

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI FANTAPPIÈ

**Su un'espressione generale dei funzionali lineari
mediante le funzioni « para-analitiche » di più variabili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 22 (1953), p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UN' ESPRESSIONE GENERALE DEI FUNZIONALI LINEARI MEDIANTE LE FUNZIONI " PARA-ANALITICHE " DI PIÙ VARIABILI

Nota (*) di LUIGI FANTAPPIÈ (a Roma)

1. - E' ben noto ¹⁾ che un funzionale analitico lineare $F[f(z_1, z_2, \dots, z_n)]$ ha per campo di definizione una regione funzionale lineare (A) , costituita da tutte e sole le funzioni f localmente analitiche di n variabili e *biregolari* (cioè regolari in un punto proprio, regolari e nulle in un punto all' ∞) in tutti i punti di un dato insieme chiuso A (insieme *caratteristico* della regione funzionale) della varietà di Segre, su cui si rappresentano realmente tutte le n -uple complesse z_1, z_2, \dots, z_n (proprie e improprie).

E' altresì noto che, nel caso più semplice di $n = 1$, il valore di un tale funzionale lineare F in tutto il suo campo di definizione (A) è dato dalla formula integrale fondamentale

$$(1) \quad F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z)f(z)dz$$

dove $u(z)$ è la cosiddetta indicatrice (emisimmetrica) del funzionale F , definita dalla formula

$$(2) \quad u(\alpha) = F \left[\frac{1}{\alpha - z} \right]$$

(*) Pervenuta in Redazione il 15 ottobre 1952.

¹⁾ Per questi concetti, riguardanti i funzionali analitici, e per i risultati citati in seguito, vedere il mio corso di lezioni di Madrid e Barcellona (1942): *Los funcionales analiticos, etc.*, pubblicato in volume dal Consejo Sup. de Investigaciones Cientificas, Madrid, 1943 e anche la 4^a parte, redatta dal Dr. Pellegrino, del volume di P. Lévy, « *Problèmes concrets d'Analyse fonctionnelle* ». Paris, Gauthier-Villars, 1951.

e la curva d'integrazione C è una curva chiusa qualunque della sfera complessa, che racchiuda però nel suo interno tutti i punti dell'insieme chiuso A (caratteristico della regione di definizione di F), ma lasci all'esterno tutti i punti dell'insieme chiuso I , ove la funzione $f(z)$ non è definita. Una tale curva si dice una curva *separatrice* dei due insiemi A e I , ed è evidente che due curve separatrici C e C' degli stessi insiemi, ed ugualmente orientate, sono *omologhe* nel campo ove la funzione integranda è regolare (nulla di 2° ordine all'∞, se è ivi regolare), cosicchè nella formola (1) *si ottiene sempre lo stesso valore anche sostituendo la curva C con qualunque altra curva separatrice, C' , cioè*

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z)f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} u(z)f(z) dz = F[f(z)]$$

Le cose cambiano radicalmente, quando si passa a considerare invece il caso dei funzionali lineari delle funzioni analitiche di *più* variabili complesse, già da $n = 2$ in poi. Intanto, non è più sempre possibile generalizzare la nozione di funzione « indicatrice », data dalla (2) per $n = 1$, essendo necessario che il campo di definizione (A) del funzionale lineare $F[f(z_1, z_2, \dots, z_n)]$, e quindi il suo insieme caratteristico A , soddisfi a particolari condizioni. Ma anche se tali condizioni sono soddisfatte, come avviene, per es., se A è *tutto al finito*, anche cioè se è possibile definire una « indicatrice » del funzionale lineare (« emisimmetrica », analoga alla (2), « simmetrica », o « proiettiva »), le formole integrali, che si conoscono per calcolare il valore del funzionale lineare F , mediante una tale indicatrice, *non danno* in generale questo valore *per tutte* le funzioni f del suo campo di definizione, ma solo per le funzioni *di un campo parziale* ($A^* \subset A$), restando ignoto il valore del funzionale per le funzioni rimanenti.

Nella presente Nota ci proponiamo invece di determinare la classe, abbastanza interessante (che può forse estendersi fino a comprendere *la totalità* dei funzionali lineari) di quei funzionali lineari F di una funzione $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ di n variabili, il cui valore può esprimersi ancora *in tutto il campo di definizione* (A), che può essere qualunque (supporremo sol-

tanto A a distanza finita) con una formula analoga alla (1), e cioè con un integrale esteso pure a una varietà V , *separatrice* dei due insiemi chiusi A e I , e che non vari sostituendo tale varietà con un'altra varietà V' , *omologa* nel campo comune di biregolarità delle funzioni integrande.

2. - Cominciamo perciò con l'osservare che, avendo supposto A al finito, ed essendo una qualunque funzione $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ del campo di definizione (A) del funzionale lineare F regolare nei punti di A , si potrà sempre scegliere un intorno di A , al finito, e la varietà d'integrazione V (separatrice) abbastanza ristretta intorno ad A , in modo che sia compresa entro questo intorno. Per le considerazioni che dovremo svolgere, ci sarà dunque sufficiente rappresentare le sole n -uple complesse *finite* z_1, z_2, \dots, z_n coi punti reali di un S_{2n} cartesiano $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, ponendo per es.,

$$(4) \quad z_1 = x_1 + ix_{n+1}, \quad z_2 = x_2 + ix_{n+2}, \dots, \quad z_n = x_n + ix_{2n}$$

Poichè la funzione arbitraria f , argomento del funzionale, è definita e regolare in una regione al finito M di S_{2n} , *contenente l'insieme* A nel suo interno, se indichiamo con I l'insieme dei punti esterni o al contorno di M , una varietà *separatrice* di A e I sarà allora data da una *ipersuperficie chiusa* V_{2n-1} di S_{2n} contenuta in M , la quale sia, entro M , contorno completo di un'altra regione parziale $M' (\subset M)$, a cui l'insieme A sia ancora interno. Infatti V_{2n-1} è omologa a O entro M , ma non lo è più nella regione M privata dei punti di A ; V_{2n-1} è pure omologa a O entro la varietà di Segre, (rappresentativa delle n -uple complesse), privata dei punti di A (essendo il contorno, cambiato di segno, del dominio complementare di M' , che non contiene A), ma non lo è più in tale dominio privato dei punti di I (ad esso interni).

Se dunque il valore del funzionale lineare $F[f]$ può per ipotesi ottenersi, in tutto il suo campo di definizione (A), da una formula analoga alla (1), tale formula dovrà avere la forma precisa

$$(5) \quad F[f(z_1, z_2, \dots, z_n)] = \iint_{V_{2n-1}} \dots \int f(z_1, z_2, \dots, z_n) \omega_{2n-1}$$

ove a secondo membro compare proprio un integrale multiplo d'ordine $2n-1$, esteso a una varietà separatrice V_{2n-1} , di questa dimensione, e quindi a coefficiente della funzione f dovrà comparire una forma differenziale esterna ω_{2n-1} , dello stesso grado $2n-1$, nei differenziali $dx_1, dx_2, \dots, dx_{2n}$ delle $2n$ variabili reali x_1, x_2, \dots, x_{2n} (4) (parti reali e coefficienti degli immaginari delle variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_n), del tipo

$$(6) \quad \omega_{2n-1} = \sum_1^{2n} (-1)^{r-1} u_r dx_1 dx_2 \dots dx_{r-1} dx_{r+1} \dots dx_{2n}$$

I $2n$ coefficienti u_r di questa forma si supporranno funzioni continue e con derivate prime continue, definite in tutta una regione R , ottenuta da un'altra regione R_1 (eventualmente da tutto lo spazio S_{2n} , ma interessano in realtà soltanto i valori nei punti prossimi ad A) contenente nel suo interno tutti i punti di A , dopo aver escluso da R_1 proprio questi punti di A , ove dunque tali coefficienti non sono definiti (in generale, singolari in A , regolari in $R = R_1 - A$). In definitiva l'espressione integranda $f\omega$, che figura nel 2° membro della (5), sarà dunque regolare nella regione \bar{R} intersezione di R con la regione M , in cui è regolare la f .

3. - D'altra parte l'espressione integrale (5) del funzionale F non deve variare, per ipotesi, se la varietà separatrice V d'integrazione si sostituisce con un'altra qualunque varietà separatrice V' , omologa a V ($V' \infty V$) entro la regione \bar{R} di regolarità della forma integranda

$$(7) \quad f\omega = \sum_1^{2n} (-1)^{r-1} f u_r dx_1 dx_2 \dots dx_{r-1} dx_{r+1} \dots dx_{2n}$$

Ma la condizione necessaria e sufficiente perchè sia

$$(8) \quad \int_V f\omega = \int_{V'} f\omega$$

per ogni

$$(9) \quad V' \infty V$$

è data semplicemente dal fatto che la forma differenziale integranda deve essere chiusa¹⁾, cioè

²⁾ V., p. es., B. SEGRE, « *Forme differenziali e loro integrali* », Roma, 1951, pag. 176 e 141.

$$(10) \quad d(f\omega) = 0$$

e poichè la forma $f\omega$ è di grado $2n - 1$, tale condizione riducesi all' unica equazione differenziale nei coefficienti

$$(11) \quad \operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \sum_1^{2n} \frac{\partial(fu_r)}{\partial x_r} = 0$$

ove abbiamo indicato con \mathbf{u} e $f\mathbf{u}$ i vettori di S_{2n} che hanno per componenti i coefficienti, coi segni alternati, delle forme ω e $f\omega$ rispettivamente. Deve dunque essere

$$(12) \quad f \operatorname{div} \mathbf{u} + \sum_1^{2n} u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0$$

per ogni funzione analitica $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ regolare in A (e nella regione \bar{R}). Tra tali funzioni c'è anche la funzione costante $f=1$ che, sostituita nella (11), ci dà dunque una condizione importante a cui devono soddisfare i coefficienti della forma differenziale ω :

$$(13) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_1^{2n} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} = 0$$

Tale condizione (il vettore \mathbf{u} a *divergenza nulla*) ci dice che anche *la sola forma differenziale ω deve essere chiusa*, e quindi, per varietà V, V' omologhe

$$(14) \quad \int_V \omega = \int_{V'} \omega \quad (= F[1])$$

Tenendo conto della (13), la (12) diviene dunque

$$(15) \quad \sum_1^{2n} u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0$$

che deve pure essere verificata, come la (12), per ogni funzione analitica $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ regolare in A , dunque, in particolare anche per

$$(16) \quad f = z_r = x_r + ix_{n+r} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

fornendo così le altre n condizioni, per il vettore \mathbf{u}

$$u_r + iu_{n+r} = 0$$

cioè

$$(17) \quad u_{n+r} = iu_r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Sostituendo questi valori delle u_{n+r} , nella (13), si ha allora la relazione fondamentale

$$(18) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_1^n \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + i \sum_1^n \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+r}} = 0$$

o anche

$$(19) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}' \mathbf{u} + i \operatorname{div}'' \mathbf{u} = 0$$

se indichiamo con $\operatorname{div}' \mathbf{u}$ e $\operatorname{div}'' \mathbf{u}$ la divergenza del vettore complesso di S_n di componenti u_1, u_2, \dots, u_n , considerato rispettivamente come vettore di campo nell' S_n delle sole prime n variabili x_1, x_2, \dots, x_n , o nell' S_n delle sole ultime n variabili $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$.

Viceversa, si vede subito che, preso ad arbitrio un qualunque vettore complesso $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ di S_n , soddisfacente alla sola condizione (18) o (19), e completato tale vettore di S_n con l'aggiunta delle altre n componenti u_{n+r} (17), nel primitivo vettore \mathbf{u} di S_{2n} , la forma ω ad esso corrispondente, data dalla (6), soddisfa effettivamente a tutti i requisiti richiesti per l'espressione (5) di un funzionale lineare del tipo indicato.

La condizione necessaria e sufficiente è infatti espressa dalla (11) o (12), che ora, tenendo conto della (19) e delle (17), si riduce semplicemente all'altra

$$(20) \quad \sum_1^n u_r \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + i \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} \right) = 0$$

E' dunque sufficiente che la f sia una funzione *analitica* rispetto a ciascuna variabile $z_r = x_r + ix_{n+r}$, come abbiamo supposto, perchè risultino identicamente soddisfatte le n condizioni di monogeneità

$$(21) \quad \frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} \text{ o anche } D_r f = \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

e di conseguenza la (20), e quindi anche le (12), (11), (10).

4. - Osserviamo che, spezzando le funzioni complesse u nelle parti reali e immaginarie

$$(22) \quad u_r = u_r' + i u_r'' \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

e sostituendole nell'equazione fondamentale (18), si ha al-

lora la relazione

$$(18') \quad \sum_1^n \left\{ \frac{\partial(u_r' + iu_r'')}{\partial x_r} + \frac{\partial(-u_r'' + iu_r')}{\partial x_{n+r}} \right\} = 0$$

e cioè le due equazioni fondamentali nelle $2n$ funzioni reali u_r' , u_r'' delle $2n$ variabili reali x_1, x_2, \dots, x_{2n}

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \frac{\partial u_r'}{\partial x_r} - \sum_1^n \frac{\partial u_r''}{\partial x_{n+r}} = 0 \\ \sum_1^n \frac{\partial u_r''}{\partial x_r} + \sum_1^n \frac{\partial u_r'}{\partial x_{n+r}} = 0 \end{array} \right.$$

che possiamo anche scrivere, con le notazioni della formula (19)

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}' \mathbf{u}' - \operatorname{div}'' \mathbf{u}'' = 0 \\ \operatorname{div}'' \mathbf{u}' + \operatorname{div}' \mathbf{u}'' = 0. \end{array} \right.$$

5. - E' interessante notare che, per $n=1$, la condizione fondamentale (18), (19) o (23) si riduce alle sole condizioni di monogeneità per l'unica funzione $u(z) = u(x + iy)$, riottenendosi così, come caso particolare della (5), proprio la formula fondamentale (1), valida per tutti i funzionali lineari delle funzioni $f(z)$ di una sola variabile (a meno di un coefficiente costante, che si può pensare incorporato entro la $u(z)$).

Un altro caso particolare analogo a questo, in cui la condizione fondamentale (18) o (19) è evidentemente soddisfatta, si ha quando le n funzioni u_n sono tutte funzioni analitiche delle n variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_n , e quindi sono soddisfatte le n^2 condizioni di monogeneità

$$(25) \quad D_s u_r = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + i \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+s}} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

(poichè nel 2° membro della (18) ogni termine del 1° sommatorio si elimina col corrispondente del 2° sommatorio).

In questo caso, a ogni n -upla complessa z_1, z_2, \dots, z_n di un certo campo viene a corrispondere un'altra n -upla complessa u_1, u_2, \dots, u_n e nasce quindi una rappresentazione (in generale parziale) della varietà di Segre (immagine di tali n -uple su se stessa, la quale non è altro che una rappresentazione pseudoconforme.

Un caso particolare ancora più vasto di funzioni u_r , soddisfacenti alla (18) o (19), si ha quando ciascuna funzione u_r è funzione analitica della sola variabile z_r dello stesso indice (in generale funzione non analitica delle altre variabili), quando cioè, invece delle n^2 condizioni di monogeneità (25), sono soddisfatte le sole n condizioni (25), per cui $s = r$, come è evidente dalla struttura della (18).

Comunque, anche considerando il caso completamente generale delle n -uple di funzioni u_r , che soddisfano alla (18) o (19), e con le quali quindi si può costruire una forma ω_{2n-s} del tipo (6) considerato, e, in corrispondenza, un funzionale del tipo (5), evidentemente analitico e lineare, si ha sempre una rappresentazione (parziale) dello spazio vettoriale (complesso) S_n delle n -uple complesse su sè stesso, essendo sempre associata a ogni n -upla complessa z_1, z_2, \dots, z_n di un certo campo ancora un'altra n -upla complessa u_1, u_2, \dots, u_n . Sarà allora naturale considerare queste n -uple, o vettori complessi \mathbf{u} di S_n , come funzioni della n -upla (o vettore) variabile $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$, che generalizzano la nozione di funzione analitica $f(z)$, a cui si riducono per $n = 1$, e che chiameremo funzioni para-analitiche di $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Come abbiamo visto, casi particolari di funzioni para-analitiche $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ sono dati dalle n -uple di funzioni analitiche di tutte le variabili z_r , o anche delle n -uple u_r , in cui ciascuna u_r è funzione analitica della sola z_r corrispondente.

Di più, data la linearità della condizione fondamentale (18) o (19), che caratterizza le funzioni para-analitiche, è evidente che anche la somma e la differenza di due funzioni para-analitiche definite in uno stesso campo, è ancora para-analitica, e quindi che tali funzioni costituiscono un modulo.

Sempre considerando funzioni definite e regolari in uno stesso campo, è poi da osservare che, pure per la linearità della (19), anche il prodotto $c\mathbf{u} \equiv (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$ di una funzione para-analitica \mathbf{u} per una costante c (complessa) è ancora una funzione para-analitica.

Più generalmente, anche il prodotto $f\mathbf{u}$ di una funzione para-analitica \mathbf{u} per una funzione analitica $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ di tutte le n variabili z_r è pure una funzione para-analitica,

dato che la condizione fondamentale (18) si riduce, per la $\mathbf{f}\mathbf{u}$, alla (20), che è sempre soddisfatta, in virtù delle (21).

Il modulo delle funzioni para-analitiche è dunque *un modulo con moltiplicatori*, tali moltiplicatori essendo dati *dall'anello di tutte le funzioni analitiche, regolari nel campo considerato* (in particolare costanti complesse); questo insieme delle funzioni para-analitiche, regolari in un certo campo, può dunque anche considerarsi come *uno spazio vettoriale*, a moltiplicatori nel detto anello.

Infine un'altra proprietà notevole di tale spazio delle funzioni *para-analitiche* $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$, si ha considerando la « trasformazione infinitesima » associata a ciascuna di esse

$$(26) \quad \begin{aligned} Uf &= \sum_1^n u_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \sum_1^n u_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}} \\ &= \mathbf{u} \times \text{grad}' f + i\mathbf{u} \times \text{grad}'' f \end{aligned}$$

(con evidente significato dei simboli \times , grad', grad''). Prese infatti due tali funzioni para-analitiche \mathbf{u} e $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (per cui si suppongano le componenti con derivate seconde continue), e le due corrispondenti trasformazioni infinitesime Uf e

$$(27) \quad Vf = \sum_1^n v_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \sum_1^n v_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}}$$

potremo allora costruire *la trasformazione infinitesima alternata*

$$(28) \quad Wf = (U, V)f = UVf - VUf = \sum_1^n w_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + i \sum_1^n w_r \frac{\partial f}{\partial x_{n+r}}$$

i cui coefficienti w_r sono dati, com'è noto ³⁾, dalle espressioni

$$(29) \quad w_r = Uv_r - Vv_r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Ma con facili calcoli risulta

$$(30) \quad \begin{aligned} &\text{div}' \mathbf{w} + i \text{div}'' \mathbf{w} = \\ &= \mathbf{u} \times \text{grad}'(\text{div}' \mathbf{v} + i \text{div}'' \mathbf{v}) + i\mathbf{u} \times \text{grad}''(\text{div}' \mathbf{v} + i \text{div}'' \mathbf{v}) - \\ &- \mathbf{v} \times \text{grad}'(\text{div}' \mathbf{u} + i \text{div}'' \mathbf{u}) - i\mathbf{v} \times \text{grad}''(i\mathbf{v}' \mathbf{u} + i \text{div}'' \mathbf{u}) \end{aligned}$$

e quindi anche quest'espressione è identicamente nulla, quan-

³⁾ V., per es., L. BIANCHI, *Gruppi continui finiti di trasformazioni*, Pisa, Spoerri, 1918, pag. 17.

do lo sono le espressioni tra parentesi, quando cioè \mathbf{u} e \mathbf{v} sono funzioni para-analitiche. Definendo come alternata (\mathbf{u}, \mathbf{v}) di due funzioni *para-analitiche* la n -upla \mathbf{w}_r , data dalle (29), cioè il vettore $\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_n)$, si ha dunque che *anche l'alternata (29) di due funzioni para-analitiche è pure una funzione para-analitica.*

Se nello spazio vettoriale di tutte le funzioni para-analitiche $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ definite e indefinitamente derivabili in un certo campo dell' S_{2n} (a moltiplicatori funzioni analitiche), oltre la *somma e la differenza* di due funzioni, definiamo anche una operazione di *prodotto* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}$, con le (29), cioè come la funzione *alternata* delle due, con le note proprietà *distributiva* (non associativa) e le altre:

$$(31) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$(32) \quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) + ((\mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{u}) + ((\mathbf{w}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) = 0$$

(identità di Jacobi)

tale spazio vettoriale delle funzioni para-analitiche risulta allora addirittura *un'algebra di Lie*, a coefficienti funzioni analitiche.

Ciò, del resto, era da prevedersi, considerando il fatto che, nello spazio S_{2n} delle $2n$ variabili *complesse* x_1, x_2, \dots, x_{2n} (non più soltanto *reali*, come finora) l'equazione differenziale (18) *definisce le trasformazioni infinitesime* (26) *di un gruppo continuo infinito*, come si vede subito osservando che, cambiando le variabili indipendenti $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ per il fattore $-i$ (cioè nelle $-ix_{n+1}, -ix_{n+2}, \dots, -ix_{2n}$), la (18) non è altro che *l'equazione di definizione del gruppo infinito di Möbius (complesso) delle trasformazioni equivalenti sulle $2n$ variabili complesse* $x_1, x_2, \dots, x_n, -ix_{n+1}, -ix_{n+2}, \dots, -ix_{2n}$.

Per considerare tale gruppo, in particolare per costruirne le traiettorie, dato che i coefficienti $u_1, u_2, \dots, u_n, iu_1, \dots, iu_n$ delle trasformazioni infinitesime (26) sono *necessariamente complessi* (almeno in parte), occorre però considerare funzioni che debbono essere definite e derivabili *anche per valori complessi* delle $2n$ variabili x_1, x_2, \dots, x_{2n} (e non solo reali), cioè funzioni *che debbono essere necessariamente funzioni « analitiche » di queste $2n$ variabili*, non però, in generale, funzioni analitiche delle sole n combinazioni $z_r = x_r + ix_{n+r}$ ($r = 1, 2, \dots, n$).