, con $x \rightarrow +\infty$, ed è non decrescente, allora almeno una soluzione, non identicamente nulla, tende a zero per $x \rightarrow +\infty$.

1. - Si consideri l'equazione

$$(1) \quad y'' + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} y = 0,$$

dove $\alpha(x)$, $\beta(x)$ siano positive per $x \geq x_0$ e non decrescenti. Vale il

LEMMA I: Se $y(x)$ è soluzione della (1) la funzione $\varphi(x) = \frac{y^2(x)}{\alpha(x)} + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$ è non crescente per $x \geq x_0$.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 maggio 1954.

¹⁾ R. CACCIOPPOLI: *Una questione di stabilità*, Rendiconti Accademia Naz. Lincei, 1930.

²⁾ H. MILLOUX: *Sur l'equation differentielle $\ddot{x} + A(t)x = 0$* , Prace Matematyczne - Fizyczne, 41, (1934). Per un'altra dimostrazione si veda G. PRODI: *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$* , Rend. Acc. Nanz. Lincei, 1950.

Infatti sostituita nella (1) $y(x)$, diviso poi per $\beta(x)$, moltiplicato per $y'(x)$ ed integrato infine tra x_1 ed x_2 ($x_0 \leq x_1 < x_2$) si ha:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{y''(x)y'(x)}{\beta(x)} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)y'(x)}{\alpha(x)} dx = 0.$$

Applicando separatamente ai due integrali il secondo teorema della media segue che:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta(x_1)} \left[\frac{y'^2(\xi)}{2} - \frac{y'^2(x_1)}{2} \right] + \frac{1}{\beta(x_2)} \left[\frac{y'^2(x_2)}{2} - \frac{y'^2(\xi)}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{\alpha(x_1)} \left[\frac{y^2(\eta)}{2} - \frac{y^2(x_1)}{2} \right] + \frac{1}{\alpha(x_2)} \left[\frac{y^2(x_2)}{2} - \frac{y^2(\eta)}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Quindi tenendo conto che $\frac{1}{\beta(x_1)} - \frac{1}{\beta(x_2)}$ ed $\frac{1}{\alpha(x_1)} - \frac{1}{\alpha(x_2)}$ sono non negative perchè $x_1 < x_2$ ed $\alpha(x)$, $\beta(x)$ non decrescenti si trae $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq 0$. cdd.

Se ora $A(x)$ è una funzione a variazione limitata, compresa tra numeri fissi positivi, è pure a variazione limitata $\log A(x)$, cioè $\log A(x) = P(x) - N(x)$ con $P(x)$ ed $N(x)$ non decrescenti a limiti finiti per $x \rightarrow +\infty$, quindi $A(x) = \frac{e^{P(x)}}{e^{N(x)}} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ non decrescenti a limiti finiti e poichè dal LEMMA I si ha $|y(x)| \leq \sqrt{\alpha(x)K^{\frac{1}{2}}} |y'(x)| \leq \sqrt{\beta(x)K^{\frac{1}{2}}}$, con K costante, ne segue il teorema di CACCIOPPOLI ³⁾.

2. - Se nella (1) $\alpha(x) \equiv 1$ e $\beta(x) \rightarrow +\infty$ si ha $\varphi(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\beta(x)}$ e per il LEMMA I $\varphi(x) \rightarrow \lambda_y$ con λ_y finito e non negativo. Ovviamente $\max \lim y(x) = \lambda_y$ e $\min \lim y(x) = -\lambda_y$. Vale ora il

³⁾ Per una trattazione sistematica di teoremi di questo tipo si veda SANSONE G.: «Equazioni differenziali nel campo reale», Vol. II, pag. 23 e seg.

LEMMA II: *Se l'equazione ammette una soluzione $y(x)$ per cui risulti $\lambda_s > 0$, detta η_i la successione dei punti di massimo di $y(x)$, per ogni altra soluzione $z(x)$ dell'equazione si ha $|z(\eta_i)| \rightarrow \lambda_s$, dove λ_s è il massimo limite di $z(x)$.*

Intanto l'esistenza della successione η_i è assicurata dal noto fatto che ogni soluzione, non identicamente nulla, dell'equazione è indefinitamente oscillante attorno all'asse x perchè $A(x) \rightarrow +\infty$.

Nel wronskiano $y'(x)z(x) - z'(x)y(x) = k$, ($k = \text{costante}$), posto $x = \eta_i$ si ha $z'(\eta_i)y(\eta_i) = k$, da cui per essere $\lambda_y \neq 0$ e finito $z'(\eta_i) \rightarrow \frac{k}{\lambda_y}$.

Ora per il LEMMA I, $z^2(x) + \frac{z'^2(x)}{\beta(x)} \rightarrow \lambda_s^2$ e nei punti η_i dato che $\beta(x) \rightarrow +\infty$ e $z'(\eta_i)$ converge risulta $z^2(\eta_i) \rightarrow \lambda_s^2$ cioè la tesi $|z(\eta_i)| \rightarrow \lambda_s$. cdd.

Ecco come si pervenga ora rapidamente al teorema di MILLOUX. Se l'equazione non possedesse soluzioni, non identicamente nulle, asintotiche a zero, scelte due siffatte soluzioni linearmente indipendenti $u(x)$ e $v(x)$, se η_i è la successione dei punti di massimo di un'altra soluzione per il LEMMA II si potrà estrarre da η_i una successione σ_i tale che $u(\sigma_i) \rightarrow p$ e $v(\sigma_i) \rightarrow q$ con $|p| = \lambda_w \neq 0$ e $|q| = \lambda_v \neq 0$. Ma l'integrale non identicamente nullo $w(x) = -qu(x) + pv(x)$, su σ_i converge a zero e d'altra parte poichè $|w(\eta_i)| \rightarrow \lambda_w$ ne segue $\lambda_w = 0$ e $w(x) \rightarrow 0$.