

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Sui sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di genere π e di grado $n \geq 3\pi + 3$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 23 (1954), p. 127-162

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__127_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE DELLO SPAZIO A CURVA CARATTERISTICA DI GENERE π E DI GRADO $n \geq 3\pi + 3$

Memoria () di ARNO PREDONZAN (a Trieste)*

A norma di un classico risultato di CASTELNUOVO-ENRIQUES una superficie algebrica irriducibile, F_2^n , a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$ e di ordine $n > 2\pi - 2$, è razionale o riferibile bi-razionalmente a una rigata ¹⁾. Ne consegue che una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3^n , a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$ e di ordine $n > 2\pi - 2$, è razionale ²⁾ od ha irregolarità superficiale $q_2 > 0$ ³⁾.

La classificazione cremoniana dei sistemi lineari completi, semplici, irriducibili di superficie algebriche dello spazio lineare S_3 , a curva caratteristica (variabile) di genere $\pi \geq 2$ e di grado $n > 2\pi - 2$, può pertanto essere effettuata attraverso alla classificazione proiettiva delle V_3^n a superficie-sezioni regolari, normali in uno spazio lineare S_r e a curve-sezioni di genere π .

(*) Pervenuta in Redazione il 19 ottobre 1953.

¹⁾ Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, « Ann. de l'École Norm. Sup. de Paris », s. III, t. 23, (1906).

²⁾ Ved. G. FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, « Ann. di Mat. », s. III, t. 24, (1915); U. MORIN, *Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie-sezioni razionali*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 18, (1939).

³⁾ Ved., a proposito delle irregolarità di una V_3 algebrica, F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. 28, (1909).

Tale classificazione è nota solamente nei casi $\pi = 2$ ⁴⁾ e $\pi = 3$ ⁵⁾.

In questa Memoria considero varietà algebriche irriducibili, V_3^n , a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$, normali in uno spazio lineare S_r e di ordine $n \geq 3\pi + 3$. Delle stesse do la classificazione proiettiva completa e determino i relativi sistemi lineari rappresentativi. Vengo così implicitamente ad ottenere risposta definitiva alla questione concernente la massima dimensione dei sistemi lineari (non rappresentativi di coni) di superficie algebriche dello spazio S_3 , a curva caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere $\pi \geq 2$ ⁶⁾, questione dalla quale trae lo spunto questo lavoro.

Dalle successive considerazioni escludo i coni V_3^n in quanto lo studio degli stessi è diretta conseguenza di quello delle superficie algebriche.

I risultati a cui pervengo possono così riassumersi:

I. — *Le V_3^n algebriche irriducibili, non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni di genere $\pi \geq 2$, normali in uno spazio lineare S_r e di ordine $n \geq 3\pi + 3$, appartengono ad uno dei seguenti tipi proiettivamente distinti:*

1) *varietà $V_3^{r+\pi-2}$ di S_r ($2\pi + 5 \leq r \leq 3\pi + 4$), a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi \geq 2$, intersezione residua di una varietà razionale normale M_4^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi S_3) con un'iperquadrica di S_r passante per $r - \pi - 4$ spazi S_3 della M_4^{r-3} stessa; gli S_3 generatori di tale*

⁴⁾ Ved. U. MORIN, *Sui tipi di sistemi lineari di superficie algebriche a curva caratteristica di genere due*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 19, (1940).

⁵⁾ Ved. U. MORIN, *Sulle varietà algebriche a curve-sezioni di genere tre*, « Ann. di Mat. », s. IV, t. 21, (1942).

⁶⁾ Ved., in relazione a tale questione, U. MORIN, *Massima dimensione dei sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di dato genere*, « Rend. del Sem. Mat. di Padova », v. X, (1939): i risultati contenuti in questo lavoro sono però incompleti. La soluzione di analogo problema per i sistemi lineari di curve piane trovasi in G. CASTELNUOVO, *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere*, « Ann. di Mat. », s. II, t. 18, (1890).

M_4^{r-3} possono essere a due a due sghembi, oppure la M_4^{r-3} è un S_6 -cono (e allora risulta $r = 2\pi + 5$), o un S_1 -cono ⁷⁾;

2) rigata V_3^{12} di S_{11} , a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 3$;

3) rigata V_3^{13} di S_{12} , a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 3$, o una sua proiezione (da un suo punto su un S_{11} complementare);

4) rigata V_3^{21} di S_{17} , a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 6$;

5) pseudo-cono d'indice uno ⁸⁾ $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni (non iperellittiche) di genere $\pi = 2k + 1$ ($k \geq 1$).

Tali varietà ammettono, rispettivamente, i seguenti sistemi lineari rappresentativi in uno spazio lineare S_3 :

1) sistema lineare di superficie φ^v (d'ordine v opportuno) con una retta base di molteplicità $v - 2$ ed altri elementi base;

2) sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con una retta base semplice e un punto base doppio, non appartenentisi;

3) sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con un punto base doppio biplanare nel quale sia fisso un piano tangente e k ($k = 0, 1$) punti base semplici;

4) sistema lineare di superficie φ^5 (d'ordine 5) con un punto base quadruplo e una quartica base di genere tre (eventualmente degenerare);

5) sistema lineare di superficie φ^{k+2} (d'ordine $k + 2 \geq 3$) con una retta base di molteplicità $k - 1$ e su questa un punto base $(k + 1)$ -uplo con in esso il cono delle tangenti spezzato in k piani (coincidenti) fissi e in uno variabile per la retta base.

⁷⁾ Per S_k -cono s'intende un cono il cui vertice sia uno spazio lineare di dimensione k .

⁸⁾ Per pseudo-cono d'indice p s'intende una varietà a tre dimensioni, luogo di un sistema ∞^1 di coni quadrici (di S_3) i cui vertici descrivono una curva d'ordine p .

Tra le varietà del tipo 1) sono pure compresi degli pseudo-coni d'indice p ($2 \leq 2p \leq \pi$).

II. — *La dimensione dei sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio lineare S_3 , a curva caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere $\pi \geq 2$ e non rappresentativi di conì, può assumere, al massimo, il valore $r = 3\pi + 4$ ⁹⁾.*

Tale massimo è raggiunto solo da quei sistemi lineari di superficie (a curva caratteristica iperellittica) che possono cremonianamente mutarsi in uno dei seguenti tipi:

a) *sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi+2}$ (d'ordine $2\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità 2π , π rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto base B di molteplicità $2\pi + 1$ nel quale siano fissi 2π piani tangenti, e una conica base situata in un piano generico per b e tangente a b in B ;*

b₁) *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità π , una retta base doppia c incidente b in un punto B di molteplicità $\pi + 1$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa (dell'ordine π) e in un piano variabile per b ;*

b₂) *sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi-\mu-1}$ (d'ordine $2\pi - \mu - 1$; $\mu = 0, 1, \dots, \pi - 2$ con una retta base b di molteplicità $2\pi - \mu - 3$, $\pi - \mu - 2$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto base B di molteplicità $2\pi - \mu - 2$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa (dell'ordine $2\pi - \mu - 3$) e in un piano variabile per b .*

Le varietà immagini dei suddetti sistemi lineari sono, rispettivamente:

⁹⁾ Per gli S_0 -conì $V_3\pi$, il massimo valore della dimensione dello spazio ambiente (e quindi dei relativi sistemi lineari rappresentativi) è $r = 3\pi + 6$. Tale massimo può essere raggiunto, per ogni valore di $\pi \geq 2$, dai conì che da un punto O proiettano una superficie $F_{2,4\pi+4}$ (d'ordine $4\pi + 4$) di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni iperellittiche di genere π ; oppure, per $\pi = 3$, dai conì che da O proiettano una $F_{2,16}$ (d'ordine 16) di S_{14} rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle quartiche. Ciò deriva immediatamente dai risultati del lavoro di G. CASTELNUOVO, cit. in ⁶⁾.

- a) varietà $V_3^{4\pi+2}$ di $S_{3\pi+4}$, a curve-sezioni iperellittiche di genere π , intersezione residua di una varietà $M_4^{3\pi+1}$ (che da una retta a proietta una rigata razionale normale $F_2^{3\pi+1}$ di $S_{3\pi+2}$, a direttrice minima d'ordine π) con una iperquadrica di $S_{3\pi+4}$ passante per 2π spazi lineari S_3 della $M_4^{3\pi+1}$ stessa;
- b) pseudo-coni d'indice uno $V_3^{4\pi+2}$ di $S_{3\pi+4}$, a curve-sezioni iperellittiche di genere π .

La I parte di questo enunciato verrà stabilita in due successivi capitoli.

Nel primo (suddiviso in quattro paragrafi) verranno considerate V_3^n , non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni iperellittiche. Più precisamente, nel § 1, dopo alcune nozioni preliminari, sarà indicata la genesi di una V_3^n di tale tipo come intersezione residua di una varietà M_4^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi S_3) con una iperquadrica di S_r passante per $r - \pi - 4$ spazi S_3 della M_4^{r-3} stessa. Nei §§ 2, 3 verranno trattati, rispettivamente, i casi delle V_3^n le cui relative M_4^{r-3} siano degli S_0 —, o degli S_1 — coni. Nel § 4 verranno poi considerate V_3^n , le cui M_4^{r-3} abbiano gli S_3 generatori a due a due sghembi.

Costituiranno, invece, argomento del secondo capitolo le V_3^n , non coni, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni non iperellittiche.

La II parte dell'enunciato sarà, infine, immediata conseguenza delle conclusioni dei suddetti capitoli. Di questa si tratterà nel capitolo III.

CAPITOLO I

 V_3^n A CURVE-SEZIONI IPERELLITTICHE

§ 1. — Nozioni preliminari.

1. — Si consideri una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3^n , a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni iperellettiche di genere $\pi \geq 2$, normale in uno spazio lineare S_r (di dimensione r), e di ordine

$$(1) \quad n \geq 3\pi + 3.$$

Tale V_3^n risulta razionale¹⁰⁾, ed essendo normale pure le sue curve-sezioni sono normali; vale pertanto la relazione

$$(2) \quad r = n - \pi + 2,$$

dalla quale, avuto riguardo alla (1), discende

$$(3) \quad r \geq 2\pi + 5.$$

2. — È noto che la V_3^n in questione contiene un fascio lineare $|Q_2|$ di quadriche¹¹⁾ i cui spazi S_3 di appartenenza generano una varietà razionale normale M_4^{r-3} (di dimensione 4 ed ordine $r-3$).

Ci proponiamo di dimostrare che la V_3^n è *intersezione residua della M_4^{r-3} con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r passante per $r-\pi-4$ spazi lineari S_3 della M_4^{r-3} stessa*¹²⁾.

Si consideri, a questo scopo, il sistema lineare $|2F|$ delle superficie, sezioni della V_3^n con le iperquadriche Q_{r-1} di S_r .

¹⁰⁾ Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, F. FANO, U. MORIN, loc. cit. in ¹⁾, ²⁾.

¹¹⁾ Ved. F. ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellettiche*, « Math. Annalen », Bd. 46, (1896).

¹²⁾ Il procedimento seguito per la dimostrazione di questa proposizione è analogo a quello usato nel n. 1 del lavoro citato in ⁴⁾ e nel n. 10 del lavoro citato in ⁵⁾.

Tale sistema determina, sopra una generica superficie-sezione F della V_3^n , il sistema di curve $|2C|$, doppio del sistema $|C|$ delle curve-sezioni di F .

Indicati con r' , n' , π' , rispettivamente, la dimensione, l'ordine e il genere del sistema $|2C|$, risulta ovviamente $r' \leq n' - \pi' + 1$; quindi, tenuto conto che $n' = 4n$, $\pi' = 2\pi + n - 1$ ¹³⁾,

$$(4) \quad r' \leq 3n - 2\pi + 2.$$

Una generica superficie del sistema $|2F|$ che contenga una superficie-sezione F della V_3^n si spezza in tale F ed in un'ulteriore superficie-sezione generica di V_3^n ; ne consegue che è r la dimensione del sistema delle superficie di $|2F|$ che passano per la generica F di V_3^n . La dimensione del sistema $|2F|$ è pertanto data da $\delta = r' + r + 1$, dalla quale, avuto riguardo alle (2), (4), discende

$$(5) \quad \delta \leq 4r + \pi - 3.$$

Detta d_V la dimensione del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r che contengono la V_3^n , e ricordando che vale $\binom{r+2}{2} - 1$ la dimensione del sistema di tutte le Q_{r-1} di S_r , si ha

$$d_V = \binom{r+2}{2} - 1 - (\delta + 1),$$

quindi, in virtù della (5)

$$(6) \quad d_V \geq \frac{1}{2}(r^2 - 5r - 2\pi + 4).$$

Vogliamo ora determinare la dimensione d_M del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r passanti per la M_4^{r-3} .

Se, in particolare, tale M_4^{r-3} è generata dagli S_3 che da un S_2 fisso proiettano una curva razionale normale C^{r-3} (d'ordine $r-3$) di un S_{r-3} , la dimensione del sistema in questione

¹³⁾ Ved. ad es. F. ENRIQUES - L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Cedam, Padova, (1932), p. 63.

coincide con quella del sistema delle iperquadriche Q_{r-4} dell' S_{r-3} che contengono la C^{r-3} e vale quindi

$$\binom{r-1}{2} - 1 - [2(r-3) + 1] = \frac{1}{2}(r^2 - 7r + 10).$$

Se poi la M_4^{r-3} è di tipo generale, la dimensione d_M non può ovviamente superare quella ora trovata, per cui risulta

$$(7) \quad d_M \leq \frac{1}{2}(r^2 - 7r + 10).$$

Posto $d = d_V - (d_M + 1)$, dalle (6), (7) discende

$$(8) \quad d \geq r - \pi - 4,$$

quindi, per la (3), $d > 0$. Tanto basta per concludere che la generica Q_{r-1} di S_r che passa per la V_3^n , non contiene di conseguenza la M_4^{r-3} ; le Q_{r-1} per la V_3^n segano dunque sulla M_4^{r-3} un sistema lineare, di dimensione $d > 0$, di varietà a tre dimensioni V_3^h , di ordine $h = 2(r-3) - n$. Tenuto conto della (2) si ha poi

$$(9) \quad h = r - \pi - 4.$$

La generica varietà V_3^h si spezza in h spazi S_3 : ciò segue immediatamente dal fatto che la generica Q_{r-1} di S_r passante per la V_3^n , sega l' S_3 generico della M_4^{r-3} in una quadrica Q_2 della V_3^n stessa. La proposizione enunciata all'inizio di questo n. resta così provata.

Si può ancora rilevare che, essendo h la dimensione del sistema lineare completo delle V_3^h di M_4^{r-3} spezzate in h spazi S_3 , nella (8) — e di conseguenza nelle (6), (7) — deve valere il segno di uguaglianza.

3. — Una varietà M_4^{r-3} razionale normale (luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi lineari S_3) può avere gli S_3 generatori a due a due sghembi, oppure può essere un cono di vertice un punto A , una retta a , o un piano α ¹⁴⁾.

¹⁴⁾ Ved. per lo studio delle varietà razionali normali luogo di un sistema razionale ∞^1 di spazi lineari di dimensione qualunque: BEL-LATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari*, « Atti Acc. di Torino », t. 36, (1901).

Verifichiamo che per la M_4^{r-3} del n. precedente quest'ultimo caso non può presentarsi.

Se infatti fosse α il vertice del cono M_4^{r-3} , un S_{r-1} per α e per $r-3$ quadriche generiche Q_2 della V_3^n , segherebbe quest'ultima in una superficie dell'ordine $2(r-3)$ almeno: e ciò è assurdo in quanto per le (1), (2), risulta $2(r-3) > n$.

Se M_4^{r-3} è un cono di vertice A (o a) la Q_{r-1} generica per V_3^n (in quanto contenente h spazi S_3 di M_4^{r-3}) passa per A (o a).

Tale Q_{r-1} può essere, o meno, un cono di vertice A (o a , o un punto di a). Nella prima eventualità la V_3^n risulta necessariamente un cono.

4. — Si supponga che la varietà M_4^{r-3} sia un cono di vertice un punto A (o una retta a), senza che, di conseguenza, la V_3^n risulti un cono.

L'iperquadrica Q_{r-1} (che sega M_4^{r-3} nella V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi S_3) passa allora semplicemente per A (o a); da ciò risulta che il punto A (o la retta a) ha per la V_3^n molteplicità $(r-3) - (r-\pi-4) = \pi + 1$.

Indicati con $S_3^{(1)}, S_3^{(2)}, \dots, S_3^{(h)}$ gli h S_3 suddetti, sia S_{r-1}^* un generico iperpiano di S_r . Questo sega la M_4^{r-3} in una varietà M_3^{r-3} (luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani) contenente gli h piani $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(h)}$, sezioni con l' S_{r-1}^* degli h spazi $S_3^{(1)}, S_3^{(2)}, \dots, S_3^{(h)}$. L'iperquadrica Q_{r-1} è poi tagliata dall' S_{r-1}^* in una iperquadrica Q_{r-2}^* .

La V_3^n si proietta biunivocamente dal punto A (o da un punto di a) sulla M_3^{r-3} , e su questa è rappresentata dal sistema lineare completo $|\Phi|$ di superficie, determinato dalle sezioni variabili della M_3^{r-3} con le iperquadriche di S_{r-1}^* che passano per $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(h)}$ e per la curva C^u , traccia sull' S_{r-1}^* del cono K_2^n secondo cui l' S_{r-1} , tangente alla Q_{r-1} in A , sega la V_3^n .

Se la M_3^{r-3} è rappresentata in uno spazio lineare S_s da un sistema lineare di superficie ψ^s (d'ordine s) con una retta base b di molteplicità $s-1$ (in guisa che ai piani $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(h)}$ corrispondano h piani $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(h)}$ per b), la

V_3^n può rappresentarsi in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare di superficie, d'ordine v , $|\varphi^v| \equiv |2\psi^s - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \dots - \beta^{(h)}|$, avente come ulteriore elemento base la curva C^v (d'ordine v) sezione di una φ^v con una superficie del sistema $|\psi^s - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \dots - \beta^{(h)}|$ ed altri (eventuali) elementi base situati nell'intorno della retta b^{15} .

§ 2. — V_3^n la cui M_4^{r-3} sia un S_0 -cono.

5. — Supporremo in questo paragrafo che la M_4^{r-3} (luogo degli $\infty^1 S_3$ ambiente delle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della V_3^n) sia un cono di vertice un punto A , senza che per ciò risulti un cono la V_3^n .

Poichè l'iperquadrica Q_{r-1} di S_r , che sega la M_4^{r-3} nella V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi lineari S_3 , non può essere un cono di vertice A (n. 3), tali S_3 debbono appartenere all'iperpiano tangente in A alla Q_{r-1} stessa; il loro spazio congiungente deve pertanto avere dimensione $\rho \leq r - 1$.

6. — Sia M_3^{r-3} una varietà (luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani) sezione della M_4^{r-3} con un iperpiano generico di S_r .

Indicati con m' , m'' , rispettivamente, gli ordini della (o di una) curva direttrice minima e della (o di una) superficie rigata minima della M_3^{r-3} , si ha ¹⁶⁾

$$(10) \quad 2m' \leq m'' \quad , \quad 2m'' \leq r + m' - 3.$$

In relazione ad m' , m'' (che caratterizzano la specie della M_3^{r-3}) si possono presentare i seguenti casi:

a) $2m' < m''$, $2m'' < r + m' - 3$: la M_3^{r-3} possiede una sola direttrice minima e una sola rigata minima appartenenti;

¹⁵⁾ Ved. U. MORIN, loc. cit. in ⁴⁾, n. 17; loc. cit. in ⁵⁾, n. 21.

¹⁶⁾ I risultati di questo n. si trovano in C. SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, «Atti Acc. di Torino», t. 21, (1885).

b) $2m' = m''$, $2m'' < r + m' - 3$: sulla M_3^{r-3} vi sono ∞^1 direttrici minime appartenenti all'unica rigata minima;

c) $2m' < m''$, $2m'' = r + m' - 3$: la M_3^{r-3} ha ∞^1 rigate minime passanti per l'unica direttrice minima;

d) $2m' = m''$, $2m'' = r + m' - 3$: su M_3^{r-3} vi sono ∞^2 direttrici minime e ∞^2 rigate minime.

Lo spazio congiungente h piani (qualunque) della M_3^{r-3} ha la dimensione $\rho - 1$ data da:

- 1) $\rho - 1 = 3h - 1$, se $h \leq m' + 1$;
- 2) $\rho - 1 = 2h + m'$, se $m' + 1 < h \leq m'' - m'$;
- 3) $\rho - 1 = h + m'' + 1$, se $m'' - m' < h \leq r - m'' - 3$;
- 4) $\rho - 1 = r - 1$, se $h > r - m'' - 3$.

7. — Dall'ultima considerazione del n. 5 ($\rho \leq r - 1$) segue che h piani della M_3^{r-3} debbono appartenere ad uno spazio $S_{\rho-1}$, di dimensione $\rho - 1 \leq r - 2$.

È facile vedere che, perchè resti soddisfatta quest'ultima condizione, e tenuto anche conto delle limitazioni (3), (10) e delle $\pi \geq 2$, $m' \geq 1$ ¹⁷⁾, i casi 1), 2), 4) del n. precedente non possono verificarsi; può invece presentarsi il caso 3) solo se

$$(11) \quad m'' \leq \pi + 1.$$

8. — Vogliamo qui dimostrare che, *affinchè l'intersezione residua di una M_4^{r-3} (S_0 -cono) con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r per h suoi spazi S_3 , sia una V_3^π (con un punto A di molteplicità $\pi + 1$) irriducibile, deve necessariamente risultare*

$$(12) \quad h \leq m''.$$

Facciamo a questo scopo l'ipotesi assurda $h > m''$.

Considereremo separatamente due casi.

1° CASO: $r > 2\pi + 5$. — Risulta $h > 2m'$; se infatti fosse

¹⁷⁾ Se fosse $m' = 0$, la M_3^{r-3} sarebbe un S_0 -cono, quindi la M_4^{r-3} un S_1 -cono, il che resta escluso dall'ipotesi iniziale del n. 5.

$h \leq 2m'$, si avrebbe, in virtù della prima delle (10), e delle (9), (11), $r \leq 2\pi + 5$.

Sulla M_3^{r-3} si possono determinare tre curve direttrici razionali normali $C^{m'}$, $C^{m''-m'}$, $C^{r-m''-3}$ (degli ordini m' , $m''-m'$, $r-m''-3$) appartenenti rispettivamente a tre spazi lineari, $S_{m'}$, $S_{m''-m'}$, $S_{r-m''-3}$ (tra loro indipendenti) e tali che i piani generatori della M_3^{r-3} stabiliscono tra di esse un riferimento proiettivo. Le rette congiungenti punti corrispondenti, in tale riferimento, della $C^{m'}$ e $C^{m''-m'}$, determinano l'unica rigata minima $F_2^{m''}$ (d'ordine m'') della M_3^{r-3} (n. 6).

La Q_{r-1} per gli h S_3 di M_4^{r-3} è segata, dall' S_{r-1} ambiente della M_3^{r-3} , in una iperquadrica Q_{r-2} di S_{r-1} contenente h piani generatori della M_3^{r-3} (sezioni degli h S_3 con l' S_{r-1}), quindi h rette generatrici della $F_2^{m''}$.

Poichè si è visto che $h > 2m'$, la Q_{r-2} contiene, oltre alle h generatrici della $F_2^{m''}$, la sua direttrice $C^{m'}$.

Proviamo che, di conseguenza, Q_{r-2} contiene anche la $F_2^{m''}$. Se infatti così non fosse la segherebbe, fuori della $C^{m'}$ e delle h generatrici, in una curva C^k (eventualmente comprendente un certo numero di generatrici), il cui ordine $k = 2m'' - m' - h$ dovrebbe soddisfare (in virtù dell'ipotesi assurda $h > m''$) alla limitazione $k < m'' - m'$. Si possono qui presentare due eventualità:

a) C^k si spezza in k generatrici: la Q_{r-2} verrebbe allora ad incontrare la $C^{m''-m'}$ in (almeno) $h + k$ punti e quindi [poichè $h + k = h + (2m'' - m' - h) = 2m'' - m' > 2(m'' - m')$] la conterrebbe tutta; ne seguirebbe [in quanto $m' + (m'' - m') + h = m'' + h > 2m''$] che anche la $F_2^{m''}$ risulterebbe situata sulla Q_{r-1} .

b) C^k comprende (almeno) una direttrice di $F_2^{m''}$: se così fosse sulla rigata $F_2^{m''}$ vi sarebbe, oltre alla $C^{m'}$, una direttrice di ordine inferiore ad $m'' - m'$, il che è manifestamente assurdo.

Proiettando $F_2^{m''}$ da A si ottiene un S_0 -cono $V_3^{m''}$ (d'ordine m''). Questo viene ad avere in comune con l'iperquadrica Q_{r-1} la rigata $F_2^{m''}$ ed $h(> m'')$ piani (almeno) dal che discende

che risulta contenuto nella Q_{r-1} stessa. Ciò porta di conseguenza che la varietà V_3^n si spezzi nella $V_3^{m''}$ ed in una varietà residua.

2° CASO: $r = 2\pi + 5$. — Se $h > 2m'$, vale il ragionamento del 1° CASO. Se invece $h = 2m'$ ¹⁸⁾, dalla prima delle (10) discende direttamente $h \leq m''$.

L'asserto iniziale risulta così provato.

9. — Dalle (11), (12), e tenuto conto delle (2), (3), (9) segue

$$(13) \quad r = 2\pi + 5, \quad n = 3\pi + 3, \quad m'' = \pi + 1, \quad h = \pi + 1.$$

Lo spazio congiungente h S_3 di M_4^{r-3} ha poi la dimensione $2\pi + 4$ [n. 6, 3)].

Si può pertanto concludere che: *se esiste una V_3^n del tipo considerato nel n. 5, questa non può essere che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ (con un punto A di molteplicità $\pi + 1$), la cui $M_4^{2\pi+2}$ proiettata da A una $M_3^{2\pi+2}$ avente un'unica rigata minima dell'ordine $\pi + 1$.*

10. — In questo e nel n. successivo proveremo l'effettiva esistenza della V_3^n di cui al n. 9.

Si consideri, a questo scopo, una M_4^{r-3} di S_r che da un punto A proietti una varietà razionale normale M_3^{r-3} di S_{r-1} , non cono, luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani ed avente un'unica superficie rigata minima dell'ordine m'' .

Intenderemo sino alla fine di questo paragrafo che r, n, m'', h abbiano i valori dati dalle (13).

Nello spazio lineare $S_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$, sia $x_r = 0$ l'equazione dell'iperpiano $\bar{S}_{r-1}$ congiungente h (fissati) spazi S_3 della M_4^{r-3} .

Una Q_{r-1} generica per tali S_3 non è necessariamente un cono di vertice A ed ha come iperpiano tangente in A l' $\bar{S}_{r-1}$.

¹⁸⁾ È immediato verificare che non può essere $h < 2m'$.

L'equazione della Q_{r-1} può, pertanto, scriversi nella forma

$$(14) \quad F(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv f(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) + \\ + x_r(a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_{r-1}x_{r-1}) = 0,$$

dove $f(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) = 0$ è l'equazione, dentro all' $\bar{S}_{r-1}$, di un generico ipercono quadrico di vertice A passante per gli h spazi S_3 , ed $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ sono costanti arbitrarie.

Calcoliamo la dimensione δ_h del sistema lineare delle Q_{r-1} di S_r per gli h S_3 . Questa, ove si osservi la (14), è data da

$$(15) \quad \delta_h = \delta^* + (r+1),$$

essendo δ^* la dimensione del sistema lineare degli iperconi quadrici, di vertice A , appartenenti all' $\bar{S}_{r-1}$ e passanti per gli h S_3 . Tale dimensione δ^* è, ovviamente, uguale a quella delle iperquadriche Q_{r-2} di un generico S_{r-2} di $\bar{S}_{r-1}$, passanti per gli h piani secondo cui l' S_{r-2} sega i fissati h spazi S_3 . Si ha dunque

$$(16) \quad \delta^* \geq \binom{r}{2} - 1 - 6h,$$

valendo il segno di uguaglianza se, e soltanto se, le condizioni imposte dal passaggio per gli h piani di S_{r-2} sono indipendenti.

Dalla (15) e in virtù della (16), si ha

$$(17) \quad \delta_h \geq \binom{r}{2} + r - 6h.$$

La dimensione del sistema lineare delle varietà V_3^n segate sulla M_4^{r-3} , fuori degli h S_3 , dalle Q_{r-1} del sistema ora considerato, è data da

$$(18) \quad D = \delta_h - (d_M + 1),$$

avendo d_M il valore (7).

Dalla (18), tenuto conto delle (7), (17) e della prima e quarta delle (13), si ottiene

$$(19) \quad D \geq 2\pi + 8.$$

11. — Risulta chiaro, tenuto anche conto delle considerazioni precedenti, che la generica Q_{r-1} per h S_3 generatori della M_4^{r-3} (n. 10) incontra ulteriormente quest'ultima in una V_3^n del tipo voluto (n. 9) se, e soltanto se:

a) non passa di conseguenza per nessun altro S_3 generatore di M_4^{r-3} ;

b) non contiene alcuna $S_2 \cdot V_3^i$ direttrice (d'ordine $i \geq m''$) della M_4^{r-3} ¹⁹⁾.

Proviamo che, ove valgano le (13), le proposizioni ora enunciate risultano verificate.

La proposizione a) è evidente: basta infatti pensare che se la generica Q_{r-1} per h S_3 generatori della M_4^{r-3} ne contenesse, di conseguenza, un altro, lo spazio congiungente i primi con quest'ultimo verrebbe ad essere l' S_r ambiente [n. 6, 4)]; la Q_{r-1} sarebbe pertanto un cono, il che non può avvenire data la sua genericità (n. 10).

Verifichiamo ora la validità della proposizione b). A tale scopo si faccia l'ipotesi assurda ch'essa non valga. La Q_{r-1} contiene allora una $S_2 \cdot V_3^i$, proiezione da A di una rigata F_2^i (d'ordine $i \geq m''$) situata sulla varietà M_3^{r-3} , sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-1} generico. Tale $S_2 \cdot V_3^i$ deve appartenere all'iperpiano tangente $\bar{S}_{r-1}$ perchè, se così non fosse, la Q_{r-1} , dovendo contenere gli ∞^1 piani per A della $S_2 \cdot V_3^i$ (non giacenti su $\bar{S}_{r-1}$) risulterebbe un cono. La sezione della M_4^{r-3} con l' $\bar{S}_{r-1}$ comprende dunque la $S_2 \cdot V_3^i$ e gli h spazi S_3 ; da ciò discende, tenuto anche conto delle (13),

$$(20) \quad i = m'' = \pi + 1,$$

cioè $S_2 \cdot V_3^i$ è proiezione da A dell'unica rigata minima $F_2^{m''}$ della M_3^{r-3} .

L'intersezione residua con M_4^{r-3} della Q_{r-1} per la $S_2 \cdot V_3^i$

¹⁹⁾ Per $S_2 \cdot V_3^i$ direttrice s'intende una varietà luogo di ∞^1 piani che da A proietta una rigata F_2^i della M_3^{r-3} (sezione di M_4^{r-3} con un generico S_{r-1}). Ogni S_3 di M_4^{r-3} contiene, ovviamente, un piano della $S_2 \cdot V_3^i$. Una Q_{r-1} generica per la $S_2 \cdot V_3^i$ sega il generico S_3 di M_4^{r-3} in due piani, uno dei quali (quello situato sulla $S_2 \cdot V_3^i$) passa per A .

e per gli h S_3 è una varietà (luogo di un fascio di piani), V_3^1 , il cui ordine l , avuto anche riguardo alle (13), (20), vale $l = 2(r-3) - i - h = r-3 = 2\pi+2$. La V_3^1 appartiene pertanto ad un S_{r-1} , il che ci permette di affermare che può ottenersi come intersezione della M_4^{r-3} con un (generico) iperpiano S_{r-1} di S_r .

Da ciò segue che la dimensione del sistema lineare delle $V_3^n (= V_3^i + V_3^1)$, segate su M_4^{r-3} dalle Q_{r-1} per gli h S_3 , vale $D = r = 2\pi+5$, il che contrasta con la (19). Resta così provata anche la proposizione b).

Da quanto precede si può concludere che una V_3^n di S_r ($r \geq 2\pi+5$) del tipo studiato in questo paragrafo, non può essere che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ intersezione residua di una $M_4^{2\pi+2}$ (che da un punto A proietta una $M_3^{2\pi+2}$ razionale normale di $S_{2\pi+4}$, non cono, luogo di un sistema razionale ∞^1 di piani ed avente un'unica rigata minima d'ordine $\pi+1$) con una iperquadrica $Q_{2\pi+4}$ di $S_{2\pi+5}$ passante per $\pi+1$ spazi lineari S_3 della $M_4^{2\pi+2}$ stessa.

12. — Una $M_3^{2\pi+2}$, non cono, con rigata minima (unica), d'ordine $\pi+1$ e direttrice minima (posta sulla rigata minima) d'ordine m' ($1 \leq m' \leq \frac{m''}{2}$), può rappresentarsi, in uno spazio lineare S_3 , mediante il sistema lineare di superficie $\phi^{\pi+1}$ (d'ordine $\pi+1$) aventi una retta base b di molteplicità π , lungo questa $m'-1$ piani tangenti fissi e in $\pi-2m'+1$ suoi punti fisso un ulteriore piano tangente (cioè $m'-1$ rette base incidenti b e ad essa infinitamente vicine, e $\pi-2m'+1$ punti base infinitamente vicini a b); nella rappresentazione in questione ai piani per la retta b corrispondono i piani generatori della $M_3^{2\pi+2}$ ²⁰).

Dal n. 4 segue direttamente che una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ del tipo precisato nel n. 11, può essere rappresentata in uno spazio lineare S_3 dal sistema lineare di superficie $\phi^{\pi+1}$ (d'ordine $\pi+1$) con una retta base b di molteplicità $\pi-1$, $m'-1$

²⁰) Ved. C. SEGREG, loc. cit. in ¹⁶).

($2 \leq 2m' \leq \pi + 1$) *rette base doppie incidenti b e ad essa infinitamente vicine e $\pi - 2m' + 1$ punti base doppi infinitamente vicini a b ; inoltre in ogni punto di b le $\varphi^{\pi+1}$ debbono avere gli stessi $\pi - 1$ piani tangenti²¹⁾ ($2m' - 2$ dei quali a due a due coincidenti, fissi lungo b e passanti per le $m' - 1$ rette base doppie; in ciascuno dei punti di b , a cui è infinitamente vicino un punto base doppio, altri due piani tangenti coincidenti e passanti per il punto doppio in questione; in un punto P , generico di b , $\pi - 2m' + 1$ piani tangenti generalmente distinti e variabili con P)²²⁾.*

§ 3. — V_3^n la cui M_4^{r-3} sia un S_1 -cono.

13. — Supponiamo ora che la M_4^{r-3} (luogo degli $\infty^1 S_3$ di appartenenza delle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della V_3^n) sia un cono di vertice una retta a , pur non risultando un cono la V_3^n .

Poichè l'iperquadrica Q_{r-1} di S_r , che sega M_4^{r-3} nella V_3^n e in $h = r - \pi - 4$ spazi lineari S_3 , non può essere un cono (n. 3), tali S_3 debbono appartenere all' S_{r-3} polare di a rispetto alla Q_{r-1} stessa; il loro spazio congiungente deve pertanto avere dimensione $\rho \leq r - 2$.

14. — Sia M_2^{r-2} una superficie rigata, sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-3} generico di S_r . È noto che²³⁾, indicato con m l'ordine della (o di una) curva direttrice minima della M_2^{r-2} ,

²¹⁾ Poichè il sistema $|\varphi^2 - \beta^{(1)} - \beta^{(2)} - \dots - \beta^{(h)}|$ del n. 4 diviene in questo caso un sistema di superficie d'ordine 0, l'imporre al sistema $|\varphi^v|$ la curva base C^v equivale ad imporre alle φ^v la condizione ch'esse abbiano in ogni punto della retta b gli stessi piani tangenti.

²²⁾ Se $\pi = 2$ (quindi $m' = 1$) il sistema lineare rappresentativo della V_3^2 di S_5 diviene quello delle φ^3 tangenti lungo una retta b e su questa un punto doppio biplanare con in esso un piano tangente (per b) fisso per tutte le φ^3 , e uno variabile (generalmente non per b).

²³⁾ I risultati di questo n. trovansi in C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, «Atti Acc. di Torino», t. 19, (1883).

deve essere

$$(21) \quad m \leq \frac{r-3}{2},$$

valendo il segno di uguaglianza se, e soltanto se, r è numero dispari e sulla M_2^{r-3} vi sono ∞^1 direttrici minime.

Lo spazio congiungente h generatrici (qualunque) di M_2^{r-3} ha la dimensione $\rho - 2$ data da:

- 1) $\rho - 2 = 2h - 1$, se $h \leq m + 1$;
- 2) $\rho - 2 = h + m$, se $m + 1 < h \leq r - m - 3$;
- 3) $\rho - 2 = r - 2$, se $h > r - m - 3$.

15. — Dalla $\rho \leq r - 2$ del n. 13, segue che h generatrici della M_2^{r-3} debbono appartenere ad uno spazio $S_{\rho-2}$, di dimensione $\rho - 2 \leq r - 4$.

Andiamo a vedere quando resta verificata quest'ultima limitazione in relazione ai tre casi del n. precedente.

1) Dalla $\rho - 2 \leq r - 4$, e tenuto conto delle (3), (9), si trae facilmente $r = 2\pi + 5$; quindi, a norma della (21) e della $h \leq m + 1$ si ha $\pi \leq m \leq \pi + 1$.

2) Dalla $\rho - 2 \leq r - 4$ segue $m \leq \pi$. Posto, in relazione alla (3),

$$(22) \quad r = 2\pi + 5 + \sigma, \quad (\sigma \geq 0),$$

dalla $m + 1 < h$ si ha $m \leq \pi - 1 + \sigma$: cioè $m \leq \pi - 1$, se $r = 2\pi + 5$; oppure $m \leq \pi$, se $r > 2\pi + 5$.

3) La $\rho - 2 \leq r - 4$ non è verificata.

In conclusione, debbono essere necessariamente soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(23) \quad m \leq \pi + 1, \quad \text{se } r = 2\pi + 5;$$

$$(24) \quad m \leq \pi, \quad \text{se } r > 2\pi + 5.$$

16. — Vogliamo dimostrare che, affinché l'intersezione residua di una M_4^{r-3} (S_1 -cono) con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r per h suoi spazi S_3 , sia una V_3^n (con una retta a di moltepli-

cità $\pi + 1$) *irriducibile, deve necessariamente risultare*

$$(25) \quad h \leq 2m.$$

Se infatti fosse $h > 2m$, la varietà V_3^m (di M_4^{r-3}), proiezione da α della (o di una) curva direttrice minima della rigata M_2^{r-3} (n. 14), avrebbe in comune con la Q_{r-1} , $h > 2m$ piani (almeno), quindi sarebbe situata sulla Q_{r-1} stessa. La varietà V_3^n si spezzerebbe allora nella V_3^m suddetta e in una varietà residua.

17. — Se vale la (23), dalla (25) e avuto riguardo alla (9), segue $\pi + 1 \leq 2m \leq 2\pi + 2$.

Se vale invece la (24), delle (25), (9) e tenuto conto della (22), si ha $\pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi$.

Si può pertanto concludere che, *affinchè esistano delle V_3^n del tipo considerato nel n. 13, debbono necessariamente verificarsi le seguenti condizioni:*

$$(26) \quad r = 2\pi + 5, \quad m = \pi + 1;$$

$$(27) \quad r = 2\pi + 5 + \sigma, \quad \pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi,$$

$$(0 \leq \sigma \leq \pi - 1).$$

Ove valgano le (27), la M_2^{r-3} ha una sola direttrice minima d'ordine m (n. 14). In entrambi i casi, tenuto anche conto della $\pi \geq 2$, è verificata la limitazione

$$r \leq 3\pi + 4.$$

18. — Ove valgano le (26), l'effettiva esistenza della corrispondente $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ si può provare con ragionamento analogo a quello dei nn. 10, 11.

L'esistenza delle V_3^n relative alle condizioni (27) [in relazione alle quali M_2^{r-3} ha una sola direttrice minima d'ordine m] appare evidente appena si osservi che è immediato verificare che una iperquadrica generica Q_{r-1} di S_r che passi per h spazi S_h di una M_4^{r-3} (cono di vertice una retta α) non contiene, di conseguenza, la varietà V_3^m (che da α proietta la direttrice minima della M_2^{r-3} , sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-2} generico),

ne alcun ulteriore S_3 generatore della M_4^{r-3} . Da ciò segue facilmente che tale Q_{r-1} non contiene neppure alcuna altra varietà, luogo di ∞^1 piani, subordinata alla M_4^{r-3} stessa.

Si può così concludere che le V_3^n di S_r ($r \geq 2\pi + 5$) studiate in questo paragrafo, possono essere dei seguenti tipi:

I) $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ intersezione residua di una $M_4^{2\pi+2}$ (che da una retta a proietta una rigata razionale normale $M_2^{2\pi+2}$ di $S_{2\pi+4}$ con ∞^1 direttrici minime d'ordine $\pi + 1$) con una iperquadrica $Q_{2\pi+4}$ di $S_{2\pi+5}$ passante per $\pi + 1$ spazi lineari S_3 della $M_4^{2\pi+2}$ stessa;

II) $V_3^{r+\pi-2}$ di S_r ($r = 2\pi + 5 + \sigma$, $0 \leq \sigma \leq \pi - 1$) intersezione residua di una M_4^{r-3} [che da una retta a proietta una rigata razionale normale M_2^{r-3} di S_{r-2} con una sola direttrice minima d'ordine m ($\pi + 1 + \sigma \leq 2m \leq 2\pi$)] con una iperquadrica Q_{r-1} di S_r passante per $r - \pi - 4$ spazi lineari S_3 della M_4^{r-3} stessa.

19. — A seconda che le V_3^n appartengono ai tipi I o II del n. precedente, le relative rigate M_2^{r-3} possono ammettere, in un piano, i seguenti sistemi lineari rappresentativi ²⁴⁾:

I. — Sistema lineare di curve $C^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con un punto base B di molteplicità $\pi + 1$ e un punto base semplice;

II. — Sistema lineare di curve C^{r-m-3} (d'ordine $r-m-3$) con un punto base B di molteplicità $r-m-4$ ed in questo $r-2m-4$ tangenti fisse.

Le ∞^1 rette della rigata M_2^{r-3} hanno come immagini, in entrambi i sistemi, le rette per il punto base B .

Dai sistemi lineari I, II, si ricava direttamente che la M_3^{r-3} , proiezione della rigata M_2^{r-3} da un punto generico della retta a , può rappresentarsi, in uno spazio lineare S_3 , mediante i seguenti sistemi lineari:

I. — Sistema lineare di superficie $\psi^{\pi+2}$ (d'ordine $\pi + 2$) con una retta base b di molteplicità $\pi + 1$, una retta base c

²⁴⁾ Ved. C. SEGRE, loc. cit. in ²³⁾.

semplice incidente la prima in un punto B nel quale sono fissi i $\pi + 1$ piani tangenti;

II. — Sistema lineare di superficie ψ^{r-m-3} (d'ordine $r-m-3$) con una retta base b di molteplicità $r-m-4$, lungo questa $r-2m-4$ piani tangenti fissi e in un suo punto B fissi tutti gli $r-m-4$ piani tangenti.

In tali rappresentazioni, ai piani per la retta b corrispondono i piani generatori della M_3^{r-3} .

Da questi ultimi sistemi lineari e valendosi delle considerazioni del n. 4, si traggono infine per i due tipi di V_3^n , di cui al n. 18, i seguenti sistemi lineari rappresentativi in uno spazio lineare S_3 :

I) *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi+3}$ (d'ordine $\pi+3$) con una retta base b di molteplicità $\pi+1$, una retta base doppia c incidente b in un punto B di molteplicità $\pi+2$, in B fissi $\pi+1$ piani tangenti (per b); inoltre una curva base $C^{\pi+1}$ (d'ordine $\pi+1$) sezione (fuori di c) di una $\varphi^{\pi+3}$ con un piano generico per c ;*

II) *sistema lineare di superficie $\varphi^{r+\pi-2m-2}$ (d'ordine $r+\pi-2m-2$, con $r=2\pi+5+\sigma$, $\pi+1+\sigma \leq 2m \leq 2\pi$, $0 \leq \sigma \leq \pi-1$) con una retta base b di molteplicità $r+\pi-2m-4$, $r-2m-4$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto base B di molteplicità $r+\pi-2m-3$ con in esso fissi $r-m-4$ piani tangenti (per b), in $2m-r+\pi+4$ punti di b fisso un ulteriore piano tangente (per b); inoltre $\pi-m+1$ coniche base sezioni (fuori di b) di una $\varphi^{r+\pi-2m-2}$ con $\pi-m+1$ piani generici per b ²⁵).*

²⁵) La M_4^{r-3} relativa alla $V_3^{r+\pi-2}$ immagine di questo sistema lineare contiene l' S_1 -cono V_3^m che da a proietta la direttrice minima C^m della rigata M_2^{r-3} (sezione della M_4^{r-3} con un S_{r-2} generico). La iperquadrica Q_{r-1} di S_r (che sega la M_4^{r-3} nella $V_3^{r+\pi-2}$ e in $r-\pi-4$ spazi S_3) passa per $r-\pi-4$ piani del cono V_3^m ; quindi (poichè, in questo caso, $m < r-\pi-4$) la sega ulteriormente in $2m-r+\pi+4$ piani. Il cono $K_2^{r+\pi-2}$ (n. 4) si spezza, di conseguenza, in $2m-r+\pi+4$ piani e in un cono $K_2^{2r-2m-6}$, per cui la Cu base si scinde in $2m-r+\pi+4$ generatrici del cono V_2^m (sezione di V_3^m con l' S_{r-1} ambiente della M_3^{r-3}) e in un'ulteriore curva C' . Alla

§ 4. — V_3^n la cui M_4^{r-3} non sia un cono.

20. — Se la M_4^{r-3} non è un cono, le quadriche del fascio $|Q_2|$ della V_3^n sono a due a due non incidenti. La V_3^n si può allora proiettare biunivocamente dall' S_3 di una sua quadrica Q_2 sopra uno spazio lineare S_{r_1} , di dimensione $r_1 = r - 4$.

La proiezione è una varietà $V_3^{n_1}$, d'ordine $n_1 = n - 6$ ed a curve-sezioni di genere $\pi_1 = \pi - 2$. Infatti un iperpiano generico, S_{r-1} , per l' S_3 della Q_2 , sega la V_3^n in una varietà che si spezza nella Q_2 stessa e in una superficie F_2^{n-2} (d'ordine $n - 2$) che ha in comune con la Q_2 una conica C^2 . Un S_{r-2} generico dell' S_{r-1} e passante per il piano di C^2 , sega la F_2^{n-2} in una curva che si spezza nella conica C^2 ed in una curva C^{n-4} (d'ordine $n - 4$) avente in comune due punti con la C^2 medesima. Da ciò segue che le curve sezioni della $V_3^{n_1}$ hanno l'ordine $n_1 = n - 4 - 2 = n - 6$ ed il genere (in quanto normali nel relativo S_{r-3} ambiente) $\pi_1 = n_1 - r_1 + 2 = \pi - 2$.

Se la $V_3^{n_1}$ è ancora del tipo della V_3^n (cioè tale che la relativa M_4^{r-3} non sia un cono), si potrà ripetere il procedimento ora indicato, e così di seguito, sino a quando si giungerà ad una $V_3^{n_p}$ dell' S_{r_p} , a curve sezioni di genere π_p , di uno dei seguenti tipi:

1°) $V_3^{n_p}$ cono, a curve sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 0$ ^{2a)};

2°) $V_3^{n_p}$ non cono, a curve sezioni razionali ($\pi_p = 0$) o ellittiche ($\pi_p = 1$);

3°) $V_3^{n_p}$ non cono, a curve sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$ (la cui $M_4^{r_p-3}$ sia un S_0 , o un S_1 -cono).

Risulta poi

$$(28) \quad r_p = r - 4p, \quad n_p = n - 6p, \quad \pi_p = \pi - 2p, \quad \left(1 \leq p \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

C^i corrispondono, nel sistema lineare rappresentativo della $V_3^{r+\pi-2}$, le $\pi - m + 1$ coniche base, mentre invece le $2m - r + \pi + 4$ generatrici suddette (che hanno come immagini le giaciture per la retta b) portano di conseguenza gli ulteriori $2m - r + \pi + 4$ piani tangenti fissi in altrettanti punti della retta base b .

^{2a)} In particolare, dunque, razionali o ellittiche.

e le (1), (3), si mutano nelle

$$(29) \quad n_p \geq 3\pi_p + 3, \quad r_p \geq 2\pi_p + 5.$$

21. — Se la V_3^n è rappresentata in uno spazio lineare S_s da un sistema lineare di superficie $|\varphi^v|$, in cui alle quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ corrispondano i piani per una retta b , il sistema residuo rispetto a $|\varphi^v|$ di un gruppo di p piani generici per tale retta viene ad essere rappresentativo nell' S_s della $V_3^{n_p}$, ottenuta dalla V_3^n con successive p proiezioni (n. 20).

Inversamente, dal sistema lineare rappresentativo della $V_3^{n_p}$ si può ottenere quello relativo alla V_3^n .

Nei numeri successivi considereremo, separatamente, le V_3^n che determinano i tre tipi di $V_3^{n_p}$ del n. 20. Di tali V_3^n daremo (seguendo il procedimento ora indicato), i sistemi lineari rappresentativi venendo, in tal modo, a provare la loro esistenza.

22. — La $V_3^{n_p}$ sia un cono a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$.

La sezione di tale $V_3^{n_p}$ con un iperpiano generico S_{r_p-1} di S_{r_p} ($r_p \geq 2\pi_p + 5$) è allora una superficie razionale normale $F_2^{n_p}$ (non rigata e contenente un fascio lineare $|C^2|$ di coniche) che presenta le seguenti caratteristiche ²⁷⁾:

1) è di ordine $n_p = 4\pi_p - k + 4$ ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) ²⁸⁾;

2) può ottenersi come proiezione di una $F_2^{4\pi_p+4}$ di $S_{3\pi_p+5}$ da k suoi punti;

3) è rappresentabile nel piano mediante i seguenti sistemi lineari minimi:

I) sistema lineare di curve C^{π_p+3} (d'ordine $\pi_p + 3$) con un punto base B $(\pi + 1)$ -uplo ordinario, un punto base C dop-

²⁷⁾ Ved. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. 4, (1890).

²⁸⁾ La limitazione $k \leq \pi_p + 1$ è conseguenza della prima delle (29); k sta poi ad indicare il numero delle coniche degeneri del fascio $|C^2|$.

pio e k ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) punti base semplici ($F_2^{n_p}$ di prima specie);

II) sistema lineare di curve $C^{2\pi_p - \mu + 2}$ (d'ordine $2\pi_p - \mu + 2$; $\mu = 0, 1, \dots, \pi_p$) con un punto base B di molteplicità $2\pi_p - \mu$ a cui sono infinitamente vicini $\pi_p - \mu$ punti base doppi $C_1, C_2, \dots, C_{\pi_p - \mu}$, e inoltre k ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) punti base semplici ($F_2^{n_p}$ di seconda specie e del gruppo μ).

In dette rappresentazioni il fascio di rette per b è immagine del fascio di coniche $|C^2|$.

In corrispondenza a tali $F_2^{4\pi_p - k + 4}$ si hanno dei coni $V_3^{4\pi_p - k + 4}$ di $S_{3\pi_p - k + 6}$ ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) di prima o seconda specie. Ciascuno di questi può ottenersi come proiezione di un cono $V_3^{4\pi_p + 4}$ di $S_{3\pi_p + 6}$ da k suoi punti [ved. proprietà 3)].

23. — Poggiando sulle rappresentazioni piane delle $F_2^{4\pi_p - k + 4}$ vogliamo ora determinare i sistemi lineari rappresentativi dei coni $V_3^{4\pi_p - k + 4}$.

Supponiamo, in primo luogo, $k = 0$.

Se la $F_2^{4\pi_p + 4}$ è rappresentata su un piano α da un sistema lineare del tipo I (n. 22), ad una curva razionale di α , $C^{\pi_p + 1}$ (d'ordine $\pi_p + 1$), col punto B di molteplicità π e passante semplicemente per C , corrisponde sulla $F_2^{4\pi_p + 4}$ una curva Γ dell'ordine $(\pi_p + 3)(\pi_p + 1) - (\pi_p + 1) \cdot \pi_p - 2 \cdot 1 = 3\pi_p + 1$; la retta fondamentale BC ha poi come immagine sulla $F_2^{4\pi_p + 4}$ un punto Q . Il cono $V_3^{4\pi_p + 4}$ si proietta biunivocamente dall' $S_{3\pi_p + 2}$ di appartenenza di Γ e Q su un S_3 complementare; al sistema delle sue sezioni iperplane corrisponde, in tale S_3 , un sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi_p + 3}$ (d'ordine $\pi_p + 3$) con una retta base b di molteplicità $\pi_p + 1$, una retta base doppia c incidente la b in un punto base B di molteplicità $\pi_p + 2$, nel quale risulti fisso il cono delle tangenti.

Se la $F_2^{4\pi_p + 4}$ ammette invece su α una rappresentazione del tipo II (n. 22), ad una curva razionale di α , $C^{\pi_p + 1}$ (d'ordine $\pi_p + 1$) che abbia in B un punto di molteplicità π_p e sia tangente alle rette $BC_1, BC_2, \dots, BC_{\pi_p - \mu}$, corrisponde sulla $F_2^{4\pi_p + 4}$ una curva F dell'ordine $(2\pi_p - \mu + 2)(\pi_p + 1) - (2\pi_p - \mu) \cdot \pi_p - 2(\pi_p - \mu) = 2\pi_p + \mu + 2$. Il cono $V_3^{4\pi_p + 4}$

si proietta biunivocamente dall' $S_{3\pi_p+2}$ di appartenenza della Γ e dei $\pi_p - \mu$ punti corrispondenti alle $\pi_p - \mu$ rette fondamentali $BC_1, BC_2, \dots, BC_{\pi_p-\mu}$, su un S_3 complementare. In tale S_3 al sistema delle sezioni iperpiane di $V_3^{4\pi_p+4}$ corrisponde il sistema lineare delle superficie $\varphi^{2\pi_p-\mu+2}$ (d'ordine $2\pi_p - \mu + 2$) con una retta base b di molteplicità $2\pi_p - \mu$, su questa un punto B di molteplicità $2\pi_p - \mu + 1$, nel quale risulti fisso il cono delle tangenti, e $\pi_p - \mu$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti.

Se $k > 0$, per ottenere la rappresentazione spaziale dei relativi coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$, basterà imporre ai predetti sistemi lineari k ulteriori punti base semplici, alcuni dei quali potranno (eventualmente) appartenere al cono delle tangenti in B , quindi dar luogo ad altrettante rette fondamentali.

24. — Se la $V_3^{\pi_p}$ è un cono a curve sezioni razionali ($\pi_p = 0$) o ellittiche ($\pi_p = 1$) si può ancora rappresentare in uno spazio lineare S_3 mediante sistemi lineari dei tipi del n. 23 [ai quali, come nello stesso n. 23 si è fatto notare, si potranno imporre k ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) ulteriori punti base semplici] ²⁹).

Si può inoltre osservare che, anche nei casi in questione, l'ordine n_p può raggiungere (e non superare) il massimo valore $4\pi_p + 4$. Per $\pi_p = 0$ si ha infatti il cono V_3^4 di S_6 che proietta da un punto O la rigata F_2^4 di S_5 (contenente un fascio di coniche); oppure il cono di VERONESE dell' S_6 . Per $\pi_p = 1$ si ha invece il cono V_3^8 di S_9 , contenente un fascio lineare di quadriche.

25. — Dalle considerazioni dei nn. 23, 24 si può infine concludere che i coni $V_3^{4\pi_p-k+4}$ di $S_{3\pi_p-k+6}$ ($0 \leq k \leq \pi_p + 1$) a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 0$ possono rappresentarsi in uno spazio lineare S_3 mediante i seguenti sistemi lineari:

I) sistema lineare di superficie φ^{π_p+3} (d'ordine $\pi_p + 3$)

²⁹) Ved. U. MORIN, loc. cit. in ⁴), nn. 4-9 e loc. cit. in ⁵), n. 12.

con una retta base b di molteplicità $\pi_p + 1$, una retta base c doppia incidente b in un punto base B di molteplicità $\pi_p + 2$ nel quale sia fisso il cono Ω delle tangenti, e k punti base semplici (eventualmente appartenenti ad Ω);

II) sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi_p - \mu + 2}$ (d'ordine $2\pi_p - \mu + 2$; $\mu = 0, 1, \dots, \pi_p$) con una retta base b di molteplicità $2\pi_p - \mu$, $\pi_p - \mu$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti; su b un punto base B di molteplicità $2\pi_p - \mu + 1$ nel quale resti fisso il cono Ω delle tangenti, e k punti base semplici (eventualmente appartenenti ad Ω).

In entrambi i sistemi ora determinati, i piani per la retta b sono rappresentativi del fascio lineare $|Q_2|$ di quadriche (S_0 -coni) della $V_3^{4\pi_p - k + 4}$.

26. — Dai nn. 21, 25 si trae ora direttamente che le V_3^n , appartenenti al 1° tipo del n. 20, sono le varietà $V_3^{4\pi - 2p - k + 4}$ di $S^{3\pi - 2p - k + 6}$ ($2 \leq 2p \leq \pi$, $0 \leq k \leq \pi - 2p + 1$) che ammettono in uno spazio lineare S_3 i seguenti sistemi lineari rappresentativi:

I) *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi - p + 3}$ (d'ordine $\pi - p + 3$) con una retta base b di molteplicità $\pi - p + 1$, una retta base doppia c incidente b in un punto base B di molteplicità $\pi - p + 2$, nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa Ω (d'ordine $\pi - 2p + 2$) e in p piani variabili per b , e k punti base semplici (eventualmente appartenenti a Ω);*

II) *sistema lineare di superficie $\varphi^{2\pi - \mu - 3p + 2}$ (d'ordine $2\pi - \mu - 3p + 2$; $\mu = 0, 1, \dots, \pi - 2p$) con una retta base b di molteplicità $2\pi - \mu - 3p$, $\pi - \mu - 2p$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti; su b un punto base B di molteplicità $2\pi - \mu - 3p + 1$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in una parte fissa Ω (d'ordine $2\pi - \mu - 4p + 1$) e in p piani variabili per b , e k punti base semplici (eventualmente appartenenti a Ω).*

I piani per la retta b hanno come immagini, in entrambi i sistemi, le quadriche del fascio lineare $|Q_2|$ della corrispondente $V_3^{4\pi - 2p - k + 4}$. Tali quadriche sono dei coni i cui vertici

descrivono una curva d'ordine p^{30}), per cui le $V_3^{4\pi-2p-k-4}$ in questione sono degli *pseudo-coni d'indice p^{31}*).

27. — La $V_3^{n,p}$ (n. 20) non sia un cono e le sue curve-sezioni siano razionali ($\pi_p = 0$).

Dalle (29) segue $n_p \geq 3$, $r_p \geq 5$. La $V_3^{n,p}$ non può essere allora che la V_3^3 razionale normale di S_5^{32} (generata da un fascio razionale $|\alpha|$ di piani e il cui fascio di quadriche $|Q_2|$ può ottenersi come sezione della V_3^3 con gli S_4 passanti per un S_3 che contenga un piano di $|\alpha|$), rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare delle quadriche per un punto B ed una retta c . Al fascio $|Q_2|$ viene a corrispondere, in tale rappresentazione, un fascio di piani per una retta b passante per B .

La corrispondente varietà V_3^n è allora (n. 21) una V_3^{6p+3} di S_{4p+5} , a curve sezioni di genere $\pi = 2p \geq 2$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema di superficie φ^{p+2} (d'ordine $p+2$) con una retta base b di molteplicità p , una retta base semplice c e su b un punto base B di molteplicità $p+1$.

28. — Se la V_3^n (n. 20), non cono, è a curve-sezioni ellittiche ($\pi_p = 1$), dalle (29) segue $n_p \geq 6$, $r_p \geq 7$. Si hanno allora due tipi proiettivamente distinti di $V_3^{n,p}$ ³³), e precisamente due tipi di V_3^6 di S_7 che ammettono, in un S_3 , i seguenti sistemi lineari rappresentativi:

I) sistema lineare delle quadriche φ^2 per due punti base B, C (eventualmente infinitamente vicini);

II) sistema lineare delle superficie cubiche φ^3 per tre rette base sghembe b, c, d ³⁴).

³⁰) Basta infatti pensare che con successive p proiezioni (n. 20) la V_3^n si muta in un cono $V_3^{n,p}$.

³¹) Ved. nota 8).

³²) Ved. U. MORIN, loc. cit. in 4), n. 4.

³³) Ved. U. MORIN, loc. cit. in 5), n. 12.

³⁴) Nel I sistema il fascio di quadriche della V_3^6 è rappresentato dal fascio di piani per la retta BC ; nel II invece tale fascio di piani è quello (ad es.) per la retta b .

Le corrispondenti V_3^n (n. 21) sono allora le varietà V_3^{6p+6} di S_{4p+7} , a curve-sezioni di genere $\pi = 2p + 1 \geq 3$, rappresentabili in un S_3 dai seguenti sistemi:

I) *sistema lineare di superficie φ^{p+2} (d'ordine $p + 2$) con una retta b di molteplicità p e su questa due punti base B, C di molteplicità $p + 1$ (eventualmente infinitamente vicini);*

II) *sistema lineare di superficie φ^{p+3} (d'ordine $p + 3$) con una retta base b multipla dell'ordine $p + 1$ e due rette base semplici c, d (b, c, d a due a due sghembe).*

29. — La V_3^n (n. 20) sia a curve-sezioni iperellittiche di genere $\pi_p \geq 2$ e la relativa $M_4 r_p^{-3}$ sia un S_0 -cono. Tenuto conto dei risultati dei nn. 11, 12 e usando il procedimento del n. 21, si ha direttamente che la corrispondente V_3^n è una $V_3^{8\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi-p+1}$ (d'ordine $\pi - p + 1$; $2 \leq 2p \leq \pi - 2$) con una retta base b multipla dell'ordine $\pi - p - 1$ e singolare d'indice p^{35} , $m' - 1$ ($2 \leq 2m' \leq \pi - 2p + 1$) rette base doppie incidenti la retta b e ad essa infinitamente vicine e $\pi - 2p - 2m' + 1$ punti base doppi infinitamente vicini a b ; in ogni punto P di b le $\varphi^{\pi-p+1}$ debbono poi avere in comune $\pi - 2p - 1$ piani tangenti ($\pi - 2p - 2m' + 1$ dei quali generalmente distinti e variabili con P ; due di questi, in ciascuno dei $\pi - 2p - 2m' + 1$ punti di b che ha infinitamente vicino un punto base doppio, coincidenti e passanti per il punto doppio stesso; i rimanenti $2m' - 2$ a due a due coincidenti, fissi lungo b e passanti per le $m' - 1$ rette base doppie).*

30. — Se infine la $M_4 r_p^{-3}$ relativa alla V_3^n (n. 20) è un S_1 -cono, si hanno, avuto riguardo alle conclusioni dei nn. 18 e 19 e usando il procedimento del n. 21, i seguenti tipi di V_3^n :

³⁵⁾ Cioè la generica $\varphi^{\pi-p+1}$ deve ammettere un gruppo di p piani ad essa tangenti in ogni punto di b (e variabili con la $\varphi^{\pi-p+1}$).

I) $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$, a curve-sezioni di genere $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare di superficie $\varphi^{\pi-p+3}$ (d'ordine $\pi - p + 3$; $2 \leq 2p \leq \pi - 2$) con una retta base multipla dell'ordine $\pi - p + 1$, una retta base doppia c incidente b in un punto B di molteplicità $\pi - p + 2$ nel quale siano fissi $\pi - 2p + 1$ piani tangenti; inoltre una curva base $C^{\pi-2p+1}$ (d'ordine $\pi - 2p + 1$) sezione (fuori di c) di un piano generico per c con una superficie del sistema $|\varphi^{\pi-p+3} - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p|$ (essendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, p piani generici per b).

II) $V_3^{3\pi+\sigma+3}$ di $S_{2\pi+\sigma+5}$ ($0 \leq \sigma \leq \pi - 2p - 1$; $2 \leq 2p \leq \pi - 2$), a curve-sezioni di generi $\pi \geq 4$, rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il sistema lineare di superficie $\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}$ (d'ordine $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 3$; $\pi - 2p + \sigma + 1 \leq \leq 2m \leq 2\pi - 4p$) con una retta base b di molteplicità $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 1$, $2\pi - 4p - 2m + \sigma + 1$ rette base doppie infinitamente vicine a b e ad essa incidenti, su b un punto B di molteplicità $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 2$ con in esso fissi $2\pi - 4p - m + \sigma + 1$ piani tangenti passanti per b ($2\pi - 4p - 2m + \sigma + 1$ dei quali passanti ulteriormente per le $2\pi - 4p - 2m + \sigma + 1$ rette base doppie) e $2m - \pi + 2p - \sigma - 1$ punti di b in ciascuno dei quali sia fisso un ulteriore piano tangente (per b); inoltre $\pi - 2p - 2m + 1$ coniche base situate su $\pi - 2p - m + 1$ piani generici per b e tangenti a b in B . Se $\pi < 3p$ bisogna poi imporre al sistema $|\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}|$ un altro punto base C , di molteplicità $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 2$, appartenente alla retta base b e infinitamente vicino a B ³⁶).

³⁶) Poichè nel sistema II del n. 19 le coniche segate dal fascio di piani per la retta base b risultano tangenti a b in B (il che equivale a dire che su b vi è un ulteriore punto base C , della stessa molteplicità di B e ad esso infinitamente vicino), ciò deve avvenire anche per il sistema $|\varphi^{3\pi-5p-2m+\sigma+3}|$ ora considerato.

Se $\pi \geq 3p$ gli altri elementi base di tale sistema portano come conseguenza l'esistenza di un punto base C , di molteplicità $3\pi - 5p - 2m + \sigma + 2$, appartenente a b e infinitamente vicino a B ; se invece $\pi < 3p$ tale punto base C dovrà essere ulteriormente imposto.

CAPITOLO II

 V_3^n A CURVE-SEZIONI NON IPERELLITTICHE

§ 1. — Nozioni preliminari.

31. — Argomento di questo capitolo saranno le varietà algebriche irriducibili a tre dimensioni, V_3^n , non conì, a superficie-sezioni regolari e a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi \geq 3$, normali in uno spazio lineare S_r e il cui ordine n soddisfa alla limitazione (1).

Le superficie-sezioni di tali V_3^n risultano razionali ³⁷⁾. Sono quindi razionali anche le V_3^n ³⁸⁾, e, in quanto normali, pure le loro curve-sezioni sono normali: vale pertanto la (2) e, di conseguenza, la (3).

32. — La generica superficie-sezione, F , della V_3^n si può rappresentare su un piano α mediante un sistema lineare $|F|$ (di dimensione $r-1$, grado n e genere π) di curve di un certo ordine m .

Sia $|F'|$ il sistema lineare (d'ordine $m' \leq m-3$ e genere virtuale π') aggiunto puro a $|F|$, e $|F^*|$ il sistema (d'ordine $m^* = m - m'$ e genere virtuale π^*) residuo di $|F'|$ rispetto a $|F|$.

Indicata con r^* la dimensione virtuale di $|F^*|$, dalla (3) segue facilmente $r^* > 0$. Ne viene di conseguenza che il genere virtuale ed effettivo del sistema $|F|$ uguagliano l'unità e risulta $r^* \leq 9$ ³⁹⁾. Se, in particolare, $|F^*|$ è riducibile, esso deve spezzarsi in una curva fissa e in un sistema irriducibile $|\gamma^*|$ di curve ellittiche o razionali.

³⁷⁾ Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, loc. cit. in 1).

³⁸⁾ Ved. F. FANO, U. MORIN, loc. cit. in 2).

³⁹⁾ Ved. G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, « Mem. Acc. di Torino », s. II, t. 42, (1891).

Notiamo poi che il sistema $|\Gamma'|$ è irriducibile (e allora il suo genere effettivo uguaglia quello virtuale π') in quanto se così non fosse le curve del sistema $|\Gamma|$ sarebbero iperellittiche ⁴⁰⁾.

Ai sistemi $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$, $|\Gamma^*|$ corrispondono, rispettivamente, sulla superficie F , i sistemi $|C|$, $|C'|$, $|C^*|$. Quest'ultimo sega sulla generica C' di $|C'|$ una serie lineare di punti g_k^μ (di dimensione k ed ordine μ) che potrà essere, o no, speciale. Inoltre la C' considerata potrà, o meno, essere contenuta nel sistema $|C^*|$.

§ 2. — V_3^n non pseudo-coni.

33. — Le V_3^n , di cui in questo paragrafo, sono state studiate da U. MORIN, nel lavoro citato in ⁴⁰⁾, in tutti i casi computati alla fine del n. precedente, tranne in quello in cui la serie g_k^μ non è speciale e la generica curva C' è contenuta nel sistema $|C^*|$ ed ha il genere $\pi' = 0$.

Con ragionamento analogo a quello usato dal MORIN, si viene facilmente a concludere che questo caso escluso porta di conseguenza $\pi = 3$. Le V_3^n relative sono allora a curve-sezioni di genere tre ed appartengono pertanto ad uno dei seguenti due tipi ⁴¹⁾:

I) rigata V_3^{12} di S_{11} (le cui generatrici congiungono coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra

⁴⁰⁾ Ved. G. CASTELNUOVO, loc. cit. in ³⁹⁾.

⁴¹⁾ Ved. U. MORIN, loc. cit. in ⁵⁾, nn. 5-8. Nel lavoro ora citato vengono studiate tutte le V_3^n , non coni, a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi = 3$. Tra le stesse, oltre ai tipi elencati in questo n., vi è anche la V_3^8 di S_7 , intersezione completa di un S_1 -cono di VERO-NESE con una iperquadrica generica dell' S_7 stesso; tale V_3^8 non rientra però nelle limitazioni (1), (3).

Nei nn. 35, 36 della presente Memoria verrà poi stabilita l'esistenza pure di uno *pseudo-cono di indice uno* [ved. nota ⁸⁾], V_3^{12} , di S_{11} : tale *pseudo-cono* non è però che una particolarizzazione della rigata V_3^{12} , di cui al tipo II di questo n., quando la corrispondenza birazionale tra il piano ω e la superficie F_2^9 viene a degenerare.

due superficie di VERONESE, nella quale alla rete di coniche della prima resti associata quella della seconda) rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con una retta base semplice b ed un punto base doppio B , non appartenentisi*;

II) rigata V_3^{13} di S_{12} (le cui generatrici congiungono coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra un piano ω ed una superficie, a curve-sezioni ellittiche, F_2^9 di S_9 ⁴²⁾), nella quale corrispondenza alla rete delle rette di ω resti associata la rete delle cubiche di F_2^9 o una sua proiezione (da un suo punto su un S_{11} complementare), rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie cubiche φ^3 con un punto doppio biplanare B nel quale sia fisso un piano tangente, e $k(k=0, 1)$ punti base semplici*.

34. — Se $\pi > 3$, si ha un solo tipo di V_3^n , e precisamente la rigata V_3^{21} di S_{17} , a curve-sezioni di genere $\pi = 6$, (luogo delle rette congiungenti coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra un piano ω ed una superficie, a curve-sezioni di genere tre, F_2^{16} di S_{14} ⁴³⁾), nella quale corrispondenza alla rete delle rette di ω resti associata la rete delle quartiche di F_2^{16}) rappresentabile in uno spazio lineare S_3 mediante il *sistema lineare di superficie φ^5 (d'ordine 5) con un punto base quadruplo B ed una quartica base (eventualmente degenera) ⁴⁴⁾*.

§ 3. — Pseudo-coni V_3^n .

35. — Andiamo infine a considerare gli *pseudo-coni V_3^n* ⁴⁵⁾, a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi \geq 3$.

⁴²⁾ Rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle cubiche.

⁴³⁾ Rappresentabile nel piano mediante il sistema lineare delle quartiche.

⁴⁴⁾ Ved. U. MORIN, loc. cit. in ^o), n. 22.

⁴⁵⁾ Ved. nota ⁸⁾.

È noto che tali varietà potranno (eventualmente) esistere [avuto sempre riguardo alle limitazioni (1), (3)] solo se il sistema $|\Gamma|$ (n. 32) è costituito dalle curve d'ordine $m \geq 4$, con quattro punti base, tre semplici ed uno di molteplicità $m - 3$, situati su una stessa retta λ (fondamentale per $|\Gamma|$), alla quale viene a corrispondere sulla superficie F (immagine di $|\Gamma|$) un punto triplo L . Al variare di F su V_3^n , il punto L descrive una retta tripla l , alla quale si appoggiano i vertici di un fascio lineare di conici cubici (a curve-sezioni razionali), K_2^3 , il generico dei quali è segato da una F , che passi per il suo vertice, nelle tre rette che, nella rappresentazione piana di F , hanno per immagini i tre punti base semplici del relativo sistema $|\Gamma|$ ⁴⁶⁾.

Si verifica, con semplice calcolo, che l'ordine n della superficie F (immagine di $|\Gamma|$) e la dimensione $r - 1$ del suo spazio ambiente valgono

$$n = 3\pi + 3, \quad r - 1 = 2\pi + 4,$$

essendo $\pi = 2m - 5$ ($m \geq 4$) il genere della generica curva-sezione. Tale genere è dunque sempre un numero dispari e quindi può porsi

$$\pi = 2k + 1, \quad (k \geq 1).$$

La V_3^n in questione è pertanto, se esiste, uno *pseudo-cono d'indice uno* $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$ a curve-sezioni non iperellittiche di genere $\pi = 2k + 1$ ($k \geq 1$).

Di tale $V_3^{3\pi+3}$ proveremo, nei numeri successivi, l'effettiva esistenza per ogni valore di $k \geq 1$, e ne daremo il sistema lineare rappresentativo in uno spazio lineare S_3 .

36. — Sia $|\bar{\Gamma}|$ il sistema lineare completo di curve, d'ordine $k + 2$ ($k \geq 1$), di un piano ω , avente un punto base O di molteplicità $k - 1$. L'immagine di tale sistema è una superficie razionale normale Φ , il cui ordine $\bar{n}$ e la dimensione $\bar{r}$ dello

⁴⁶⁾ Ved. U. MORIN., loc. cit. in ⁶⁾, n. 21.

spazio ambiente sono, rispettivamente, dati da

$$(30) \quad \bar{n} = (k+2)^2 - (k-1)^2 = 6k+3,$$

$$(31) \quad \bar{r} = \binom{k+4}{2} - 1 - \binom{k}{2} = 4k+5.$$

Al fascio di rette per O del piano ω corrisponde su Φ un fascio Σ di cubiche.

Scelta genericamente in uno spazio lineare $S_{\bar{r}+2}$, comprendente $l'S_{\bar{r}}$ (ambiente di Φ), una retta generica a (sghemba con $S_{\bar{r}}$), si stabilisca tra i punti di a e le cubiche di Σ (considerate come elementi) un riferimento proiettivo Π ; indi si proietti da ogni punto di a quella cubica di Σ ad esso corrispondente in tale riferimento. Si ottiene così una varietà V_3^n , razionale normale in $S_{\bar{r}+2}$ ed avente la retta a tripla.

Un $S_{\bar{r}+1}$ di $S_{\bar{r}+2}$, generico per a , sega Φ in $\bar{n}$ punti, quindi V_3^n nella retta tripla a e nelle $\bar{n}$ rette che proiettano tali punti dagli $\bar{n}$ punti di a corrispondenti in Π alle $\bar{n}$ cubiche di Σ che passano (ciascuna) per uno degli $\bar{n}$ punti primi considerati: l'ordine n della V_3^n vale pertanto $n = \bar{n} + 3$, quindi, per la (30),

$$(32) \quad n = 6k + 6.$$

Indicato, come di consueto, con r la dimensione dello spazio ambiente della V_3^n , si ha $r = \bar{r} + 2$, e per la (31)

$$(33) \quad r = 4k + 7.$$

Dalla (2) segue poi $\pi = n - r' + 2$, e da questa, a norma delle (32), (33)

$$(34) \quad \pi = 2k + 1, \quad (k \geq 1).$$

Dalle (32), (33), (34) si trae infine

$$n = 3\pi + 3, \quad r = 2\pi + 5,$$

La V_3^n così costruita è dunque una $V_3^{3\pi+3}$ di $S_{2\pi+5}$. Ove si osservi che la generica superficie-sezione della stessa è rappresentabile in un piano mediante un sistema lineare del tipo $|F|$, si conclude che tale $V_3^{3\pi+3}$ è proprio lo *pseudo-cono d'indice uno* di cui si voleva provare l'esistenza (n. 35).

37. — Dal sistema lineare $|\Gamma|$ (rappresentativo della superficie Φ) e seguendo il procedimento indicato nel n. precedente per la costruzione dello *pseudo-cono* V_s^{3n+3} , si trae direttamente che tale V_s^{3n+3} può essere rappresentato in uno spazio lineare S_s mediante il *sistema lineare di superficie* ϕ^{k+2} (d'ordine $k+2 \geq 3$) con una *retta base* b di molteplicità $k-1$ e su questa un *punto base* B di molteplicità $k+1$ nel quale il cono delle tangenti si spezzi in k piani (coincidenti) fissi e in uno variabile per b .

CAPITOLO III

MASSIMA DIMENSIONE DEI SISTEMI LINEARI
DI SUPERFICIE DELLO SPAZIO

38. — Nei precedenti due capitoli di questa Memoria vengono studiati tutti i tipi cremonianamente distinti di sistemi lineari completi, semplici, irriducibili, non rappresentativi di conici, di superficie algebriche dello spazio lineare S_3 , a curva caratteristica (variabile) irriducibile di genere $\pi \geq 2$ e di grado $n \geq 3\pi + 3$.

Da tale studio risulta che la massima dimensione dei sistemi suddetti, in relazione al genere π della generica curva caratteristica γ , è, nel caso che γ sia iperellittica, $r = 3\pi + 4$ (cap. I).

I sistemi lineari per cui questo massimo è raggiunto sono:

a) sistema del tipo II (n. 19), dove deve porsi $\sigma = \pi - 1$, quindi $m = \pi$;

b) sistemi dei tipi I, II (n. 26), dove deve porsi $p = 1$.

Le relative varietà imagini sono quelle descritte, rispettivamente, nei nn. 18 (varietà del II tipo) e 26.

Se la curva γ non è iperellittica il massimo $r = 3\pi + 4$ non può invece mai essere raggiunto (cap. II).

Resta così stabilita anche la II parte di quanto enunciato nell'introduzione.